
B 504199



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ESSAI HISTORIQUE

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS,

OU

DISSERTATION

SUR LA THÉORIE

DES MOUVEMENS DE LA LUNE

ET DES PLANÈTES,

ABSTRACTION FAITE DE LEUR FIGURE;

PAR ALFRED GAUTIER, DE GENÈVE,

LICENCIÉ ÈS-LETTRES ET DOCTEUR ÈS-SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Cœli enarrant gloriam Dei.
Ps. XIX.

PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE Mme Ve COURCIER, RUE DU JARDINET No 12.

1817.

A MONSIEUR

LE BARON MAURICE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, MEMBRE DE LA LÉGION-D'HONNEUR,

MAITRE DES REQUÊTES AU CONSEIL-D'ÉTAT, etc., etc.

MONSIEUR,

Vos conseils et vos lumières ayant essentiellement contribué à l'entreprise et à l'exécution de cet Ouvrage, ma reconnaissance et mon attachement me font un devoir de vous en faire publiquement hommage, et votre bonté m'autorise aussi à vous le présenter à titre d'indulgent et précieux ami.

ALFRED GAUTIER.

PRÉFACE.

On a dit déjà que l'histoire de l'Astronomie donne, plus qu'aucune autre, une juste idée des progrès de l'esprit humain. Si cela est vrai en général, cela s'applique spécialement, ce me semble, à l'histoire des travaux que la découverte de l'attraction a fait naître. Il est beau de voir les hommes, courbés vers la terre par tant de besoins et d'intérêts divers, s'élevant peu à peu au-dessus des idées et des préjugés vulgaires, porter leurs regards vers les cieux, qui recèlent tant de merveilles et qui proclament la grandeur du Dieu tout puissant qui les créa. Il est curieux de les voir, malgré de grandes difficultés, observer les astres avec constance, les suivre dans leurs mouvemens, former, pour lier les faits entre eux, des systèmes ingénieux, et les corriger peu à peu par l'observation, en se dépouillant des illusions auxquelles la faiblesse de l'esprit humain les avait d'abord exposés : puis profitant successivement des secours de l'expérience et d'instrumens plus parfaits, trouver les lois générales qui régissent notre système, et les réduire enfin à une seule à laquelle tout semble obéir. Mais il n'est pas moins intéressant de voir les Géomètres partir ensuite de ce principe unique, conclu des lois de la Mécanique et de la généralisation d'un certain nombre de phénomènes, pour les soumettre tous au calcul, et les déduire comme corollaires d'un théorème si simple et si fécond ; d'étudier les méthodes qu'ils ont successivement employées, de comparer les résultats auxquels elles les ont conduit, et de suivre ainsi la marche de l'esprit humain dans l'une des plus belles carrières qu'il ait parcourues.

La théorie a présenté de très grandes difficultés qu'il a fallu surmonter par degrés, en les divisant. L'imperfection des observations n'a pas même été inutile sous ce rapport, puisqu'en ne permettant de

découvrir que les variations principales, elle a simplifié les recherches faites pour les expliquer, et qu'elle a évité aux Géomètres qui se sont les premiers occupés de ce sujet, ce dédale de petits effets divers qu'il eût été si difficile d'embrasser tous à la fois. Lorsqu'on a voulu attaquer directement le problème des mouvemens des corps célestes, on a reconnu bien vîte qu'il était impossible à résoudre dans toute sa généralité. Il a donc fallu soumettre la rigueur mathématique, naturellement inflexible, à de nouvelles modifications, pour l'assujétir à représenter les phénomènes de la nature, sans lui ôter toute son exactitude. On a créé une théorie de l'art de négliger de petites quantités, de former des approximations successives; et cette route nouvelle et glissante a égaré un instant quelques-uns de ceux qui la parcouraient. Cependant, le nombre des Géomètres-Astronomes s'étant augmenté, ils se sont appuyés ou corrigés les uns les autres; les observations se sont multipliées et perfectionnées; on a poussé plus loin les développemens analytiques, et on a trouvé des termes sensibles parmi ceux qu'on n'avait pas d'abord considérés; la gloire attachée à des succès si difficiles, a été un puissant encouragement aux travaux de ce genre. Enfin l'attraction a triomphé sur tous les points; et chaque difficulté qui s'est élevée a été pour elle l'occasion d'une nouvelle victoire. Un admirable accord s'est établi entre les résultats de la théorie et ceux de l'observation; la première, après avoir été long-temps guidée, est même devenue directrice à son tour : ses procédés, indépendans de tout obstacle matériel, ont démontré l'existence de nouveaux effets que l'autre avait à peine fait entrevoir, ou dont elle n'avait pu faire saisir la loi. C'est ainsi que les deux méthodes se vérifiant et se consolidant mutuellement : la science qui apprécie les phénomènes les plus compliqués, qui détermine la grandeur et la position mutuelle de corps dont la distance est immense, est parvenue enfin à un point de perfection, que sont bien loin d'avoir atteint d'autres sciences, dont les principes semblent être bien plus simples et l'objet bien plus à notre portée.

Dans cette masse imposante de travaux divers que la théorie de l'at-

traction a fait naître, on peut distinguer trois classes principales. La première comprend les recherches relatives à la détermination des mouvemens de translation des corps célestes, en supposant leurs masses réunies à leurs centres de gravité. La seconde, celle de leurs mouvemens de rotation, en ayant égard à leur figure. La troisième traite de plusieurs phénomènes particuliers, tels que le flux et le reflux, l'aberration, la réfraction et l'attraction moléculaire. Je ne m'occuperai ici que de la première classe, sans y comprendre même la théorie des comètes, ni celle des satellites, excepté la Lune. Dans les deux premières parties de cet *Essai*, j'ai cherché à esquisser l'histoire des progrès les plus remarquables que les Géomètres du 18ᵉ siècle ont fait faire aux théories de la Lune et des Planètes, et à présenter en peu de mots une analyse raisonnée des principales méthodes dont ils ont fait usage, en m'arrêtant à l'époque où a paru la *Mécanique céleste*, dont le mérite supérieur ne permet pas un examen de ce genre. L'objet de la troisième partie de cet Ouvrage est de donner un précis élémentaire de la méthode pour calculer les perturbations des corps célestes, fondée sur la variation des élémens de leurs orbites elliptiques, d'exposer les principaux théorèmes auxquels elle conduit, et d'indiquer les travaux les plus récens et les plus remarquables sur cette théorie.

Sentant déjà toute la difficulté de présenter avec ordre et exactitude les recherches de tant d'hommes de génie, c'eût été une présomption bien plus téméraire encore de porter sur eux des jugemens superficiels; aussi me suis-je borné en général à les prendre eux-mêmes pour guides sur ce point, en recueillant l'opinion énoncée par chacun d'eux sur les productions des autres. Ainsi l'examen de la théorie de la Lune de Newton, fait par Clairaut et d'Alembert, peut servir à l'apprécier jusqu'à un certain point; la discussion entre ces deux derniers Géomètres nous éclaire sur les avantages et les inconvéniens de leurs méthodes; la franchise d'Euler nous découvre les imperfections des siennes; enfin la difficulté, long-temps jugée insurmontable, de soumettre à la théorie

l'équation séculaire de la Lune et les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, relève encore le mérite de celui qui le premier y a réussi.

J'ai cherché aussi à employer le plus possible les propres expressions de chaque Auteur, qu'il est si rare de pouvoir remplacer avec succès. Je me suis permis seulement de les abréger quelquefois et d'y faire de légères transpositions de mots ou de phrases qui ne peuvent nullement en altérer le sens.

J'ai joui d'un avantage particulier, en trouvant dans ceux qui ont été mes juges, des secours et des encouragemens précieux. C'est d'après leurs conseils que j'ai choisi le sujet de mes recherches; c'est dans leurs cours et dans les lectures qu'ils m'ont indiquées, que j'en ai en grande partie puisé les matériaux; et je regarderai leur approbation comme la plus honorable récompense de mon travail.

Explication de quelques abréviations employées dans le cours de cet Ouvrage.

Mém. de Par. pour	*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris.*
Sav. Etr.	*Mémoires présentés à cette Académie par des Savans Étrangers.*
Prix de l'Acad.	*Recueil des Pièces qui ont remporté les Prix à cette Académie.*
Mém. de Berl.	*Mémoires de l'Académie royale de Berlin.*
Mém. de l'Inst.	*Mémoires de l'Institut : Sciences mathématiques et physiques.*
Jour. des Sav.	*Journal des Savans.*
Rech.	*Recherches sur différens points importans du Système du Monde*, par d'Alembert.
Syst. du Monde	*Exposition du Système du Monde*, par M. Laplace.
Méc. cél.	*Traité de Mécanique céleste*, par M. Laplace.

TABLE DES CHAPITRES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIES DE LA LUNE.

NOTES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

THÉORIES DES PLANÈTES.

TROISIÈME PARTIE.

ÉLÉMENS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES MOUVEMENS DES PLANÈTES ET DES SATELLITES, ABSTRACTION FAITE DE LEUR FIGURE.

DISSERTATION

SUR LA THÉORIE

DES MOUVEMENS DE LA LUNE

ET DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIES DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

Esquisse rapide des connaissances acquises sur les mouvemens de la Lune, par les Astronomes observateurs jusqu'à Newton, et de la théorie par laquelle il chercha le premier à expliquer ces mouvemens.

L'ASTRONOMIE, ainsi qu'un grand nombre d'autres sciences, n'a pas été d'abord cultivée pour elle-même. Ce fut pour régler le temps et la marche des saisons, pour se guider dans leurs voyages, que les hommes acquirent les premières notions sur les mouvemens des corps célestes. Des phénomènes qui excitaient la terreur et que l'on voulut expliquer, de vaines superstitions sur les vertus des astres, toutes les erreurs dangereuses de l'Astrologie judiciaire, quelque affligeantes qu'elles soient, provoquèrent cependant aussi d'utiles travaux; ceux-ci rendirent promptement l'Astronomie plus cultivée que les autres sciences humaines, et lui acquirent dès-lors ce premier rang qu'elle a toujours conservé depuis. D'Alembert remarque, dans le Discours préliminaire de ses *Rech. sur le Syst. du Monde*, « que malgré toutes ces idées fausses, et quoique les ouvrages astronomiques des anciens » n'aient pas été d'un grand secours aux modernes, il n'y a aujourd'hui presque aucun » principe général dont l'énoncé ou du moins le germe ne se trouve chez les anciens, » comme si la première impression de la nature était de nous donner des idées justes,

» que l'on abandonne bientôt par incertitude ou par amour de la nouveauté, et auxquelles » enfin on est forcé de revenir. »

Découverte des principales inégalités de la Lune par l'observation.

La Lune, par la clarté qu'elle nous verse, par ses phases, par sa révolution, qui fournit une période naturelle, par sa proximité de la Terre et par ses éclipses, est, après la Terre et le Soleil, l'astre le plus intéressant pour l'homme; elle peut nous donner une idée bien relevée de toutes les découvertes astronomiques dues aux anciens. On attribue déjà aux Chaldéens la connaissance du retour constant des éclipses, au bout de 223 lunaisons ou de 18 ans et 10 jours. En examinant avec soin le mouvement de la Lune, on observa promptement qu'au lieu de décrire un cercle autour de la Terre, d'une manière uniforme, elle était soumise à une inégalité dont le *maximum* montait à 5 ou 6°, dont la période était de $27^j\frac{1}{2}$, et qui accélérait ou ralentissait alternativement sa marche. C'est ce qu'on a appelé depuis *équation du centre*. On reconnut que le point de la plus grande inégalité avançait de près de 3° à chaque révolution; que dans cet intervalle la distance de la Lune à la Terre changeait aussi; que le plan de l'orbite de la Lune était incliné d'environ 5° à celui de l'orbite du Soleil, et que la Lune tendait toujours à arriver un peu plutôt à la ligne d'intersection des deux plans. On représenta ces phénomènes en supposant que la Lune décrivait un cercle excentrique, en faisant mouvoir, chaque mois, la ligne des apsides de 3° vers l'orient, et en donnant à la ligne des nœuds un mouvement rétrograde sur l'écliptique.

Hipparque, qui vivait deux siècles avant J.-C., détermina, au moyen des éclipses et déjà avec beaucoup de précision, les durées des révolutions de la Lune relativement aux étoiles, au Soleil, à ses nœuds et à son apogée, et il aperçut des anomalies dans son mouvement aux quadratures. Ptolémée suivit leur marche, en détermina la loi et la valeur, et découvrit ainsi l'inégalité de près de $1°\frac{1}{3}$, que Bouillaud a nommée *évection*, et qui diminue l'équation du centre dans les syzygies. Ptolémée construisit des Tables des mouvemens de la Lune, en se servant, pour les représenter, de l'hypothèse des épicycles. On fit beaucoup d'autres Tables après lui, mais sans observer aucune inégalité nouvelle, jusqu'à Tycho-Brahé, né en 1546, qui, par la comparaison d'observations plus exactes, en découvrit une d'environ un demi-degré, qui est nulle dans les éclipses et les quadratures, et qui est à son *maximum* dans les octans; il la nomma *variation*. Il s'aperçut aussi que le mouvement rétrograde des nœuds est sujet à une inégalité de près de 2°, et que l'inclinaison de l'orbite en éprouve une autre beaucoup plus petite. Enfin Kepler, né en 1571, découvrit, en calculant les observations de Tycho, une inégalité d'environ 11′, dont la période est d'un an, et qu'il appela, d'après cela, *équation annuelle;* elle augmente l'équation du centre du Soleil dans les éclipses.

Jusqu'alors, et même depuis Copernic, on avait recouru aux épicycles de Ptolémée pour représenter les mouvemens de la Lune, et Tycho avait besoin de cinq cercles pour cela.

Lois de Kepler.

Kepler reconnut, après un grand nombre de recherches sur Mars, que l'orbite de cette planète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers, et que la planète se meut de manière que le rayon vecteur mené de son centre à celui du Soleil décrit des aires proportionnelles au temps. Il étendit ensuite ses résultats à toutes les planètes; il découvrit enfin, par des essais et après un grand nombre de tentatives, que les carrés des temps des révolutions des planètes sont entre eux comme les cubes de leurs grands axes; c'est la troisième loi qui porte son nom.

Il chercha aussi à déterminer, par des formules trigonométriques, l'angle que le rayon vecteur d'une planète fait avec la ligne des apsides, ou l'anomalie vraie, en fonction de l'anomalie moyenne ou de l'angle que décrirait par rapport à cette ligne un astre qui, partant et arrivant en même temps que la planète, se mouvrait uniformément dans une orbite circulaire. En effet, le temps de la révolution servant à trouver ce dernier angle par une simple proportion pour un instant quelconque, on réduisait ainsi la détermination du mouvement elliptique à celle du mouvement uniforme et circulaire. Kepler employa pour y parvenir un angle auxiliaire appelé l'*anomalie excentrique*, et il obtint les valeurs du rayon vecteur, de l'anomalie vraie et de l'anomalie moyenne, en fonction de cet angle. Mais cette dernière relation contenant à la fois l'anomalie excentrique et son sinus, ne pouvait être résolue rigoureusement en nombres; ce qui fit voir à Kepler que le problème de trouver l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne, qui depuis a porté son nom, ne pouvait être résolu que par approximation. (*Voyez* note 1.) Problème de Kepler.

On vit alors que l'équation du centre de la Lune tient à ce qu'au lieu de décrire un cercle, elle circule dans une orbite elliptique autour de la Terre comme foyer. C'est ce qu'Horroxius établit le premier, au rapport de Newton (*Prin.*, p. 461). Kepler conjectura que le Soleil devait exercer une attraction puissante sur la Lune et les planètes, et que c'était celle de la Lune sur la mer qui produisait le flux et le reflux. Galilée, né en 1564, avait établi les lois de la pesanteur terrestre, par ses belles expériences sur la chute des graves. On trouve aussi dans les ouvrages de Fermat, Hook et Hévelius, différens passages qui prouvent qu'à l'époque où ils vécurent, l'idée d'une action des corps de notre système les uns sur les autres occupait déjà les esprits, et qu'on songeait à remplacer par ces considérations le système des Tourbillons de Descartes, qui, malgré tout le génie de son illustre auteur, n'expliquait les principaux mouvemens que d'une manière vague et incomplète. Enfin la théorie des forces centrifuges dans le cercle, trouvée par Huyghens (né en 1629), et rapprochée de celle des développées du même auteur, conduisait immédiatement, comme le remarque d'Alembert, (Disc. prélim., p. 17) à la théorie générale des forces centrales. Idées sur l'attraction, antérieures à Newton.

Newton (né en 1642, l'année même de la mort de Galilée) arriva donc dans les circonstances les plus favorables au génie dont il était doué, pour démontrer, comme il le fit le premier, la cause générale de tous les mouvemens des corps célestes, et l'on sait que ce fut la Lune qui lui en fournit la première vérification. En effet, cet astre faisant sa révolution autour de la Terre en $27^j\,7^h\,43'\,\frac{1}{2}$, par rapport aux étoiles, l'arc qu'elle parcourt dans une minute de temps est de $32'',94$ sexagésimales. Or, en supposant la Lune attirée vers la Terre par la même force qui fait tomber les corps à sa surface, le sinus verse de cet arc devait exprimer l'espace que cet astre aurait parcouru dans la première *minute* de sa chute, par l'effet de cette attraction. Il le trouva de $15^{pi}\,1^l$; admettant ensuite que cette force croissait en raison inverse du carré des distances (ainsi que la troisième loi de Kepler le lui avait indiqué pour les planètes), et que les espaces parcourus sont proportionnels au carré du temps, il conclut de là que l'espace parcouru dans une *seconde*, à une distance 60 fois moindre, c'est-à-dire à la surface de la Terre, devait être aussi de $15^{pi}\,1^l$. L'accord de ce résultat, conclu du mouvement de la Lune, avec celui que Galilée avait trouvé long-temps auparavant par ses expériences directes sur la chute des corps à la surface de la Terre, lui montra l'identité des causes qui produisaient ces divers effets, Découverte de la gravitation universelle.



et cela devint plus évident encore en ayant égard aux très petites modifications que l'attraction du Soleil et la force centrifuge de la Terre devaient produire dans le résultat conclu, pour le rendre tout-à-fait comparable au résultat observé. Il démontra réciproquement qu'en admettant la loi de l'attraction en raison inverse du carré des distances, les aires doivent être proportionnelles au temps; que les orbites des planètes sont elliptiques; et la troisième loi de Kepler indiquant que l'attraction du Soleil agirait également sur toutes les planètes placées à la même distance de cet astre, lui montra que leurs poids sont proportionnels à leurs masses.

Ouvrage de Newton : *Des Principes.*

C'est du développement de toutes ces propriétés du mouvement elliptique, de celles des forces centrales et de celles du mouvement dans un milieu résistant, qu'il composa la première édition de ses *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, qu'il publia en 1687, à l'invitation de Halley. Le 3ᵉ livre de cet ouvrage contenait une application générale des théories précédentes au système du monde. Celle de la Lune ne parut qu'en 1702, dans l'*Astronomie* de Dav. Gregory. Newton l'inséra ensuite, en 1713, dans la seconde édition de ses *Principes*, et y fit quelques additions dans la troisième, qui parut en 1726.

Il serait peut-être plus facile de dire ce que Newton a laissé à faire à ses successeurs, que d'exposer tout ce qu'il a fait ou proposé de nouveau dans cet admirable ouvrage, dont l'analyse complète n'est pas de notre sujet. La méthode logique qu'il a constamment appliquée, et qui consiste à s'élever, par une suite d'inductions, des phénomènes aux causes, et à redescendre ensuite de ces causes à tous les détails des phénomènes, sera toujours la meilleure dans les sciences physiques. Sa méthode géométrique de présenter par la synthèse tous ses résultats, en employant des figures et des constructions au lieu de formules, a dû céder à l'analyse algébrique, dont les procédés sont à la fois plus simples, plus féconds et plus généraux; mais on peut observer cependant que si, comme il le paraît, l'emploi des substitutions successives était connu long-temps avant lui des astronomes, c'est à Newton qu'on doit du moins d'en avoir fait le premier une méthode analytique qu'il appliqua à la résolution des équations par approximation, et que les géomètres ont employée depuis presque exclusivement pour l'intégration des équations différentielles du mouvement.

Explication générale des principales inégalités de la Lune par l'attraction.

Avant de chercher à analyser la théorie de la Lune, de Newton, il n'est pas inutile peut-être de faire voir en peu de mots avec quelle facilité on peut, au moyen de l'attraction, donner une explication satisfaisante des inégalités que l'on avait reconnues depuis si long-temps dans le mouvement de cet astre, sans pouvoir en rendre raison. Si l'on conçoit en effet que tous les corps s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances, le mouvement de la Lune autour de la Terre devra être altéré par l'action des corps environnans, et particulièrement par celle du Soleil, qui est environ 400 fois plus éloigné de la Terre que la Lune, mais dont la masse est 337,000 fois plus grande que celle de la Terre. Et comme l'application d'une même force à la Terre et à la Lune changerait leur mouvement absolu, mais non leur mouvement relatif, on voit que ce sera seulement la différence positive ou négative entre l'attraction du Soleil sur la Lune et celle qu'il exerce sur la terre, qui troublera le mouvement de la Lune rapporté à la Terre considérée comme fixe. Cette différence étant la plus grande aux syzygies, c'est alors que l'action du Soleil tendra à éloigner le plus la Lune de la Terre. Mais comme

c'est l'accumulation de ces petits effets successifs qui produit les plus grandes inégalités, ce ne sera pas aux syzygies, mais aux quadratures, ainsi que nous le verrons plus loin, que la Lune se trouvera le plus éloignée de la Terre par l'action du Soleil (abstraction faite de l'excentricité de son orbite). Cette action produira sur la Lune une force dirigée du côté du Soleil, dans la moitié de l'orbite de la Lune qui en est le plus près, et dirigée en sens contraire dans l'autre moitié. Ainsi cette force agissant dans la direction du mouvement de la Lune quand elle ira des quadratures aux syzygies, tendra à l'accélérer, tandis qu'elle agira dans une direction contraire et tendra à retarder le mouvement de la Lune, quand celle-ci passera des syzygies aux quadratures.

Lorsque la Lune se trouvera à la quadrature qui précède la conjonction, son mouvement sera très lent, mais l'action du Soleil tendra à l'accélérer. Après avoir repris sa valeur moyenne, sa vitesse croîtra par degrés et sera la plus grande au moment de la conjonction; dès-lors l'action du Soleil tendra à la diminuer; mais, en vertu de l'accroissement acquis, c'est alors que le mouvement sera le plus accéléré, et que la longitude vraie sera le plus avancée; le *maximum* aura lieu 45° après la conjonction, au moment où la vitesse redeviendra moyenne. Les choses se passeront d'une manière analogue dans l'autre partie de l'orbite; ce qui explique la *variation*, qui est proportionnelle au sinus du double de la distance de la Lune au Soleil, et qui dépend de la composante de la force perturbatrice dirigée suivant la tangente à la trajectoire. Variation.

L'orbite de la Lune étant sensiblement elliptique, lorsque le grand axe se trouve sur la ligne des syzygies et l'apogée du côté du Soleil, la force centrale de la Terre sur la Lune, qui est la plus faible dans la syzygie apogée, reçoit la plus grande diminution; et la force centrale, qui est la plus forte dans la syzygie périgée, y reçoit la plus petite diminution; d'où il résulte que la différence des distances périgée et apogée, et par conséquent l'excentricité (qui en est la moitié) est beaucoup plus considérable dans ce cas que lorsque le grand axe est dans la ligne des quadratures. Telle est la cause de l'*évection*. Evection.

Enfin l'équation annuelle tient à l'ellipticité de l'orbite du Soleil. Quand il est périgée, son action, devenue plus puissante, dilate l'orbe de la Lune et retarde le mouvement de cet astre; mais cet orbe se contracte et le mouvement s'accélère à mesure que le Soleil s'avance vers son apogée, et il en résulte une inégalité semblable et de signe contraire à l'équation du centre du Soleil. Équation annuelle.

L'action moyenne du Soleil diminue l'action de la Terre sur la Lune, car la diminution de la force centrale dans les syzygies est plus grande que son augmentation dans les quadratures. Ainsi la Lune tendant à sortir de son orbite elliptique, met plus de temps à aller de l'apogée au périgée, que si elle fût restée sur cette orbite, ce qui revient à donner un mouvement direct à la ligne des apsides. Ce mouvement, essentiellement périodique, sera soumis à des inégalités dépendantes des lois de la diminution de la force centrale et liées à l'évection; il sera direct dans les syzygies, rétrograde dans les quadratures, et ce sera l'excès de celui-là sur celui-ci qui produira le mouvement annuel de l'apogée. Mouvement de l'apogée.

L'action du Soleil tend à sortir aussi la Lune du plan de son orbite, toutes les fois qu'elle ne se trouve pas dans l'écliptique, et ces deux plans se coupent suivant la ligne des nœuds; on voit que cette action tend à diminuer l'inclinaison quand la Lune s'élève au-dessus du plan de l'écliptique, et à l'augmenter quand la Lune se rapproche de ce plan, puisque le Soleil tend, dans ce dernier cas, à le lui faire traverser un peu Variation de l'inclinaison et mouvement des nœuds.



plutôt. Ce double effet contribuera également à donner aux nœuds un mouvement rétrograde, qui sera nul dans les syzygies, et à son *maximum* dans les quadratures.

Il pourra arriver cependant, quand les nœuds seront dans les octans, par exemple, que l'action du Soleil tende à augmenter l'inclinaison, quoique la Lune s'éloigne de l'écliptique, et à la diminuer, quoiqu'elle s'en rapproche. Cela aura lieu lorsque la Lune étant près d'arriver à son nœud, le Soleil agira dans la direction de son mouvement, et cela produira une diminution dans la rétrogradation des nœuds.

Action moy. du Soleil.

Quant au rapport de la force principale de la Terre sur la Lune à la diminution que l'action du Soleil y produit, on démontre (*voyez* note 4) qu'il est à peu près égal à la moitié du carré du rapport des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil autour de la Terre; et comme les observations indiquent que le mouvement de la Lune est environ 13,4 fois plus rapide que celui du Soleil, on en conclut que la force principale est à peu près 358 fois plus grande que la force perturbatrice qui tend à la diminuer. « En » vertu de cette diminution (*Syst. M.*, t. II, p. 73), la Lune est soutenue à une plus » grande distance de la Terre que si elle était abandonnée à l'action entière de sa » pesanteur; le secteur décrit par son rayon vecteur autour de la Terre n'en est point » altéré, puisque la force qui la produit est dirigée suivant ce rayon. Mais la vitesse » réelle et le mouvement angulaire de cet astre sont diminués; et il est facile de prouver » (*voy.* note 4) qu'en éloignant la Lune de manière que sa force centrifuge soit égale » à sa pesanteur diminuée par l'action du Soleil, et que son rayon vecteur décrive un » secteur égal à celui qu'il eût décrit dans le même temps sans cette action, ce rayon » sera augmenté de sa 358ᵉ partie, et le mouvement angulaire sera diminué d'un 179ᵉ. »

Analyse de la théorie de la Lune, de Newton.

C'est dans la discussion et l'appréciation de tous les effets isolés de l'attraction réciproque de la Terre, de la Lune et du Soleil, que consiste la théorie de la Lune, de Newton, où l'on peut distinguer deux buts principaux, celui d'expliquer toutes les inégalités déjà connues en en fixant la valeur, et celui d'en démêler de nouvelles.

Prop. du liv. Ier, des *Principes*, sur le mouvem. des apsides.

Le livre Ier des *Principes*, qui traite *du mouvement des corps*, contient trois propositions, les 43ᵉ, 44ᵉ et 45ᵉ, sur le mouvement des corps dans des orbites mobiles et sur le mouvement des apsides. Newton y fait usage des séries convergentes et de la méthode des premières et dernières raisons. Il démontre qu'en représentant par n le rapport de la révolution périodique du mobile à sa révolution anomalistique (ou à son retour à la même apside), et par A le rayon vecteur de l'orbite, A^{nn-3} sera l'expression de la force centrale correspondante. Ainsi quand celle-ci décroîtra dans un rapport moindre que le carré des distances, n devra être plus grand que 1, et le mouvement des apsides sera par conséquent rétrograde; tandis que lorsque la force décroîtra dans un rapport plus grand (ce qui est le cas de la Lune troublée par le Soleil), n sera plus petit que 1, et le mouvement des apsides sera direct. Connaissant la force centrale, on peut donc déterminer le mouvement des apsides, et réciproquement. Il examine les trois cas où la force centripète est uniforme, proportionnelle à une certaine puissance du rayon ou à une fonction de ces puissances. Il cherche quelle est la loi de la force centrale pour un mouvement de 3° par révolution, et il la trouve représentée par $\frac{1}{A^{2,016}}$, ce qui s'approche beaucoup plus de la loi de l'inverse du carré que de celle de l'inverse du cube. Dans le coroll. 2 de la prop. 45, il fait voir que si l'on retranche de la force centripète $\frac{1}{A^2}$ qui fait décrire

une ellipse, une force $C = \frac{100}{35745} A$, la formule $180° \sqrt{\frac{1 - C}{1 - 4C}}$ donnera 180° 45′ 44″ pour la demi-révolution anomalistique, ce qui indique un mouvement de 1° 31′ 28″ pour la ligne des apsides au bout d'une révolution, et il remarque que le mouvement des apsides de la Lune est environ deux fois plus grand. Clairaut a voulu croire (*Mém.* Par., 1745, p. 353) que Newton n'avait pas entendu faire une application au mouvement de l'apogée lunaire par cet exemple; il semblerait cependant que c'était là son intention, puisqu'il a représenté par C l'effet moyen du Soleil sur la Lune, et qu'il regardait bien cet effet comme à peu près proportionnel à la distance de la Lune à la Terre, ainsi qu'on le voit prop. 66, cor. 7.

Prop. du liv. Ier, relatives à l'attraction mutuelle de 3 corps.

Les prop. 66 — 69 contenues dans la 11e sect. du liv. Ier, renferment le premier essai qu'on ait fait pour appliquer le système de l'attraction au mouvement de trois corps. L'objet du 1er théorème est de prouver que si trois corps inégaux s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances, et si l'on considère d'abord séparément l'action des deux plus petits, en supposant qu'ils tournent autour du plus grand, le corps intermédiaire décrira autour du corps principal, comme foyer, des aires qui seront plus près d'être proportionnelles au temps, et une orbite plus sensiblement elliptique, si le corps central est en effet, comme on le suppose, soumis à l'attraction des deux autres, que dans le cas où il ne le serait pas ou le serait suivant une loi différente.

Pour le démontrer, Newton suppose d'abord les trois corps dans le même plan. Il décompose l'attraction du corps extérieur sur le corps intermédiaire en deux composantes; l'une, dirigée parallèlement à la distance de celui-ci au corps central, ne change pas la loi des aires, mais déforme l'ellipse en rendant la loi de la force centrale différente de celle de l'inverse du carré des distances; l'autre composante, dirigée suivant la ligne qui va du corps central au corps extérieur, change à la fois la proportionnalité des aires au temps et la nature de l'orbite (celle-ci par une double raison). Mais si le corps central est également soumis à l'action du corps extérieur, ce ne sera plus que la différence entre cette action et la seconde composante, qui produira une force troublante dans cette direction. Ainsi plus cette différence sera petite, plus l'ellipticité sera approchée, et elle le sera le plus possible quand l'attraction qu'éprouve le corps central, suivant la même loi que celle du corps intermédiaire, sera égale à la moyenne de toutes celles qu'éprouve celui-ci dans sa révolution autour de celui-là. Le même procédé conduit à une conclusion semblable dans le cas où les trois corps ne sont pas dans le même plan.

C'est dans les 22 corollaires qui découlent de ce théorème que Newton analyse, d'une manière générale, détaillée et simple, quoique délicate, tous les effets divers qui résultent de l'attraction réciproque de trois corps sur le mouvement du corps troublé, sur la grandeur et sur la position de son orbite, suivant les diverses configurations que les corps présentent les uns par rapport aux autres; il examine séparément les variations de toute espèce qui en résultent dans chaque élément, et cherche à suivre toutes les circonstances qui en produisent de différentes. Il remarque, cor. 13, que ses conclusions étant indépendantes de la grandeur du corps extérieur, s'appliquent aussi au cas où les deux autres tournent autour de lui, et il a égard, dans les derniers corollaires, à la figure et à la fluidité de la surface du corps central. Il cherche à prouver, dans la prop. 67, que le corps extérieur (supposé plus petit que le corps central) décrit autour du centre de gravité des deux

intérieurs, comme foyer, une orbite plus sensiblement elliptique et des aires qui sont plus près d'être proportionnelles au temps, qu'autour du corps central; et dans la prop. 68, que cela a lieu plus exactement aussi quand celui-ci est soumis aux attractions des autres, suivant la même loi; enfin il prouve, dans la prop. 69, que les forces absolues de deux corps l'un sur l'autre, sont entre elles comme leurs masses; d'où il est naturellement conduit à observer l'analogie qui existe entre les forces centripètes et les corps d'où elles émanent : c'est alors qu'il définit l'attraction, *l'effort quelconque des corps pour s'approcher les uns des autres.*

Analyse de la théorie de la Lune renfermée dans le troisième livre des *Principes*.

C'est dans le livre 3e des *Principes*, qui traite du *système du monde*, que Newton fait l'application de tout ce qu'il a établi dans le premier, et consacre onze prop. (25 — 35) à la discussion approfondie des inégalités de la Lune, et à la recherche de leurs valeurs numériques.

Forces perturbatrices.

Dans la prop. 25, il cherche les forces provenant du Soleil, qui troublent les mouvemens de la Lune. Il représente la force du Soleil sur la Terre par la droite qui les joint, et décompose l'action du Soleil sur la Lune, dans le mouvement relatif de celle-ci, en deux forces; l'une, suivant la direction du rayon vecteur de la Lune, est à la force centripète de la Terre sur la Lune, d'après la théorie des forces centrales, dans le rapport des carrés des temps périodiques, ou comme 1 : 178,725; ce qui lui donne son rapport à la gravité qui agit à la surface de la Terre; l'autre, dirigée parallèlement à la ligne qui joint le Soleil et la Terre, est représentée par une ligne qui est le triple de la différence des distances de la Terre et de la Lune au Soleil. Dans les syzygies, cette deuxième force est triple de la première; ainsi elle est à la force principale = 1 : 59,57, et la force solaire qui se compose alors de la différence des deux, est double de la première (*voy.* note 4).

Variation de l'aire décrite.

Dans la prop. 26, il s'occupe de la variation (due à l'action du Soleil), de l'aire que décrit le rayon vecteur mené de la Terre à la Lune. Pour plus de simplicité, il suppose l'orbite de la Lune circulaire, et les lignes qui joignent la Terre et la Lune au Soleil, parallèles. Il décompose la résultante des forces suivant la tangente à la trajectoire, pour obtenir la composante qui tend à accélérer le mouvement de la Lune; il montre que cette composante est à la force parallèle au rayon vecteur, dans le rapport de 3 à 2 dans les octans (*voy.* n. 4); elle est donc les $\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{1787}$ ou les $\frac{100}{11915}$ de la force centripète de la Terre sur la Lune, et ce rapport représente l'accroissement horaire moyen de la vitesse ou de l'aire décrite; mais comme le Soleil se meut en même temps que la Lune, cet accroissement doit être augmenté dans le rapport des révolutions synodiques et périodiques de la Lune; il devient alors $2x = \frac{100}{11023}$; la plus grande aire décrite, qui correspond aux syzygies, est alors $1 + x$; la plus petite, qui correspond aux quadratures, est $1 - x$; ce qui montre que la variation élémentaire de l'aire, dans la quadrature, est à cette même variation dans la syzygie = 10973 : 11073. Il trouve que l'excès de la variation dans un point intermédiaire sur cette variation dans la quadrature, est proportionnel au carré du sinus de la distance angulaire de ce point à la quadrature.

Dans la prop. 27, il indique comment on peut trouver la distance de la Lune à la Terre, par son mouvement horaire, au moyen de la relation qui exprime que l'aire est égale au produit du mouvement horaire par le carré du rayon; car on voit par là que ce rayon est égal à la racine carrée du quotient de l'aire par le mouvement horaire. Il propose aux

astronomes d'en tirer le *diamètre apparent* de la Lune, et de voir comment cette règle s'accorderait avec les observations.

Variation des diamètres de l'orbite.

Dans la prop. 28, il cherche la différence que l'action du Soleil produit dans les diamètres de l'orbite décrite par la Lune, en faisant d'ailleurs abstraction de son excentricité. Comme la courbure de la trajectoire, dans le cas où le mobile est soumis à une force perpendiculaire à la direction de l'élément qu'il parcourt, est en raison directe de l'attraction et en raison inverse du carré de la vitesse, les valeurs précédentes lui donnent le moyen de trouver le rapport de la courbure de l'orbite lunaire, dans les quadratures, à cette même courbure dans les syzygies. Il cherche ensuite le rapport de ces courbures, en supposant que la Lune décrive une ellipse mobile, et trouve, par une méthode qui présente quelques difficultés, que la distance de la Lune à la Terre, dans les syzygies, est à sa distance dans les quadratures (sans avoir égard à l'excentricité de l'orbite de la Lune) comme 69 est à 70.

Variation.

La prop. 29 traite de la Variation de la Lune : elle provient, soit de la forme elliptique de son orbite, soit de l'inégalité des aires décrites par son rayon vecteur. Newton détermine par là son *maximum* à 32′ 32″. Mais le mouvement réel de la Terre, qui donne au Soleil un mouvement progressif apparent, fait que la Lune doit décrire un arc de plus de 90° depuis le moment des quadratures, pour être en conjonction ou en opposition avec le Soleil : positions qu'elle n'atteint que lorsque l'angle qu'elle a décrit est à l'angle droit dans le rapport de ses révolutions synodique et périodique. Tous les angles sont dilatés par là dans le même rapport, ce qui porte la variation à 35′ 10″ dans les moyennes distances du Soleil à la Terre. Elle varie encore par l'effet de l'ellipticité de l'orbite solaire, dans le rapport du carré du temps de la révolution synodique de la Lune divisé par le cube de la distance du Soleil à la Terre ; ce qui porte son *maximum* à 37′ 11″ au moment où le Soleil est à son périgée. Newton n'a pas égard, dans cette détermination, à l'excentricité de l'orbite lunaire, dont il laisse aux astronomes à évaluer l'effet sur cette inégalité, et il se borne à supposer que la Lune placée aux octans est toujours dans ses moyennes distances.

Mouvement horaire des nœuds.

La prop. 30 est consacrée à la recherche du mouvement horaire des nœuds de la Lune dans une orbite circulaire. Il démontre facilement que leur vitesse est proportionnelle au produit des sinus des distances angulaires de la Lune et du Soleil au nœud, et de la Lune à la quadrature. Quand les nœuds sont dans les quadratures et la Lune dans les syzygies, ce produit est égal à l'unité ; alors l'angle des nœuds est égal à l'angle de *déflexion* de la Lune, ou à l'angle décrit dans l'élément du temps (en supposant que la gravité terrestre vînt à cesser), qui exprime son écart de la ligne droite, par l'effet de la composante de l'attraction solaire parallèle à la distance de la Terre au Soleil : le mouvement des nœuds sera donc alors au mouvement de la Lune dans le rapport de cette force à la principale, ou :: 1 : 59,575, ainsi que nous l'avons vu ; ce qui donne, pour un moyen mouvement horaire lunaire de 32′ 56″27‴, un mouvement horaire du nœud de 33″ 10‴ 33ⁱᵛ..., quand les nœuds sont [redacted] les quadratures. Il démontre qu'en général, quand les nœuds sont hors des quadrat[redacted] Lune hors des syzygies, le mouvement horaire du nœud est égal à la moitié [redacted]vement horaire précédent qui a lieu dans les syzygies de la Lune, ou à 16″ 35‴ 16ⁱᵛ...., multipliée par le carré du sinus de la distance de la syzygie au nœud.



Dans la prop. 31, il s'occupe du mouvement horaire des nœuds de la Lune dans une orbite elliptique. Il prouve que ce mouvement est proportionnel au produit de l'aire comprise entre l'élément de l'ellipse et la ligne des nœuds par le carré du sinus de la distance du nœud à la syzygie ; et comme il avait trouvé une relation analogue entre le mouvement des nœuds et l'aire dans un cercle, il en conclut que le mouvement moyen horaire des nœuds dans l'ellipse est à ce mouvement dans le cercle, comme l'ellipse est au cercle, ou comme 69 : 70 ; ce qui donne $16''\,21'''$ pour le *maximum* du mouvement cherché, en supposant les aires décrites proportionnelles au temps. Cette valeur est modifiée par les accroissemens que prend la vitesse ou l'aire décrite, par l'effet de la force perturbatrice. Nous avons vu que l'élément de cette vitesse à son *maximum* dans les syzygies, est à sa valeur moyenne dans les octans, comme 11073 est à 11023. Les temps sont en raison inverse de ces vitesses, et les mouvemens correspondans de la ligne des nœuds sont comme les carrés de ces temps. On aura donc

mouv. des nœuds dans la syz., ou m' : mouv. moy. des nœuds, ou m :: $\overline{11023}^2 : \overline{11073}^2$;

d'où $$m - m' : m = \overline{11073}^2 - \overline{11023}^2 : \overline{11073}^2 = 99{,}79 : 11073 ;$$

d'où l'on voit que la diminution du mouvement des nœuds dans la syzygie est au mouvement moyen, dans le rapport de 100 à 11073 à très peu de chose près. Ce décroissement aux syzygies est donc de $17'''\,43^{iv}$...., dont il prouve qu'il faut retrancher le $\frac{1}{4}$ du mouvement horaire moyen $16''\,21'''$, pour avoir le mouvement corrigé $16''\,16'''\,37^{iv}$ dans son *maximum*.

Mouvem. annuel des nœuds.

Newton évalue le mouvement moyen annuel des nœuds, dans la prop. 32, en prenant la somme des mouvemens moyens horaires, ou en multipliant $16''\,16'''\,37^{iv}$ par $365^j\,6^h\,9'$, valeur de l'année sidérale, et divisant ce produit par 2 ; il obtient ainsi 19° 49′ 3″. Cette expression s'applique au cas où l'on suppose que le Soleil, au bout d'une année révolue, revient au nœud d'où il était parti ; mais à cause du mouvement du nœud, le Soleil doit y revenir plutôt et avant d'avoir achevé sa révolution, ce qui doit produire une diminution dans le mouvement des nœuds. Il trouve en effet, par des méthodes qui dépendent de la considération des aires et du développement de leurs valeurs au moyen des séries infinies, que le mouvement total du nœud par rapport aux étoiles entre deux de ses conjonctions avec le Soleil, est de 18° 19′ 5″ ; l'excès de 360° sur ce nombre, donne 341° 40′ 54″ pour le mouvement du Soleil entre ces mêmes conjonctions, d'où il tire 19° 18′ 1″ pour le mouvement moyen des nœuds dans l'année sidérale, ou dans l'intervalle pendant lequel le Soleil parcourt 360°. Il observe que la différence entre ce résultat et celui que donnent les observations, est plus petite que la 300e partie du mouvement total, et qu'elle paraît venir de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire. La première accélère trop le mouvement des nœuds, tandis que la seconde tend à son tour à le retarder un peu, et à le ramener à sa vitesse véritable.

Mouvem. vrai des nœuds.

Dans la prop. 33, il cherche le mouvement vrai des nœuds de la Lune ; mais à cause de la trop grande difficulté du calcul (probablement due au [illegible]de convergence de la série qu'il emploie), il se borne à donner, sans démonstration, [illegible] construction géométrique de ce problème, et s'en sert pour trouver l'angle qu'il faut ajouter ou retrancher du mouvement moyen, suivant que les nœuds passent des quadratures aux syzygies, ou des syzygies aux quadratures, pour avoir le mouvement vrai des nœuds. Il désigne cet

angle par le nom d'*æquatio semestris motûs nodorum* : il est de 1° 30′ dans les octans; ce qui est conforme aux observations. Il remarque aussi une autre équation qu'il appelle *menstrua;* mais elle ne lui paraît pas nécessaire à la recherche de la latitude de la Lune, parce que la variation de l'inclinaison de l'orbite éprouve aussi une inégalité analogue qui compense et corrige la première, de manière qu'on peut les négliger toutes deux.

Variation horaire de l'inclinaison de l'orbite.

A la suite de cette proposition, Newton insère la méthode de Machin pour déterminer le mouvement des nœuds. Il cherche ensuite (prop. 34) la variation horaire de l'inclinaison de l'orbite lunaire au plan de l'écliptique. Elle est exprimée dans l'orbite circulaire par le mouvement des nœuds multiplié par le sinus de l'inclinaison; et dans l'orbite elliptique, par ce produit multiplié par le rapport du petit axe au grand axe. De là il parvient (cor. 4) à une autre expression quand les nœuds sont dans les quadratures, savoir, 33″ 10‴ (valeur du *maximum* de l'angle horaire des nœuds), multiplié par le produit des sinus de l'inclinaison et de la double distance de la Lune aux quadratures, divisé par le diamètre de l'orbite. L'inclinaison est donc soumise, dans le temps du passage de la Lune de la quadrature à la syzygie (les nœuds étant dans les quadratures), à une variation totale de 2′ 43″, produite par la somme des angles horaires multipliée par le sinus de l'inclinaison, et par le rapport du diamètre à la circonférence.

Détermination de l'inclinaison.

La prop. 35 a pour objet la recherche de la valeur de l'inclinaison de l'orbite lunaire au plan de l'écliptique, dans un temps donné; il la détermine au moyen d'une construction géométrique qu'il démontre. Il trouve 16′ 23″ ½ pour la variation totale de l'inclinaison la plus grande, en faisant abstraction de la position qu'occupe la Lune dans son orbite. Si les nœuds sont dans les syzygies, l'inclinaison n'est point changée par les positions diverses de la Lune; mais s'ils sont dans les quadratures, il faut diminuer de 1′ 21″ ½ (ou de la moitié de l'excès trouvé précédemment), la variation totale moyenne quand la Lune est dans les quadratures, et l'augmenter de la même quantité quand elle est dans les syzygies.

Scholie final.

Enfin nous arrivons au scholie qui termine la théorie de la Lune, de Newton. « J'ai » voulu, dit-il, par les déterminations précédentes des mouvemens lunaires, montrer » comment on peut y parvenir au moyen de la cause qui les produit. » Il annonce ensuite avoir trouvé plusieurs autres équations, sans exposer les méthodes par lesquelles il y est arrivé. Il dit d'abord avoir reconnu que l'*équation annuelle* du mouvement moyen, vient de ce que l'action du Soleil varie suivant la position que la Terre occupe dans son orbite elliptique, et l'avoir trouvée de 11′ 50″ dans les moyennes distances du Soleil à la Terre. Il fait encore mention de deux équations annuelles du mouvement des nœuds et de l'apogée, provenant de ce que leur mouvement est plus rapide dans le périhélie de la Terre qu'à son aphélie, en raison inverse du cube de la distance de la Terre au Soleil. Il trouve la première de 9′ 24″, la seconde de 19′ 43″, en se fondant sur deux raisonnemens qui ne paraissaient pas satisfaisans à d'Alembert, et qui, lorsqu'ils seraient vrais, ne devraient pas, dit-il, être énoncés comme des axiomes.

La théorie de la gravité lui donne encore deux autres équations pour le moyen mouvement lunaire, venant de ce que l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus grande et l'orbite un peu plus dilatée, quand le grand axe de l'orbite lunaire ou la ligne des nœuds passe par le Soleil que lorsqu'ils en sont éloignés d'un angle droit. La première circonstance produit une équation qu'il appelle *semestris*, qui dépend de la distance angulaire de



l'apogée de la Lune au Soleil, qui est la plus grande quand elle est de 45°, et monte alors à 3′ 45″ dans la moyenne distance du Soleil à la Terre, autant, dit-il, qu'il a pu le conclure des observations. La seconde circonstance produit l'équation *semestris secunda,* qui dépend du sinus de la double distance du Soleil au nœud, et qui monte à 47″ dans son *maximum* aux octans, dans la moyenne distance du Soleil à la Terre : ces deux équations varient dans le rapport inverse du cube de la distance du Soleil à la Terre.

Enfin la théorie lui a indiqué que l'apogée de la Lune doit avancer beaucoup quand il est en conjonction ou en opposition avec le Soleil, et reculer quand il est en quadrature, et que l'excentricité, qui est la plus grande dans le premier cas, est la plus petite dans le second : ces inégalités sont très grandes. L'équation *semestre* de l'apogée, qui en résulte, est d'environ 12° 18′ à son *maximum*, et il se borne à la déduire des observations. C'est par cette inégalité qu'il exprime l'*évection*. Il emploie, pour la représenter, la construction d'Horroxius et de Halley, qui consistait à placer le centre de l'ellipse lunaire sur un épicycle dont le rayon était le sinus de l'équation principale de 12° 18′. La distance de son centre à la Terre exprimait l'excentricité moyenne de la Lune 0,055; et en prenant sur ce cercle un arc égal au double de l'argument annuel, ou de la distance entre le Soleil et l'apogée de la Lune, l'angle formé par les lignes menées du centre de la Terre à l'extrémité de cet arc et à la Lune, représentait l'équation de l'apogée, et le premier de ces côtés, l'excentricité actuelle de l'orbite lunaire. Newton suppose seulement de plus, que la Lune tourne sur un autre petit cercle dont le centre se meut sur l'épicycle, afin d'exprimer que le centre de l'orbite lunaire se meut plus vite au périhélie de la Terre qu'à l'aphélie, dans le rapport inverse du cube de la distance de la Terre au Soleil.

Résumé de la théorie de la Lune, de Newton.

Nous venons de voir Newton exposer, le premier, la véritable cause des inégalités de la Lune déjà connues, en calculer la valeur, et, guidé par la théorie, y ajouter six équations nouvelles, qui n'auraient pu que difficilement, vu leur petitesse, être découvertes par la seule observation (*). On doit admirer à la fois le génie et le bonheur de celui qui, démêlant tous ces effets si compliqués et si variés, les déduit tous très naturellement d'une seule loi. On est frappé en lisant cette partie de l'ouvrage des *Principes*, de l'admirable concision de l'auteur, qui ne laisse aucun espoir de pouvoir rendre ce qu'il exprime plus exactement et plus brièvement. Sa marche est aussi remarquable par la manière dont tout se suit et s'enchaîne dans l'ordre le plus naturel, en allant du simple au composé. Le plus souvent il commence par chercher la valeur du *maximum* de l'effet instantané de chaque inégalité dans le cas le plus simple; il montre ensuite d'après quelle loi ou quel rapport elle varie; il la suit dans toutes les circonstances diverses qui se présentent; puis les embrassant toutes à la fois, il parvient à sa valeur moyenne annuelle, en ayant égard à toutes les causes qui peuvent la modifier. Cette gradation est en particulier bien marquée dans les propositions sur le mouvement des nœuds; et la difficulté que présente encore la théorie de la Lune, aujourd'hui où l'on peut profiter de

---

(*) C'est ce qui inspirait à Halley, élégant poëte comme grand astronome, ces vers à la louange de Newton :

Discimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur, cur subdita nulli
Hactenus astronomo, numerorum fræna recuset,
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.

tant de travaux et de tant de méthodes plus parfaites, relève bien la gloire de celui qui l'a ébauchée le premier, lorsque tout y était à faire.

Les Tables que Halley, Flamsteed, Dunthorn, Cassini et beaucoup d'autres construisirent d'après les données de Newton, surpassèrent toutes les précédentes en exactitude. Il s'en fallait beaucoup cependant que sa Théorie de la Lune fût parfaite, et qu'il l'eut amenée au même degré où il avait porté d'autres parties de son traité des *Principes*. Clairaut lui reproche de *supposer* quelquefois des choses plus difficiles à entendre que celles qu'il explique. « On ne saurait aussi s'empêcher d'avouer, dit-il (*Mém. de Par.*, 1745, p. 329), » que la manière dont il a exposé ses découvertes a dû retarder l'utilité qu'on en pouvait » retirer. Je ne parle point ici de l'art avec lequel il avait caché sa méthode des fluxions, » la clef de toutes ses savantes recherches, parce que cette méthode, après lui avoir été » arrachée, est devenue si familière, qu'on a oublié tout le tort qu'il avait eu de ne pas » la communiquer. Mais je veux parler de son usage d'employer, dans la plupart des » endroits difficiles, un trop petit nombre de paroles à expliquer ses principes, tandis » qu'il paraît se livrer avec complaisance aux détails et aux vérités de calcul plus faciles » à démontrer. » Jugement qu'en ont porté Clairaut et d'Alembert.

D'Alembert qui a fait, dans le Discours préliminaire de ses Recherches, une analyse rapide de la théorie de Newton, convient que la variation, le mouvement annuel des nœuds, la principale inégalité de ce mouvement et la variation de l'inclinaison, sont déterminés par des calculs faits avec beaucoup de clarté et de précision. Mais il l'accuse de supposer, sans démonstration, que l'orbite de la Lune est à peu près une ellipse dont il néglige même l'excentricité. Il élève quelques doutes sur la rigueur des suppositions dont il s'est servi dans les propositions qu'il n'a pas démontrées. Il ajoute cependant : « La philo» sophie naturelle a tant d'obligations à ce grand homme, et il a montré tant de génie et » de sagacité dans les choses même où il a été le moins heureux, que nous ne devons » point cesser de l'admirer et de le regarder comme notre maître..... C'est le sort des » pensées d'un grand homme, d'être fécondes non-seulement entre ses mains, mais dans » celles des autres; et il y a peut-être plus loin du point d'où il est parti à celui où il » est parvenu, que du point où il en est resté à celui auquel nous pouvons maintenant » atteindre. »

Plus d'un demi-siècle s'écoula sans qu'on ajoutât rien d'important à la théorie de la Lune. De nombreux ouvrages parurent cependant pour exposer et commenter celle de Newton; tel fut celui de Pemberton (*A view of Newton's Philosophy*, 1728); celui de Machin, intitulé : *The laws of the moon's motions*, qui parut en 1729. Leadbetter publia une *Uranoscopia* en 1735, et un ouvrage intitulé : *A complete System of Astronomy*, en 1738; enfin le Commentaire des PP. Le Seur et Jacquier parut à Genève en 1739—1742. Ceux-ci s'adjoignirent dans ce travail, et chargèrent du soin d'en surveiller l'impression, *J.-L. Calandrini*, professeur de l'Académie de Genève, dont les notes, marquées d'un astérisque, sont les meilleures de l'ouvrage. C'est sur la théorie de la Lune qu'il a fait les plus nombreuses additions. Clairaut le cite avec éloge, et d'Alembert reconnaît (Disc. prélim., p. 40) « qu'il a montré beaucoup de sagacité et de connaissances, et que cet habile » commentateur est le premier qui ait entrepris, depuis Newton, de résoudre la question » du mouvement de l'apogée. » On le voit en effet, à la suite du Commentaire, chercher à reprendre lui-même toute la question et à parvenir directement, au moyen des Commentateurs de l'Ouvrage des *Principes*.



considérations géométriques, des suites et du calcul différentiel, à la détermination de l'accroissement du mouvement moyen, de l'équation annuelle et de toutes les petites inégalités que Newton n'avait pas démontrées. Il expose la méthode de ce dernier pour le calcul des apsides, et annonce que la théorie lui donne bien les mêmes lois. « Mais il » faut avouer, dit-il, que la quantité du mouvement absolu trouvée ainsi, n'est qu'environ » la moitié de celle que donnent les observations. » Il expose alors une méthode qui lui est propre, et par laquelle il arrrive à trouver une quantité même un peu plus grande que le mouvement observé. D'Alembert l'accuse d'avoir négligé, dans ce calcul, deux circonstances essentielles, la variation de l'excentricité et la force perpendiculaire au rayon vecteur; il ne l'annonce cependant qu'avec quelque réserve, et la complication de cette méthode l'a peut-être empêché de la suivre jusqu'au bout, et de rendre à son auteur toute la justice qu'il méritait.

Mémoire de Clairaut sur quelques propositions de l'ouvrage de Newton.

Dès l'année 1743, Clairaut avait lu à l'Académie des Sciences un Mémoire sur la théorie de la Lune, dans le but de simplifier quelques propositions de Newton, en les traduisant en analyse. Après être parvenu, au moyen d'une construction géométrique compliquée, à la véritable expression des forces du Soleil, il y donne la valeur du rayon de la développée de l'orbite de la Lune, en supposant son excentricité nulle. Il relève à ce sujet une erreur contenue dans l'ouvrage de Machin; il trouve une expression analytique de la variation qui s'accorde avec celle de Newton, et il donne à peu près la même méthode que lui pour trouver le mouvement des nœuds, en démontrant les deux théorèmes de Machin sur leur vitesse, insérés dans les *Principes*.

1res Tables de la Lune, d'Euler.

Euler publia à Berlin, en 1744, l'ouvrage intitulé : *Theoria motuum planetarum et cometarum continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas determinandi*, où il indique la méthode de trouver l'orbite d'une comète au moyen de trois observations; mais la théorie de l'attraction n'entre pour rien dans cet ouvrage. En 1746 il fit paraître, dans ses *Opuscules*, des Tables de la Lune dressées en partie sur la théorie, et où il employa le premier, au lieu de la construction compliquée où l'on supposait le mouvement de l'apogée et l'excentricité variables, le véritable argument de l'évection, c'est-à-dire le sinus du double de la distance de la Lune au Soleil, moins la distance de la Lune à son périgée. Ces Tables furent aussi insérées dans l'Almanach de Berlin de 1750; elles étaient fondées sur des calculs plus exacts, mais sans être non plus accompagnées de la théorie qui avait servi à les construire. Il y regarde l'excentricité comme constante; il calcule et expose séparément toutes les équations de la Lune, et emploie l'anomalie excentrique pour déterminer le lieu de la Lune dans l'ellipse constante.

Progrès des sciences mathématiques depuis Newton.

Plusieurs ouvrages remarquables avaient, depuis quelque temps, fait faire de grands pas aux sciences mathématiques. Euler, dans sa *Mécanique*, publiée en 1736, avait appliqué l'Analyse à la science du mouvement; il avait intégré les équations linéaires du second ordre dans sa pièce de 1740 sur le flux et le reflux.

L'année 1743 avait vu naître le bel ouvrage de Clairaut sur la figure de la Terre, et la *Dynamique* de d'Alembert, non moins remarquable. Dès 1742, Maclaurin avait, dans son *Traité des Fluxions*, substitué aux formules des forces tangentielles et des forces normales, la décomposition des forces suivant trois axes rectangulaires, que sa simplicité a fait ensuite généralement adopter. Euler avait perfectionné la Trigonométrie, en y introduisant ces transformations, ces analogies et ces réductions faciles et fécondes, qui permettent de présenter dans chaque cas les formules sous la forme la plus commode.

Enfin, ce fut à peu près à cette époque que les Académies, en proposant des prix sur des questions d'Astronomie physique, n'accueillirent plus que les pièces fondées sur la théorie de l'attraction. Contribuant déjà essentiellement, par le concours des lumières et des travaux de chacun de leurs membres, au progrès des sciences, elles leur sacrifièrent en quelque sorte l'intérêt de leur propre gloire, en provoquant les recherches des savans étrangers et en couronnant leurs succès. Des jugemens impartiaux, des récompenses à la fois solides et glorieuses, excitèrent une noble émulation, vinrent au secours du talent dans le besoin, dirigèrent les travaux vers les points essentiels, et servirent comme d'un stimulant presque nécessaire à des recherches dont la difficulté devait s'accroître de plus en plus.

Après un certain nombre d'années de repos et de réflexions, nécessaires peut-être au monde savant pour comprendre et approfondir les ouvrages d'un grand maître, nous allons voir naître tout-à-coup plusieurs travaux importans et simultanés sur les effets de l'attraction réciproque des corps célestes dont il importe le plus de connaître les mouvemens; l'époque est arrivée où les esprits, mûrs en quelque sorte pour les découvertes, se rencontreront sur les mêmes routes, où les géomètres se partageront la gloire sans se l'enlever.

CHAPITRE II.

Théorie de la Lune de Clairaut. Mouvement de l'apogée de la Lune.

Mémoire de Clairaut lu à l'Académie en 1747.

CLAIRAUT après avoir, depuis le 7 janvier au 6 septembre 1747, remis successivement au secrétaire de l'Académie des Sciences, divers morceaux sur le problème des trois corps (qui ont paru textuellement ensuite dans les nos de novembre, décembre 1760, et janvier 1761 du *Journ. des Sav.*), lut à l'assemblée publique du 15 novembre 1747, un discours dans lequel il expose en ces termes la marche de ses idées sur ce sujet : « Après avoir examiné » long-temps la théorie de M. Newton sans en tirer la conviction que j'attendais, je me » suis déterminé à ne plus rien emprunter de lui, et à chercher directement la détermina- » tion des mouvemens célestes d'après la supposition de l'attraction mutuelle. Il fallait » pour y parvenir commencer par ce problème : *Trois corps étant donnés avec leurs po-* » *sitions, leurs masses et leurs vitesses, trouver les courbes qu'ils doivent décrire par leur* » *attraction supposée proportionnelle à leurs masses, et en raison inverse du carré des* » *distances*. Bien des géomètres avaient senti qu'on ne pouvait arriver à rien de satisfaisant » et de général, dans le système du monde, qu'on n'eût préalablement déterminé ces » courbes; mais personne, que je sache, ne les avait trouvées, etc. »

Méthode de Clairaut pour résoudre le problème du mouvem. d'un corps soumis à deux forces, l'une dirigée vers un centre, l'autre perpendiculaire à celle ci.

Pour y parvenir, Clairaut considéra le mouvement d'un corps soumis à la fois à une force principale Σ dirigée vers un centre fixe, et à une autre force Π perpendiculaire à la première, dirigée dans le même plan, et tendant à accélérer la vitesse du corps; il parvint, au moyen de deux lemmes qu'il avait déjà démontrés (*Mém.* Par., 1742, page 24), à exprimer l'espace que chacune d'elles, considérée isolément, ferait parcourir au mobile dans l'élément dt du temps, en fonction de son rayon vecteur r et de sa distance angulaire v à un axe fixe; et comme les espaces parcourus ont aussi pour expressions le produit des forces



par les carrés des temps, il égala ces deux valeurs; et, obtenant les deux équations générales du mouvement dans un plan (*), parvint ainsi à résoudre complètement toute la partie mécanique du problème.

Mais ces équations étant différentielles du second ordre entre r, v et t, ne pouvaient pas servir sous cette forme à déterminer le mouvement; pour y parvenir, Clairaut intégra une première fois, avec une constante arbitraire f, le premier membre de la deuxième, et il en conclut la valeur de dt en fonction de r, de dv, et d'une fonction ρ, qui représente l'intégrale de la force Π multipliée par $\frac{r^3dv}{f^2}$ (**). Substituant cette valeur dans la première équation, après l'avoir dégagée de la condition que t y fût la variable indépendante, il obtint l'équation différentielle de la trajectoire, où il regarda dv comme constant; il supposa ensuite la force Σ composée de deux parties, l'une $\frac{M}{r^2}$ inversement proportionnelle au carré de la distance, et l'autre quelconque qu'il appela Φ; puis désignant par Ω la somme de tous les termes de l'équation différentielle, où les forces Φ et Π entrent en facteur, précédées ou non du signe de l'intégration, il parvint à une équation du second ordre, où $\frac{1}{r}$ était la variable principale. Intégrant ensuite complètement, il obtint pour $\frac{1}{r}$ une première partie analogue à son expression elliptique, et une seconde partie composée de deux termes où Ω se trouvait sous le signe $\int$ multiplié par $dv \cos v$ ou $dv \sin v$ (***); ayant ainsi réduit toute la difficulté de la solution cherchée à la détermination de ρ et de Ω, il avait résolu la partie générale du problème, et il ne lui restait plus qu'à substituer, pour ces fonctions, leurs valeurs dans chaque cas particulier.

Équation finie de l'orbite décrite qu'il en déduit par l'intégration.

Application de sa théorie au cas de la Lune.

Il appliqua alors ses formules au cas de la Lune qui gravite vers la Terre dans une orbite troublée par le Soleil; en supposant la Terre fixe, les trois corps dans le même plan, et l'orbite de la Terre circulaire; M représentant alors la somme des masses de la Terre et de la Lune. Il détermina les valeurs des forces troublantes Φ et Π, en fonction du rayon vecteur r, de l'anomalie vraie v (rapportée à l'apogée), de l'élongation T (ou de la distance angulaire de la Lune au Soleil), de la masse N du Soleil, et de sa distance l à la

---

(*) $rdv^2 - d^2r = \Sigma dt^2$, $rd^2v + 2drdv = \Pi dt^2$. (*Voyez* la note 2, § 1, pour la démonstration de ces équations.)

(**) $dt = \frac{r^2dv}{f\sqrt{1+2\rho}}$, $\rho = \int \frac{\Pi r^3 dv}{f^2}$. (*Voyez* note 3.)

(***) Après avoir supposé $\Sigma = \frac{M}{r^2} + \Phi$, on arrive à l'équation

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} = \frac{M}{f^2}(1+\Omega), \quad \text{où} \quad \Omega = \frac{\frac{\Phi r^2}{M} + \frac{\Pi r dr}{M dv} - 2\rho}{1+2\rho}.$$

Si l'on fait $\frac{f^2}{M} = p$, et qu'on intègre avec deux constantes c et g, on a

$$\frac{p}{r} = 1 - g \sin v - c \cos v + \sin v \int \Omega dv \cos v - \cos v \int \Omega dv \sin v, \quad (\textit{voyez note 3})$$

et p est le demi-paramètre de l'ellipse qui serait décrite par l'action de la seule force $\frac{M}{r^2}$.



terre, et substitua ces valeurs dans celles de Ω et ρ (*). Pour pouvoir ensuite intégrer les termes où entrait Ω, qui est fonction de ρ, il aurait fallu qu'il pût réduire ces termes à des fonctions de la seule variable v, et pour cela substituer pour r et T, qui entrent dans les expressions de Φ et Π, leurs valeurs en fonction de v, tandis que c'était précisément la détermination de ces valeurs qu'il cherchait.

Impossibilite d'une solution rigoureuse.

Clairaut vit ainsi l'impossibilité d'arriver par ce moyen à une intégration rigoureuse ; et la complication de l'équation différentielle, lorsqu'on y substitue pour ρ et Ω leurs valeurs générales, ne lui permit pas d'espérer qu'on pût jamais y séparer les variables par les méthodes connues ; il reconnut donc la nécessité de recourir à des procédés indirects et successifs pour résoudre le problème, en profitant pour cela de tous les avantages qu'offrait le cas particulier dont il s'occupait.

Emploi des données de l'observation.

Les observations lui apprenant que l'orbite de la Lune s'approche beaucoup d'être une ellipse dont l'excentricité est peu considérable, sa première idée fut d'exprimer cette condition en substituant pour r sa valeur donnée par l'équation polaire de l'ellipse, dans les termes de Ω où il se trouvait, en négligeant, dans les développemens, les puissances de l'excentricité supérieures à la seconde ; et la petitesse des forces perturbatrices Φ et Π venant du Soleil par rapport à la force principale $\frac{M}{r^2}$ venant de la terre, rendant les termes où elles entraient très peu sensibles par rapport aux autres, l'autorisait en effet à ne substituer dans ces termes, pour les variables, que des valeurs approchées. Il les détermina donc d'abord par la condition que l'orbite de la Lune fût une ellipse ordinaire, et cela pouvait suffire pour représenter le mouvement troublé de cet astre pendant un an. Mais il remarqua ensuite que le mouvement que l'on avait reconnu depuis long-temps dans la ligne des apsides de l'orbite de la Lune, étant considérable, et produisant une révolution de cette ligne en neuf ans, l'hypothèse d'une ellipse fixe n'était pas assez exacte, puisqu'il suffisait de deux ans et demi pour que la véritable position de la ligne des apsides fût à plus de 90° de celle qu'il lui assignait. Il supposa donc que la Lune décrivait une ellipse mobile dont les élémens étaient indéterminés ; son équation polaire (**), où K représentait le paramètre, e l'excentricité et m le mouvement de la Lune diminué du mouvement de l'apside, lui donna le moyen d'éliminer r des valeurs de ρ et de Ω. Pour pouvoir substituer aussi la valeur de l'élongation T dans l'expression de Ω, il intégra l'équation qui déterminait dt, en l'appliquant successivement aux mouvemens de la Lune et du Soleil (***) ; ayant ainsi la valeur du temps que la Lune met à parcourir l'arc v, et celle

Première approximation du mouvement troublé.

(*) Les forces perturbatrices sont (note 4, § 2) $\Phi = -\frac{Nr}{2l^3}(1 + 3\cos 2T)$, $\Pi = -\frac{3Nr}{2l^3}$; d'où l'on tire, en faisant $\frac{NK^3}{Ml^3} = \alpha$:

$$\rho = -\frac{3\alpha K}{2p}\int \frac{r^4}{K^4}\sin 2T.dv, \quad \Omega = -\frac{\frac{\alpha r^3}{2K^3} + \frac{3\alpha r^3}{2K^3}\cos 2T + \frac{3\alpha r^2 dr}{2K^3 dv}\sin 2T + 2\rho}{1 + 2\rho},$$

(**) $r = \frac{K}{1 - e\cos mv}$. (*Voyez* note 1.)

(***) La valeur approchée $dt = \frac{r^2 dv}{\sqrt{pM}}$ donne, dans le cas de la Lune, en substituant pour r la valeur

du temps que le Soleil met à parcourir l'arc z correspondant, il les égala toutes deux; puis, remarquant que $T = v - z$, et désignant par $\frac{n-1}{n}$ le rapport (donné par les observations) des temps périodiques de la Lune et du Soleil, il le substitua au rapport des coefficiens de v dans les deux membres, et en conclut la valeur de T en fonction de v et des sinus de ses multiples.

Clairaut obtient l'équation de l'orbite lunaire.

Il ne lui restait plus alors qu'à substituer, en se bornant aux termes du premier ordre, toutes ces valeurs dans Ω, qui, étant ainsi réduite à une fonction des cosinus des multiples de v, rendait intégrables les termes de l'équation de l'orbite qui la renfermaient (*). Il obtint ainsi une deuxième valeur de $\frac{1}{r}$, résultant de la première qu'il avait supposée, et d'une forme analogue à celle-ci, mais augmentée de plusieurs termes, l'un en $\cos v$ multiplié par une suite de coefficiens dont les deux premiers sont indépendans de e; d'autres en $\cos\left(\frac{2}{n} - m\right)v$, $\cos\left(\frac{2}{n} + m\right)v$, $\cos \frac{2}{n} v$, multipliés par des coefficiens dépendans tous de la première ou de la deuxième puissance de e (**). Le terme en $\cos v$ étant considérable (à cause

---

précédente, négligeant les e^3 et intégrant,

$$t = \frac{K^2(1 + \frac{3}{2}e^2)}{\sqrt{pM}}\left\{v + \frac{2e}{m}\sin mv + \frac{3e^2}{4m}\sin 2mv\right\};$$

dans le cas du Soleil, r et p se changent en l (puisque le demi-paramètre p se confond avec la distance moyenne quand l'excentricité est nulle), M en N, v en z, ce qui donne, en intégrant,

$$t = \frac{l^{\frac{3}{2}} z}{\sqrt{N}}.$$

On a donc $\frac{l^{\frac{3}{2}} z}{\sqrt{N}} = \frac{K^2(1 + \frac{3}{2}e^2)}{\sqrt{pM}}\left\{v + \frac{2e}{m}\sin mv + \frac{3e^2}{4m}\sin 2mv\right\}$; d'où l'on tire, en faisant....... $\frac{K^2\sqrt{N}(1 + \frac{3}{2}e^2)}{l^{\frac{3}{2}}\sqrt{pM}} = \frac{n-1}{n}$, et $z = v - T$: $T = \frac{v}{n} - \frac{n-1}{n}\left\{\frac{2e}{m}\sin mv + \frac{3e^2}{4m}\sin 2mv\right\}$; et de là les valeurs de $\sin 2T$, $\cos 2T$.

(*) En effet, supposons dans Ω un terme $A\cos pv$, il produira dans la fonction

$$\Delta = \sin v \int \Omega dv \cos v - \cos v \int \Omega dv \sin v,$$

en intégrant entre les limites o et v, le terme $\frac{A(\cos v - \cos pv)}{p^2 - 1}$. (*Voyez* note 3.)

(**) La valeur supposée était $\frac{1}{r} = \frac{1}{K} - \frac{e}{K}\cos mv$; la valeur donnée par l'intégration est, en faisant $\alpha = \frac{NK^3}{Ml^3}$, supposant v compté à partir de l'apogée, et désignant, pour abréger, par f, g, h, i, k des fonctions de m, n, K, p, e,

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \alpha f}{p} - \frac{1}{p}\left(c + \alpha f + \frac{3e\alpha}{2(m^2 - 1)} + \text{etc.}\right)\cos v + \frac{3\alpha e}{2p(m^2 - 1)}\cos mv + \frac{g\alpha n^2}{p(4 - n^2)}\cos \frac{2}{n} v$$
$$+ \frac{hn^2\alpha e}{p[(2 - mn)^2 - n^2]}\cos\left(\frac{2}{n} - m\right)v + \frac{i\alpha n^2 e}{p[(2 + mn)^2 - n^2]}\cos\left(\frac{2}{n} + m\right)v$$
$$+ \frac{k\alpha n^2 e^2}{p[4(1 - mn)^2 - n^2]}\cos 2\left(\frac{1}{n} - m\right)v.$$

(Voyez *Mém. de Par.*, 1745, p. 349.)

de son coefficient), rendrait, s'il était conservé, la deuxième valeur très différente de la valeur supposée, ce qui serait contraire à l'hypothèse confirmée par les observations, savoir, que la Lune décrit à très peu de chose près une ellipse mobile (*); ainsi, pour que la méthode ne soit pas fautive, il faut faire disparaître ce terme en profitant de l'une des indéterminées pour égaler à zéro son coefficient. Quant aux autres termes, affectés de plus petits coefficiens que les premiers, ils ne sont pas contraires à l'hypothèse fondamentale, mais ils indiquent seulement qu'elle n'est pas tout-à-fait assez exacte, et montrent la forme des termes qu'il faut ajouter à ceux qui composent la valeur elliptiqu ed e $\frac{1}{r}$ pour obtenir une expression plus approchée. Enfin, quant aux deux termes semblables dans l'équation supposée et dans l'équation donnée par le calcul, on doit, pour exprimer leur identité et déterminer en même temps les deux constantes K et e, égaler mutuellement leurs coefficiens. On obtient ainsi deux relations, dont l'une, donnée par la comparaison des coefficiens de $\cos mv$ dans les deux valeurs de $\frac{1}{r}$, contient e en facteur commun, et fournit, en l'effaçant, la valeur de m en fonction du rapport des temps périodiques de la Lune et du Soleil (**); or, celui-ci étant connu par les observations, pour que la relation précédente fût vérifiée et la bonté de la méthode confirmée, il aurait fallu qu'en substituant sa valeur dans celle de m, on retrouvât réciproquement par là, pour le mouvement de l'apogée $1-m$, une quantité qui différât très peu de celle que les observations lui assignent aussi. C'est ce qui n'arriva pas, ni bien loin de là, puisque Clairaut trouva avec étonnement, par cette méthode, $1-m=0{,}0041964$, en prenant le mouvement de la Lune pour unité; ce qui ne donne que 1° 30′ 38″ pour le mouvement de l'apogée au bout d'une révolution de la Lune, tandis que les observations établissent ce mouvement de 0,008455, ou au moins du double du précédent.

La comparaison de l'équation supposée et de l'équation conclue, lui donne 3 équations de condition.

Il ne trouve pour le mouvement de l'apogée que la moitié de celui qu'indiquent les observat.

Ce résultat singulier pouvait tenir à deux causes différentes, à la loi de l'attraction ou à la méthode; mais la solution que celle-ci fournissait étant fondée sur ce que les observations avaient appris depuis long-temps touchant la nature de l'orbite lunaire, ne pouvait pas être entièrement erronée, et il n'était pas naturel qu'elle donnât un résultat si différent. Au contraire, la loi du décroissement de l'attraction en raison inverse du carré des distances, n'avait pas encore l'épreuve du temps pour la confirmer. Newton

Conséquences qu'il tire de cette anomalie.

(*) On voit, de plus, que le terme $\cos v$ ajouté à la valeur primitive de $\frac{K}{r}$, puis substitué dans celle de Ω, produit dans Δ et dans la nouvelle valeur de $\frac{1}{r}$ qu'on en conclut, le terme $\frac{3}{2}v\sin v$, qui, contenant l'arc en dehors des signes périodiques, peut croître indéfiniment avec le nombre des révolutions. (*Voyez* note 3.)

(**) On détermine les trois lettres K, e, m en posant les équations de condition

$$K=\frac{p}{1+af},\quad c+af+\frac{3ae}{2(m^2-1)}+\text{etc.}=0,\quad \frac{3ae}{2p(m^2-1)}=-\frac{e}{K};$$

et l'on tire de celle-ci : $1-m^2=\frac{3aK}{2p}$, où l'on peut supposer $K=p$, K étant à très peu près la moyenne distance de la Lune à la Terre.



avait dit lui-même qu'il fallait probablement des puissances de la distance supérieures à la seconde, pour expliquer l'ascension des liquides dans les tubes capillaires, la rondeur des gouttes d'eau et la réfraction. Clairaut avait cru voir aussi que cette loi ne s'accordait pas avec les phénomènes de la figure de la Terre, et que les résultats tirés des mesures du pendule, par la théorie, étaient différens de ceux que fournissaient les déterminations de l'arc du méridien, d'après les observations de Bouguer et de la Condamine. Aussi ce nouveau résultat le porta d'abord à abandonner entièrement l'attraction. Mais en faisant attention ensuite au grand nombre de phénomènes avec lesquels elle s'accorde, tels que les lois de Kepler, le mouvement des nœuds de la Lune (qu'il avait calculé séparément, et trouvé assez conforme à ce qu'enseigne l'Astronomie), le flux et le reflux de la mer, il lui sembla cependant aussi difficile de la rejeter que de l'admettre. « Ce qui me parut (dit-il » Mém. cité, p. 337) de plus simple et de plus propre à servir de dénouement, c'est » que l'attraction a lieu dans la nature, mais en suivant une autre loi que celle qu'avait » établie M. Newton. Cette idée, qui vient d'abord à l'esprit, est en même temps combattue » par une difficulté qui semble la détruire. La Lune exige sans doute une autre loi d'attrac- » tion que le carré des distances; mais les planètes principales ne demandent-elles pas » au contraire cette loi, en conséquence de l'observation des règles de Kepler? Il est » aisé cependant de répondre à cette difficulté, en faisant remarquer qu'il y a une » infinité de lois à donner à l'attraction, qui différeront très sensiblement de la loi du » carré pour de petites distances, et qui s'en écarteront si peu à de grandes, qu'on ne » pourra pas s'en apercevoir par les observations.... Qu'on regarde, par exemple, la » quantité analytique qui exprime la relation de l'attraction à la distance, comme com- » posée de deux termes, l'un ayant le carré de la distance au diviseur, l'autre le carré- » carré; on verra, en comparant les effets de l'attraction à deux distances, dont l'une est au » moins 100 fois plus petite que l'autre (telles que la distance de la Lune à la Terre et » celle de Mercure au Soleil), que, pour la première, l'attraction sera sensible- » ment différente de ce qu'elle serait dans la loi du carré, et que, pour la seconde, la » différence sera au moins 100000 fois plus faible. J'avais autrefois imaginé de pareilles » formules d'attraction pour expliquer comment une même force qui ne se manifes- » terait dans les mouvemens célestes que proportionnellement aux carrés des distances, » pourrait cependant agir comme les cubes ou comme des puissances plus élevées dans » les phénomènes qui se passent sous nos yeux; je ne croyais pas alors que cette autre » partie de l'attraction pût se faire connaître par les planètes mêmes. N'ayant pas su » trouver, dans ce temps-là, la vraie théorie de la Lune, je me serais bien gardé de » croire autre chose que ce qui résultait de celle de M. Newton.... Appuyé maintenant » sur ma théorie de la Lune, je ne m'en prends plus qu'à l'insuffisance de la loi du carré » des distances, etc. »

Nouvelle loi d'attraction qu'il propose de substituer à celle de Newton.

Dans la suite du Mémoire dont nous avons extrait le passage précédent, on voit Clairaut chercher à s'assurer, aux yeux du public, la priorité de cette découverte, qu'il regardait comme très importante, et ne pas même rendre tout à fait justice à cet égard, à Newton et à son commentateur Calandrini, en prétendant qu'ils n'avaient pas fait cette observation avant lui, tandis que l'on peut bien la leur attribuer déjà, ce me semble. Au reste, Clairaut ne fut pas le seul qui parvint à découvrir, à peu près dans le même temps, que la théorie conduisait d'abord à des conclusions contraires à la loi de l'attraction; Euler

Euler doute aussi de la loi de Newton

dit, dans la pièce sur les Inégalités de Saturne, qu'il avait envoyée à l'Académie des Sciences, en 1747, p. 9 : « Ayant comparé soigneusement les observations de la Lune » avec la théorie, j'ai trouvé que la distance de la Lune à la Terre n'est pas si grande » qu'elle devrait l'être selon la théorie ; d'où il suit que la gravité de la Lune vers la » Terre est un peu moindre que selon la raison inverse des carrés des distances ; et » quelques petites inégalités dans le mouvement de la Lune, qu'on ne saurait expliquer » par cette théorie, m'ont encore davantage confirmé dans ce sentiment.... (*) Il me » paraît fort vraisemblable que l'action même de Jupiter sur le corps de Saturne s'écarte » considérablement de la raison inverse du carré des distances. Si l'on croit que la gra- » vitation universelle a une cause physique ou mécanique, on sera presque forcé d'accorder » qu'elle ne s'étend point à l'infini, et alors il faudra avouer que les forces des corps » célestes décroissent davantage que selon la raison carrée des distances, puisque cette » raison les répandrait à l'infini, etc. »

D'Alembert arrive au même résultat que Clairaut.

D'Alembert avait remis un Mémoire à l'Académie, le 6 novembre 1747 (avant d'avoir entendu celui de Clairaut), où il arrivait, par une autre méthode, au même résultat sur le mouvement de l'apogée, sans en tirer aussi explicitement que lui des conséquences contre l'attraction newtonienne. Il cherche cependant à prouver qu'il n'est point à craindre que les termes négligés changent sensiblement le mouvement de l'apogée, et en conclut que le centre de gravité de la Lune, abstraction faite de la force solaire, est tiré vers la Terre par une autre petite force qui n'est pas en raison inverse du carré des distances, et qu'il faut ajouter à la première.

Buffon soutient la cause de l'attraction newtonienne.

Tandis que les plus grands géomètres semblaient se réunir pour élever des doutes sur la loi de l'attraction, Buffon (**) se présenta pour la défendre, et il y employa, à plusieurs reprises, tant des raisonnemens mathématiques que des argumens métaphysiques. Nous présenterons un de ceux-ci, d'après d'Alembert (*Rech.*, tom. I, p. 186). « Il me paraît, » dit-il, assez naturel de penser avec M. de Buffon, que l'attraction étant regardée comme » une qualité physique, c'est-à-dire comme une loi primordiale de la nature, la loi » du carré, ou en général toute loi dépendante d'une puissance unique de la distance, » est préférable à toute autre fonction algébrique qu'on voudrait y substituer ; car cette » fonction renfermerait nécessairement au moins une quantité constante : de sorte que » le rapport des forces attractives à deux distances quelconques du corps attirant ne » serait pas déterminé par les seules distances, mais encore par quelque paramètre qui » modifierait et compliquerait ce rapport : ainsi l'attraction ne dépendrait plus simple- » ment de la distance, mais aussi de ce paramètre qu'on ne voit pas trop pourquoi la » nature y aurait introduit. » Clairaut répondit assez vivement à Buffon, en réfutant victorieusement les prétendues démonstrations mathématiques de celui-ci, qui soutenait une bonne cause par de mauvais argumens. Il montra que, quoique les lois simples ou

Discussion qui s'élève à ce sujet entre lui et Clairaut.

(*) D'Alembert (*Recherch.*, t. I, p. 113) parle d'une lettre de Maupertuis, où il lui apprenait qu'Euler était arrivé long-temps avant les savans français, par une autre méthode, à la même conclusion sur le mouvement de l'apogée, et Euler avoue lui-même, dans sa *Th. de la Lune*, de 1753, avoir conservé plusieurs années ces préventions contre la loi de Newton.

(**) En 1736, Buffon, encore peu connu, avait publié une assez mauvaise traduction du *Traité des Fluxions* de Newton.



composées d'un seul terme soient les plus probables et les plus belles, l'existence des autres est possible. Il fit voir que l'idée d'une attraction magnétique de la Terre sur la Lune, dont Newton avait dit un mot (*Princ. math.*, l. III, prop. 37), était peu satisfaisante, et ne s'appuyait sur rien. Il en dit autant de l'hypothèse de Bouguer, qui, pour accorder les faits, supposait que quelques parties de la Terre et des autres planètes attirent, suivant des fonctions différentes de la distance, et qu'il résulte de l'effet moyen de toutes ces forces particulières, une force totale par laquelle la planète agit suivant une loi complexe. Buffon observait cependant, avec raison, que les faits qui s'accordaient avec la loi de Newton étant plus nombreux que ceux qui l'infirmaient, on ne devait pas la rejeter si promptement. « M. Clairaut, disait-il (*Mém. de Paris.*, 1745, p. 500), » propose une difficulté contre le système de Newton; mais ce n'est tout au plus qu'une » difficulté qui ne peut ni ne doit devenir un principe; il faut chercher à la résoudre » et non pas en faire une théorie dont toutes les conséquences ne sont appuyées que » sur un calcul; » et il ajoutait, peut-être trop légèrement: « On peut tout repré- » senter avec un calcul, et on ne réalise rien. » Cette discussion ayant excité un intérêt général, le bénédictin Walmesley voulut aussi prouver, contre Clairaut, que l'attraction expliquait très bien le mouvement de l'apogée. Le chevalier d'Arcy lui répondit, en montrant que la méthode de Walmesley même ne donnait que la moitié du mouvement réel.

Clairaut découvre le premier la vérité au sujet du mouv. de l'apogée.

Les esprits étaient donc incertains, et la rigueur des raisonnemens des géomètres tendait même à les décider, les uns contre l'attraction en général, d'autres contre la loi de Newton seulement, lorsque Clairaut, qui avait le premier élevé publiquement des doutes sur cette loi, eut le bonheur de la confirmer aussi le premier, au moyen des recherches mêmes qu'il avait entreprises pour établir celle qu'il voulait d'abord y substituer. Il partit de la valeur du rayon vecteur à laquelle il était parvenu dans son Mémoire (*), afin de chercher la nouvelle loi de la gravitation nécessaire pour donner à l'apogée tout son mouvement. Il entreprit, dans ce but, une nouvelle approximation, en ayant égard aux termes en $\cos\frac{2}{n}v$, $\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v$, etc., qui, en vertu de la première approximation, devaient être ajoutés à ceux de la simple valeur elliptique de $\frac{K}{r}$. Il substitua cette seconde valeur dans l'expression générale de Ω; il mit aussi pour $\sin 2T$ et $\cos 2T$ leurs développemens en fonction de v, dont les premiers termes sont $\sin\frac{2}{n}v$, $\cos\frac{2}{n}v$. Il s'aperçut alors que le produit de ces quantités par les $\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v$, $\cos\left(\frac{2}{n}+m\right)v$, qui provenaient des puissances de $\frac{K}{r}$, introduisait de nouveau $\cos mv$, augmentait beaucoup le coefficient de ce cosinus dans l'équation de l'orbite qu'il en concluait, et doublait

(*) Cette valeur était de la forme

$$\frac{K}{r}=1-e\cos mv+\mathcal{C}\cos\frac{2v}{n}-\gamma\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v+\delta\cos\left(\frac{2}{n}+m\right)v+\zeta\cos\left(\frac{2}{n}-2m\right)v.$$

presque la valeur de $1-m$ qui en résultait (*). Etant parvenu ainsi à retrouver, à peu de chose près, par la théorie, le même mouvement de l'apogée de la Lune qu'indiquaient les observations, il vit que lorsqu'on n'en trouvait que la moitié, ce n'était pas la loi de Newton qui était en défaut, mais la méthode d'approximation employée, qui donnait, par la deuxième opération, des termes comparables à ceux de la première, tandis que se fondant vainement sur la convergence des résultats obtenus par ces procédés successifs, on n'avait pas eu encore l'idée de pousser plus loin l'approximation pour s'en assurer. Clairaut, après avoir remis à M. Grand-Jean de Fouchy, secrétaire de l'Académie, le 21 janvier 1749, un Mémoire cacheté qui contenait les fondemens sur lesquels reposait son importante remarque, l'annonça publiquement à l'Académie, le 17 mai suivant, sans indiquer la route qui l'y avait conduit, et en rendant compte du simple fait auquel il était, disait-il, parvenu en considérant de nouveau la question sous un point de vue qui n'avait encore été envisagé de personne; cette réserve et ce désir de déguiser même son procédé, en déroutant ceux qui l'auraient voulu chercher plutôt que de les mettre sur la voie, tenaient probablement à ce que déjà, à cette époque, on supposait que l'Académie de Pétersbourg, qui avait un prix à proposer, prendrait pour sujet la théorie de la Lune, et que Clairaut avait le projet d'y concourir. Cependant, malgré ces précautions, Euler n'eut besoin que de la nouvelle de cette découverte pour parvenir au même résultat par une méthode différente, ce qui ne l'empêcha pas de reconnaître que Clairaut en méritait tout l'honneur (**). Quant à d'Alembert, s'il ne parvint pas à dénouer la difficulté avant de connaître le principe sur lequel s'était appuyé Clairaut, il eut au moins postérieurement le mérite, en voyant que les termes qui avaient fait découvrir à celui-ci la raison de sa première erreur ne suffisaient pas, et donnaient encore une différence de 30′, de pousser beaucoup plus loin que lui l'approximation, et d'arriver à une valeur encore plus rapprochée de celle que donnent les observations pour le mouvement de l'apogée de la Lune.

Euler parvient de son côté au même résultat.

D'Alembert obtient encore un plus grand accord sur ce point entre la théorie et l'observation.

Après la petite digression dans laquelle nous venons d'entrer sur une anomalie qui avait long-temps tenu les astronomes pour ainsi dire en échec, nous allons reprendre l'exposition de la méthode de Clairaut, que nous avons laissée au moment où il parvenait à la première expression du rayon vecteur dans l'orbite troublée. Il indiqua, dès 1747,

---

(*) Considérons, dans $\frac{K}{r}$ le seul terme $-\gamma\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v$ de plus que sa valeur elliptique; il produira dans $\frac{r^3}{K^3}$ le terme $3\gamma\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v$, dans $\frac{r^4}{K^4}$ le terme $4\gamma\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v$; et de là dans la partie... $-\frac{3ar^3}{2K^3}\cos\frac{2v}{n}-\frac{3ar^2dr}{2K^3dv}\sin\frac{2v}{n}+\frac{3aK}{p}\int\frac{r^4}{K^4}\sin\frac{2v}{n}dv$, de Ω, le terme $-\left[\frac{6K}{pm}+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{n}-m\right)\right]$ $\times\, a\gamma\cos mv$, qu'il faudra multiplier par $\frac{1}{p(1-m^2)}$ pour avoir le terme correspondant dans l'équation de l'orbite; ce qui donnera, en la comparant avec l'équation primitive, ainsi que nous l'avons fait plus haut, l'équation de condition

$$1-m^2=\frac{aK}{p}\left\{\frac{3}{2}+\left[\frac{6K}{pm}+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{n}-m\right)\right]\gamma\right\};$$

d'où l'on tire

$$1-m=0{,}00836.$$

(**) *Th. Lun.*, p. 120. *Gloria hujus insignis inventi cum industriæ tum candori excellentissimi Clairaldi debetur, qui primus egregium hunc Theoriæ consensum cum veritate detexit et publice est professus.*

comment, en substituant cette valeur dans l'expression générale de dt (*), puis intégrant, on pouvait tirer la valeur du temps, et parvenir de là, en résolvant un problème semblable à celui de Kepler, et en évaluant ensuite tous les coefficiens en nombres au moyen de quelques élémens astronomiques, à des formules dont on pouvait construire des Tables qui détermineraient le mouvement de la Lune pendant un très grand nombre de révolutions ; mais cela était inutile jusqu'à ce qu'on fût parvenu à la véritable expression du mouvement de l'apogée. Dès que Clairaut l'eut trouvée à peu près, par la théorie, il préféra prendre tout d'un coup pour m sa vraie valeur donnée par les observations, afin de ne pas revenir trop de fois au même calcul, et de ne pas compliquer inutilement les opérations. « Il est clair, dit-il, qu'on en peut user ainsi, même quand on ne se serait pas convaincu, » comme moi, que c'est aussi la valeur donnée par la théorie, puisque si l'on parvient » ensuite à retrouver par là cette même valeur, la supposition sera justifiée, et que dans » le cas où elle ne le serait pas, il aurait toujours fallu la faire pour trouver la correc- » tion que demanderaient les forces accélératrices. »

Mémoire de Clairaut remis à l'Académie en 1749.

Le Mémoire de Clairaut, remis en janvier 1749 et inséré dans ceux de 1748, a pour titre : *De l'Orbite de la Lune, en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices.* Il contient le développement de la seconde approximation qu'il avait entrepris de faire des mouvemens troublés, et qui lui fit découvrir la vérité au sujet du mouvement de l'apogée. Pour cela il reprend la valeur du rayon que lui avait fourni la première approximation (savoir, sa valeur elliptique augmentée de quatre petits termes dont il désigne la somme par ξ). Il prend aussi pour le temps, ou plutôt pour l'anomalie moyenne x qui en résulte, la valeur à laquelle il était parvenu (**),

Deuxième approximation des mouvemens lunaires.

(*) $dt = \dfrac{r^2 dv}{\sqrt{pM}\sqrt{1+2\rho}}$.

(**) Il suppose

$$\frac{K}{r} = 1 - e\cos mv + \zeta\cos\frac{2}{n}v - \gamma\cos\left(\frac{2}{n} - m\right)v + \delta\cos\left(\frac{2}{n} + m\right)v + \zeta\cos 2\left(\frac{1}{n} - m\right)v$$
$$= 1 - e\cos mv + \xi,$$
$$x = v + be\sin mv + ge^2\sin 2mv + h\alpha\sin\left(\frac{2}{n} - m\right)v - q\alpha\sin\frac{2}{n}v;$$

les coefficiens e, ζ, γ, b, g, etc. étant connus par la première approximation.

Il substitue ces valeurs dans les expressions des fonctions perturbatrices

$$\rho = \frac{1}{pM}\int \Pi r^3 dv, \qquad \Omega = \left(\frac{\Phi r^2}{M} + \frac{\Pi r dr}{M dv} - 2\rho\right)(1 - 2\rho + 4\rho^2);$$

de là dans l'équation de l'orbite,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c}{p}\cos v + \frac{\sin v}{p}\int \Omega dv \cos v - \frac{\cos v}{p}\int \Omega dv \sin v,$$

et dans l'expression du temps, savoir :

$$\frac{1}{pM}\int r^2 dv\left(1 - \rho + \frac{3}{2}\rho^2\right),$$

qui donne, en y substituant pour r sa valeur, $1 - e\cos mv + \xi$; intégrant et prenant l'anomalie moyenne x à la place du temps, ce qui revient à effacer du premier terme du second membre le coefficient de v,

$$x = v + \frac{2e}{m}\sin mv - \int(2\xi + \rho)dv - 2e\int(3\xi + \rho)\sin mv\,dv + \frac{3e^2}{4m}\sin 2mv + \int\left(3\xi^2 + 2\rho\xi + \frac{3}{2}\rho^2\right)dv + \text{etc.}$$

et il en conclut des expressions plus exactes de sin $2T$ et cos $2T$; il les substitue ensuite, ainsi que celles de r et de ses puissances, dans les valeurs générales de ρ et de Ω, en ayant égard, dans celle-ci, au développement des trois premiers termes de son dénominateur. Mais il suppose encore les orbites dans le même plan, celle du Soleil sans excentricité (quoiqu'il eût déjà remarqué, dès son premier Mémoire, qu'on pouvait y avoir égard facilement), et néglige les termes qui seraient introduits dans les valeurs des forces Φ et Π, si l'on y conservait le carré du rapport des distances du Soleil et de la Lune à la Terre; ce qui lui donne pour Φ et Π les mêmes expressions générales que dans le premier Mémoire. Après avoir fait tous les développemens, il substitue la valeur de Ω qu'il en conclut, dans l'équation générale de l'orbite troublée; il en tire pour r une nouvelle valeur plus exacte; ce qui lui donne une des équations cherchées. Sa substitution, ainsi que celle de ρ, dans l'expression du temps, lui donne, après des calculs très longs, la deuxième équation, savoir : un développement en fonction des sinus des multiples de v déjà connus, et d'autres tels que $3mv$, $\left(\frac{2}{n}+2m\right)v$, $\left(\frac{2}{n}-3m\right)v$, ceux-ci multipliés par de très petits coefficiens.

Équation de l'orbite.

Pour déterminer en nombres les constantes qui entrent dans les deux équations précédentes, il n'a besoin que de deux élémens, savoir : le rapport $\frac{n-1}{n}$ de la révolution du Soleil à la révolution périodique de la Lune, et l'excentricité moyenne de l'orbite de cet astre. C'est encore une recherche longue et pénible, que celle de déterminer, par leur moyen, les coefficiens cherchés; il n'entre dans aucun détail à ce sujet; et après avoir dit seulement qu'il a fait usage pour cela de la méthode de fausse position, il présente le résultat d'une première opération (*), et termine son Mémoire par la démonstration de la proposition fondamentale de sa théorie (celle qui lui donne l'équation différentielle de l'orbite troublée, et son intégrale ou la valeur générale de $\frac{1}{r}$), qu'il avait supprimée dans son premier Mémoire, parce que sa solution ne lui paraissait pas alors aussi simple qu'elle pouvait le devenir.

Expression du temps.

L'Académie de Pétersbourg prit, comme on l'avait supposé, la théorie de la Lune pour sujet du prix qu'elle proposa en 1750, et elle demanda : *An omnes inæqualitates quæ in motu Lunæ observantur, theoriæ Newtonianæ sint consentaneæ; et quænam sit vera theoria omnium harum inæqualitatum, unde locus Lunæ ad quodvis tempus quam exactissime possit definiri?* La pièce de Clairaut, datée du 6 décembre 1750, remporta le prix en 1751, et fut imprimée à Pétersbourg en 1752. Cet ouvrage, qui doit faire un si grand honneur à son auteur, est fondé sur une théorie tout-à-fait analogue à celle de ses précédens Mémoires. Mais après les premières approximations, il en fait une nouvelle où il a égard, pour la première fois, à l'inclinaison de l'orbite lunaire au plan de l'écliptique et à l'excentricité de l'orbite terrestre. Ces considérations lui donnent, pour les

Pièce de Clairaut couronnée en 1751 par l'Académie de Pétersbourg.

Première partie, relative à la recherche du lieu de la Lune dans son orbite.

Nouvelle approximation, en ayant égard à l'inclinaison de l'orbite lunaire et à l'excentricité de l'orbite solaire.

(*) Savoir :

$$\frac{K}{r} = 1 - 0{,}05505 \cos v + 0{,}007179 \cos \frac{2}{n} v - 0{,}011181 \cos\left(\frac{2}{n} - m\right) v + \text{etc.},$$

$$x = v + 0{,}110206 \sin mv - 0{,}009167 \sin \frac{2}{n} v + 0{,}002241 \sin 2mv + \text{etc.}$$

forces Φ et Π, de nouvelles valeurs en fonction de l'anomalie vraie v de la Lune dans son orbite, du sinus verse ψ de son inclinaison, de la différence T des distances angulaires de la Lune et du Soleil au nœud ascendant de l'orbite de la Lune, de la distance angulaire u du Soleil à ce nœud, de la masse N du Soleil, et des rayons vecteurs variables r et l de la Lune et du Soleil (*).

Nouvelles expressions des forces perturbatrices.

Les expressions des forces auxquelles il parvient ainsi, sont composées de trois parties : 1°. de leur valeur dans la première approximation, multipliée par des coefficiens h et h', qui diffèrent peu de 1 ; 2°. de termes donnant la correction du lieu de la Lune relativement à la position du nœud, et dont l'effet sera d'introduire trois petites corrections qui n'altéreront pas les premiers termes ; 3°. de termes dépendans de la parallaxe du Soleil, ou de l'inverse $\frac{1}{l}$ de sa distance variable à la Terre, et dont le calcul se fait à part. Clairaut prend séparément les valeurs de ρ et de Ω pour ces trois espèces de termes.

Indication de la marche du calcul et des substitutions à faire.

Il substitue ensuite dans l'expression générale du temps, $1 - e \cos mv + \xi$ au lieu de $\frac{K}{r}$, et il l'intègre en laissant sous le signe $\int$ tous les termes qui ont en facteur ρ, ξ, leurs carrés ou leur produit, et bornant le développement à la quatrième puissance de e. Cette manière de laisser ξ en évidence au lieu de substituer immédiatement sa valeur, a l'avantage de faire voir d'un coup-d'œil la correction qui provient d'un terme quelconque de l'expression de ξ. Il obtient ainsi un développement qui donne la valeur du temps en fonction de v et des sinus des multiples de v ; et comme on peut à la place du temps que la Lune met à parcourir un angle, substituer l'arc moyen décrit d'un mouvement uniforme, on a aussi par-là une relation qui donne la valeur de la longitude moyenne de la Lune x, en fonction de sa longitude vraie v et des sinus de ses multiples.

Il faut encore, afin de pouvoir intégrer les termes de ce développement qui restent sous le signe $\int$, et ceux de l'équation de l'orbite où Ω se trouve dans le même cas, obtenir la valeur de l'angle T, dont les sinus et cosinus entrent dans leurs expressions. Pour cela il compare, comme dans la première approximation, les valeurs du temps dans lequel la Lune parcourt l'arc v, et le Soleil l'arc z ou $v - \mathrm{T}$: ce qui revient à égaler le produit de la longitude moyenne x de la Lune, multipliée par le rapport $\frac{n-1}{n}$ des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune, à la valeur approchée de la longitude moyenne du Soleil, en n'ayant égard qu'à la première et à la seconde puissance de l'excentricité i

---

(*) Les valeurs des forces sont (note 4 et *Th. L. Cl.*, p. 40) :

$$\Phi = -\frac{\mathrm{N}r}{2l^3}(h' + 3h\cos 2\mathrm{T}) - \frac{3\mathrm{N}\psi' r}{2l^3}[\cos(2u + 2\mathrm{T}) + \cos 2u] - \frac{3\mathrm{N}r^2}{8l^4}(3q\cos\mathrm{T} + 5q'\cos 3\mathrm{T}),$$

$$\Pi = -\frac{3\mathrm{N}r}{2l^3}h\sin 2\mathrm{T} - \frac{3\mathrm{N}\psi' r}{2l^3}\sin(2u + 2\mathrm{T}) - \frac{3\mathrm{N}r^2}{8l^4}(q\sin\mathrm{T} + 5q'\sin 3\mathrm{T}),$$

h, h', q, q', ψ' étant des fonctions de ψ et ψ^2, telles que $h = 1 - \psi + \frac{1}{4}\psi^2$, $q = 1 - \frac{11\psi}{2}$, etc., l étant déterminé par l'équation elliptique

$$l = \frac{f}{1 - i\cos z},$$

où f désigne le demi-paramètre de l'ellipse solaire, i le rapport de son excentricité au demi-grand axe.

de son orbite (*). On tire de là, par le retour des suites, la valeur de T en fonction de v et des sinus des multiples de x; or, l'on connaît par la première approximation une valeur approchée de x en v et en fonction des sinus des multiples de v, qui peut suffire pour avoir T, à cause de la multiplication par la petite fraction $1-\frac{1}{n}$ que tous les coefficiens de x subissent en passant dans T; si on la substitue par-tout au lieu de x, on réduit ainsi l'expression de T à une fonction de v seulement, et l'on obtient par là celles de $\sin 2T$ et $\cos 2T$; quant à celles de $\cos T$ et $\cos 3T$, qui entrent aussi dans les valeurs de ρ et Ω, elles demandent moins de précision, parce que ces termes sont multipliés par le coefficient $\frac{\alpha K}{f}$, qui est aussi peu considérable par rapport au coefficient α des premiers termes, que la distance moyenne de la Lune l'est à l'égard de celle du Soleil. Quant aux angles u et $u+T$, dont l'un est la distance du Soleil au nœud et l'autre celle de la Lune au même point, Clairaut renvoie la fixation de leur valeur au moment où l'on aura déterminé le lieu du nœud pour un instant quelconque donné.

Après toutes ces préparations, il ne lui reste plus qu'à faire toutes les substitutions des valeurs des puissances de $\frac{K}{r}$ et de $\frac{f}{l}$ des sin. et cos. des multiples de T dans celles de ρ et Ω, pour en tirer ensuite les nouvelles expressions du rayon vecteur et de la longitude moyenne, développées suivant les puissances des excentricités et les multiples des longitudes vraies. Clairaut n'est pas entré dans le détail de ces opérations; il observe seulement, peut-être en faisant usage à cet égard des remarques analogues d'Euler dans sa pièce de 1747, que la combinaison des $\cos\left(1-\frac{1}{n}\right)v$ que contient $\frac{f^3}{l^3}$ avec les $\cos\frac{v}{n}$ qui se trouvent dans les valeurs de $\cos T$ ou de $\frac{r^3}{K^3}$, peut introduire, dans celle de Ω, des $\cos v$ qui ont, comme nous l'avons vu, le dangereux effet d'amener dans la valeur de r des arcs de cercle. Il attribue cette circonstance à ce qu'il a supposé fixe l'apogée du Soleil, ce qui n'est pas permis en toute rigueur, puisque, quelque petite que soit sur cet

Termes dont la combinaison peut amener des arcs de cercle dans l'intégrale.

(*) La longitude moyenne du Soleil (ou l'intégrale de son moyen mouvement) étant

$$\int\frac{dz}{(1-i\cos z)^2}=z+2i\sin z+\frac{3}{4}i^2\sin 2z,$$

on a l'équation

$$z+2i\sin z+\frac{3}{4}i^2\sin 2z=\left(1-\frac{1}{n}\right)x,$$

d'où l'on tire, par le retour des suites (note 5. — *Th. L. Cl.*, p. 49), la valeur de z; puis en faisant $z=v-T$,

$$T=v-\left(1-\frac{1}{n}\right)x+2i\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)x-\frac{5}{4}i^2\sin\left(2-\frac{2}{n}\right)x;$$

mais on a trouvé par la première approximation

$$x=v+\frac{2e}{m}\sin mv+\frac{3e^2}{4m}\sin 2mv+\text{etc.};$$

on trouvera donc, en substituant cette valeur dans la précédente (en se contentant de mettre son premier terme dans celui qui contient i^2 en facteur), une expression de la forme

$$T=\frac{v}{n}-\zeta\sin mv-\gamma\sin\left(\frac{2}{n}-m\right)v+2\delta\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)v-\text{etc.},$$

ζ, γ, δ, etc. étant des fonctions des coefficiens de la valeur de x multipliés par $1-\frac{1}{n}$.

astre l'action de la Lune, elle n'en est pas moins réelle, et doit produire un mouvement dans son apogée, quoique très lent à la vérité. Si l'on y avait égard en prenant pour l'orbite solaire l'équation d'une ellipse mobile, ou en remplaçant z par pz, on n'aurait plus cet inconvénient, mais bien celui de la petitesse extrême du diviseur $p^2 - 1$ qu'aurait le terme de même espèce dans la valeur de $\frac{K}{r}$. Clairaut indique un autre parti à prendre, qui lui paraît le plus simple et le plus utile, c'est de calculer toutes les autres équations du mouvement de la Lune sur lesquelles le mouvement de l'apogée du Soleil ne peut faire aucun effet; de comparer ensuite les lieux calculés avec la théorie, et de voir ce que les erreurs permettent de supposer par rapport à l'équation qui doit résulter des $\cos pz$; mais il n'entre dans aucun détail sur l'application de ce procédé, non plus que sur le mouvement de l'apogée de la Lune, qui résulte d'une théorie plus exacte, quoiqu'il semblât l'annoncer (*Th. L.*, p. 28), et il se contente de poser simplement ses résultats,

Résultats obtenus après toutes les substitutions.

savoir : l'équation de l'orbite qui détermine $\frac{K}{r}$, et la valeur de la longitude moyenne x. Il les donne en fonction des cos. et sin. des multiples de v et de ω (ω étant le rapport du mouvement moyen des nœuds à celui de la Lune) multipliés par des coefficiens numériques; ceux-ci sont exprimés en parties du rayon pris pour unité, au moyen des valeurs de quatre élémens astronomiques, savoir : l'excentricité moyenne de l'orbite lunaire et celle de l'orbite solaire, le rapport du moyen mouvement de ces deux astres et la parallaxe du Soleil (*).

La valeur trouvée pour x servirait à déterminer la longitude moyenne par le moyen de la longitude vraie, tandis que c'est au contraire la longitude vraie qu'on a besoin en Astronomie de déterminer en fonction de la longitude moyenne; il faut donc conclure le second résultat du premier au moyen du retour des suites (**).

Il parvient, par le retour des suites, à l'expression de la longitude vraie en fonction de la moyenne.

Clairaut y parvient en ne prenant d'abord que les quatre termes les plus considérables de la valeur de x par quatre opérations successives, et au moyen d'autant de lemmes qu'il ne démontre pas, tandis que le beau théorème de Lagrange peut servir à obtenir immédiatement l'équation définitive. Les termes en sinus, qui suivent les trois premiers dans l'expression de x, étant plus petits que ceux-ci, on peut se borner, pour ceux qu'ils amènent dans l'expression de v, au sinus du même multiple de x, ou de leur simple

---

(*) Il suppose

$$e = 0{,}05505, \quad i = 0{,}01683, \quad \frac{n-1}{n} = 0{,}0748011, \quad \frac{1}{l} = 12''.$$

(**) Supposant

$$x = v + a\sin mv + b\sin pv + c\sin qv,$$

les lettres a, b, c, m, p, q représentant des coefficiens et des multiples connus, on parvient réciproquement (note 5) à l'expression

$$v = x - a\left(1 - \frac{m^2a^2}{8} - \frac{m^2b^2}{4} - \frac{m^2c^2}{4}\right)\sin mx + \frac{ab}{2}[(p+m)\sin(p+m)x - (p-m)\sin(p-m)x]$$
$$+ \frac{1}{2}a^2m\sin 2mx - \frac{1}{8}a^2b[(2m+p)^2\sin(2m+p)x - (2m-p)^2\sin(2m-p)x]$$
$$- \frac{1}{4}abc(q+p+m)^2\sin(q+p+m)x - \frac{3}{2}a^3m^2\sin 3mx + \text{le développement de tous les termes analogues en } b,\ c,\ p \text{ et } q.$$

combinaison deux à deux avec les multiples précédens (*), en négligeant même cette dernière partie dans les plus petits termes. Il parvient ainsi à la valeur cherchée de la longitude vraie, et réduit en arcs les coefficiens de chaque terme pris en parties du rayon, au moyen du rapport de la circonférence au diamètre (**). Tous les angles sont jusqu'alors supposés comptés depuis un axe où les deux astres étaient à la fois dans leur apogée. Clairaut remarque que comme il n'importe pas de savoir où est placé cet axe, parce que la différence entre v et x sera la même toutes les fois que les autres angles auront des sinus égaux et affectés des mêmes signes, il est clair qu'on peut donner à v et à x une origine quelconque; et que x exprimant la longitude moyenne de la Lune, prise de quelque époque fixe, la formule exprimera le lieu vrai de la Lune dans l'orbite.

Formation des Tables pour calculer le lieu vrai de la Lune dans son orbite.

Il indique ensuite comment elle peut servir à calculer ces lieux pour un instant quelconque. On pouvait y parvenir immédiatement pour chacun de ceux qu'on voulait obtenir, par le calcul direct de la formule, sans emprunter d'autres secours que celui des tables ordinaires des mouvemens moyens et des sinus. Clairaut fit d'abord quelques applications de ce genre pour avoir une première idée de l'exactitude de sa théorie; mais la longueur rebutante de ce procédé, où tout était à recommencer à chaque nouveau calcul, l'engagea promptement à construire des tables pour chacun des vingt-deux argumens que renfermait la formule, et dont les équations étaient données par les coefficiens de chaque terme; prenant alors dans les tables connues des mouvemens moyens, les valeurs des anomalies moyennes y et z de la Lune et du Soleil pour l'instant dont il s'agit, celles de la distance moyenne t de la Lune au Soleil, et du double $2u$ de la distance du nœud au Soleil, avec ces premiers angles il formait facilement les autres argumens $t-y$, $2t-y$, etc. Ces argumens trouvés, il cherchait, dans les tables construites d'après l'équation de l'orbite, les inégalités qui y répondent avec leurs signes; puis, les réduisant à une seule et l'appliquant au lieu moyen de la Lune, il obtenait son lieu vrai dans l'orbite pour l'instant déterminé.

2e partie : détermination de la position du plan de l'orbite par rapport au plan de l'écliptique.

Il ne lui restait plus qu'à déterminer la position du plan de l'orbite pour pouvoir fixer à chaque instant le lieu absolu de l'astre dans le ciel : c'est l'objet de la seconde partie du Mémoire couronné par l'Académie de Pétersbourg, où Clairaut cherche le mou-

---

(*) Ainsi le terme quelconque $g \sin qv$ introduira dans la valeur de v les suivans :

$$-g\left(1-\frac{1}{4}q^2a^2\right)\sin qx+\frac{1}{2}ag(m+q)\sin(m+q)x+\frac{1}{2}bg\left(\frac{2}{n}-m+q\right)\sin\left(\frac{2}{n}-m+q\right)x$$
$$-\frac{1}{2}ag(m-q)\sin(m-q)x-\frac{1}{2}cg\left(\frac{2}{n}+q\right)\sin\left(\frac{2}{n}+q\right)x+\text{etc.},$$

ce qui résulte évidemment de la forme générale du développement de v, en y faisant $p=\frac{2}{n}-m$, $q=\frac{2}{n}$.

(**) Il a alors, en désignant la distance moyenne $\frac{x}{n}$ de la Lune au Soleil par t,

l'anomalie moyenne $\left(1-\frac{1}{n}\right)x$ du Soleil par z,

l'anomalie moyenne mx de la Lune par y,

la distance moyenne $\left(1-\frac{1}{n}+\omega\right)$ du Sol. au nœud par u,

$$v = x - 6^\circ\ 19'\ 57''\sin y - 1'\ 53''\sin t + 9'\ 39''\sin z + 1'\ 21''\sin 2u$$

+ une suite de termes en fonctions des sinus des multiples des premiers, de leurs composés 2 à 2, et de quelques-unes de leurs combinaisons 3 à 3.

vement des nœuds de la Lune, et la variation d'inclinaison de son orbite par rapport à l'écliptique. Il y parvient en suivant une méthode assez analogue à celle de Newton. C'est par une construction semblable à celle de la proposition 30 du livre 3 des *Principes*, qu'il apprécie le mouvement instantané dq qu'a la ligne des nœuds par l'effet de la composante de la force perturbatrice qui agit parallèlement à la ligne menée de la Terre au Soleil; il obtient dq en fonction de l'espace que cette composante fait parcourir, divisé par l'élément de la trajectoire, multiplié par le cosinus $1-\psi$ de l'inclinaison de l'orbite, et par une fonction des cos. des multiples des angles v, q et z (*). Il remplace l'élément du temps par celui de la longitude moyenne, et substitue ensuite à la place de v, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{f^3}{l^3}$ et z, leurs valeurs déterminées précédemment en fonction des sin. et cos. des multiples de x et des excentricités dont il néglige les troisièmes puissances; quant aux termes de la valeur de dq, qui contiennent l'inconnue cherchée q, il y substitue, pour cet angle, une valeur composée d'une suite de termes multipliés par des coefficiens indéterminés, et dont la forme est indiquée par l'intégration de la partie de l'expression de dq qui est indépendante de q; il se borne même aux termes les plus considérables. Il intègre ensuite l'expression complète de dq pour obtenir la valeur cherchée de q; et la comparaison des termes admis dans la valeur supposée de q avec ceux qui y correspondent dans l'autre valeur de cette même quantité produite par les substitutions qu'on vient d'indiquer, fournit des équations en nombre suffisant pour servir à exprimer tous les coefficiens indéterminés. Le coefficient qui affecte x dans la valeur complète de q doit être la même chose que ω, rapport du mouvement moyen du nœud à celui de la Lune, si la théorie de l'attraction répond aux phénomènes: c'est ce que Clairaut dit avoir vérifié en trouvant, après toutes les substitutions numériques, une différence entre les deux résultats très légère et tout-à-fait négligeable. Il réduit en degrés les coefficiens de chaque sinus, et obtient ainsi, pour déterminer le lieu vrai du nœud, après avoir déterminé le lieu moyen, un développement composé de quinze termes, dont les argumens sont différens, et qui servent à construire autant de tables qui déterminent chaque équation.

Recherche du mouvement des nœuds produit par l'action du Soleil.

Recherche de la variation de l'inclinaison de l'orbite.

Clairaut cherche ensuite la variation de l'inclinaison I de l'orbite sur l'écliptique, et

---

(*) La composante dont il s'agit ayant pour expression $\frac{3Nr}{l^3}\cos T$ (note 4), l'espace qu'elle fait parcourir est $\frac{3Nr}{l^3}\cos T\,dt^2$; et comme on a $dt=\frac{K^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}dx$, en représentant par x le moyen mouvement de la Lune, si l'on fait $\alpha=\frac{K^3N}{f^3M}$, on aura $3\alpha dx^2\frac{f^3}{l^3}r\cos T$ pour la valeur de cet espace en fonction du moyen mouvement. On obtient ensuite

$$dq=\frac{3}{4}\alpha(1-\psi)\frac{f^3dx^2}{l^3dv}[1+\cos(2v-2z)-\cos(2q+2v)-\cos(2q+2z)];$$

on tire de là, en mettant pour $\frac{f^3}{l^3}$, $\frac{dx}{dv}$, v et z leurs valeurs, intégrant et négligeant d'abord les deux derniers termes de dq, une valeur de la forme

$$q=\omega x-o\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)x-\lambda\sin(2+2\omega)x+\theta\sin\frac{2}{n}x+\mu\sin 2(1-m+\omega)x+\text{etc.};$$

on la substitue dans les termes de dq en $\cos(2q+2v)$, $\cos(2q+2z)$; on intègre et l'on obtient la valeur complète de q. (*Voyez* note 6 et *Th. L. Cl.*, p. 67.)

exprime son rapport au sinus de l'inclinaison primitive, au moyen du mouvement instantané de la ligne des nœuds, pris avec un signe contraire et multiplié par la cotangente de la distance angulaire de la Lune au nœud ascendant (*). Il réduit cette expression par une méthode analogue à celle qu'il vient d'employer pour calculer le mouvement du nœud, à une fonction des cos. des multiples de x; il l'intègre et conclut la valeur de I de celle de $\int \frac{dI}{\sin I}$ (**); le terme constant de l'expression de I représente l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune, et il le suppose de 5° 8′ ½; quant aux autres termes, l'identité de leurs argumens avec ceux qu'on calcule pour le nœud, facilite la détermination de la différence entre l'inclinaison vraie et la moyenne qu'on obtient au moyen de quinze tables d'équations.

Comparaison de la théorie avec l'observation.

Après avoir construit des tables de toutes les équations calculées précédemment, tant pour la détermination du lieu de la Lune que pour la position du nœud et la quantité de l'inclinaison, Clairaut demanda à Lacaille quelques positions de la Lune déterminées avec exactitude, afin de pouvoir juger du degré de précision de sa théorie. Cet habile astronome lui fournit une centaine d'observations de Cassini et de Maraldi, bien discutées, avec les longitudes et les latitudes qui en résultaient. Clairaut calcula par la théorie, pour chacune d'elles, le lieu vrai de la Lune dans son orbite, celui du nœud et l'inclinaison, il les corrigea par toutes leurs équations; retranchant ensuite la seconde de ces quantités de la première, il obtint l'argument vrai de la latitude qui, avec l'inclinaison vraie, lui donna, par la résolution d'un triangle sphérique, tant la longitude de la Lune que sa latitude (***).

C'est par la comparaison de ces résultats avec ceux de Lacaille, qu'il termine la pièce dont nous nous occupons. Les erreurs extrêmes en longitude y vont à près de 6′, mais leur moyenne monte à peine à 2′, et le nombre des erreurs posititives étant beaucoup plus grand que celui des négatives, y indique quelque cause constante, telle, par exemple, qu'une trop grande excentricité donnée à l'orbite de la Lune. Ainsi, comme le dit Clairaut en terminant sa pièce, outre que les tables construites d'après sa théorie approchaient déjà plus de la nature qu'aucune de celles qui les avaient précédées (quoique le temps ne lui eût pas encore permis d'en rectifier les élémens), elles suffisaient pour résoudre la question proposée par l'Académie impériale, en démontrant qu'il est inutile de chercher d'autre cause des inégalités du mouvement de la Lune, que la seule attraction inversement proportionnelle au carré des distances.

(*) $\frac{dI}{\sin I} = - dq \cot \text{dist.}$ ☾ à son nœud;

d'où l'on tire (note 6)

$$\frac{dI}{\sin I} = - \frac{3a(1-\frac{1}{4})dx^2}{4d\nu}\frac{f^3}{l^3}[\sin(2q+2s)+\sin(2q+2\nu)-\sin(2\nu-2s)].$$

(**) Soit $\int \frac{dI}{\sin I} = V + \log h$; il obtient

$$I = h\left(1-\frac{1}{12}h^2\right)+h\left(1-\frac{1}{4}h^2\right)\left(V+\frac{1}{2}V^2\right).$$ (*Voyez* note 6.)

(***) En effet, si l'on désigne par S′ la distance de la Lune au nœud, ou l'argument de la latitude,
S cette même distance comptée sur l'écliptique,
l la latitude,

on aura

$$\sin l = \sin S' \sin I, \qquad \tan S = \tan S' \cos I.$$ [*Voyez* note 1, équations (5) et (6).]



Addition au Mémoire envoyé à l'Académie de Pétersbourg.

Clairaut envoya à Pétersbourg une addition à son Mémoire, qui arriva un peu plus tard que le terme fixé pour le jugement des pièces ; il y indiquait quelques corrections à faire aux tables par lesquelles il avait calculé les cent lieux de la Lune ci-dessus mentionnés, en montrant que ces corrections rapprochaient la théorie des observations.

Il commença, peu de temps après, l'impression de ses Tables, qu'il n'avait retardée que pour en perfectionner la forme ; et quoiqu'elles n'aient paru qu'au commencement de 1754, le fond en était publié dès 1752 (*Hist. de l'Acad.*, 1752, p. 113).

Application de l'équation de l'orbite troublée à la recherche de la parallaxe horisontale de la Lune.

Dans cet intervalle, Clairaut appliqua à la parallaxe horizontale de la Lune, dont la détermination occupait alors les astronomes, l'équation de l'orbite dont il n'avait pas encore fait usage. Cette parallaxe peut en effet être regardée comme inversement proportionnelle à la distance de la Lune à la Terre, quoique, à proprement parler, cette distance ne soit inversement proportionnelle qu'au sinus de la parallaxe ; parce que son *maximum* n'étant que d'environ 1° et sa variation de 7 à 8′, on peut très légitimement substituer l'arc au sinus. L'équation de l'orbite donnant la valeur de $\frac{K}{r}$ en fonction des cosinus des multiples de la longitude vraie v, il ne s'agissait plus que de remplacer celle-ci par la longitude moyenne x, en employant la valeur approchée de v, trouvée précédemment (*), en fonction de x et des sinus des multiples de x. Le résultat n'était encore que proportionnel à la parallaxe ; mais il devint la parallaxe même aussitôt quil eut fixé, au moyen des observations, la valeur de l'unité en minutes et secondes. Clairaut établit pour cela, avec Lemonnier, le *maximum* de la parallaxe de 61′ 8″ ; et remarquant qu'en supposant dt nul, z et y égaux à 180° dans l'expression de $\frac{K}{r}$, tous les coefficiens des termes sensibles excepté un seul, où n'entre point t, s'ajoutent entre eux de manière à produire la plus grande équation, il égala leur somme, prise dans cette hypothèse, à 61′ 8″ ; il en conclut l'expression cherchée de l'unité en minutes et secondes (**), et de là celle des coefficiens de chaque terme ; il obtint enfin, au moyen de quatre équations, toutes assez petites, et dont les argumens se forment facilement, la parallaxe cherchée avec une approximation suffisante.

Forme des Tables de la Lune, de Clairaut, de 1754.

Clairaut, en exposant cette nouvelle application dans un Mémoire que l'on trouve dans ceux de l'Académie des Sciences de Paris, pour 1752, p. 142, rend compte aussi des moyens par lesquels il était parvenu à simplifier la forme de ses Tables avant de les

---

(*) Il trouve ainsi, en désignant par a, b, c, d, etc., des coefficiens numériques exprimés en parties du rayon,

$$\frac{K}{r} = 1 - a\cos y + b\cos 2y + \text{etc.} + c\cos 2t + d\cos(y-z) + \text{etc.}$$
$$- e\cos 3y \qquad + f\cos 4t - g\cos(y+z) - h\cos(2t-2y) - \text{etc.}$$

(**) Si l'on suppose $2t = 0$, $y = 180°$, $z = 180°$, la valeur précédente se réduit à.

$$1 + a + b + c + d - g, \quad \text{ou à} \quad 1{,}0786037,$$

en mettant pour chaque lettre la valeur qu'elle représente. Clairaut pose l'équation

$$1{,}0786037 = 60' \, 8'' ;$$

d'où il conclut

$$1 = 56' \, 40'',7.$$

publier. De même que dans sa théorie, le calcul de la longitude vraie dans l'orbite y exigeait 22 équations, qu'on obtenait à l'aide d'autant de tables à simple entrée, qui avaient pour argumens les divers multiples des moyens mouvemens. Il avait augmenté seulement de 1′ 39″ l'époque des moyens mouvemens de Halley, et diminué de $\frac{1}{171}$ l'excentricité de l'orbite lunaire de Newton, ce qui s'accordait mieux avec les observations, et rendait le nombre des erreurs positives égal à celui des négatives. Ayant observé un rapport constant entre les petites équations du nœud et celles de l'inclinaison, il s'en servit pour abréger considérablement le calcul de la latitude et celui de la réduction à l'écliptique. Ce fut l'examen attentif des séries relatives au nœud et à l'inclinaison qui lui fit découvrir que presque toutes les équations de l'inclinaison ont des coefficiens qui sont à ceux des équations du nœud relatives aux mêmes argumens, à peu près dans le rapport du sinus de l'inclinaison moyenne au rayon. Supposant donc que A représente un des argumens quelconques des équations dans lesquelles cette observation a lieu, et $\zeta \cos A$ l'équation de l'inclinaison dépendante de cet argument, $\frac{\zeta \sin A}{\sin \text{inclin.}}$ est l'équation du nœud, donnée par le même argument, et partant $-\frac{\zeta \sin A}{\sin \text{inclin.}}$ celle de l'argument de la latitude; il conclut immédiatement de là l'effet produit dans la latitude par les dix petites équations, tant du nœud que de l'inclinaison (*), où il avait reconnu l'existence de ce rapport. Quant aux cinq équations où il ne croyait pas que la relation précédente eût lieu également, il calcula d'abord, en les employant seules, le mouvement du nœud, la variation de l'inclinaison, et de là la latitude et la réduction à l'écliptique. Il vérifia que cette dernière quantité était déterminée, par là, aussi exactement qu'il était nécessaire; et quant à la latitude, qui était déjà donnée à une minute près par la première opération, il la corrigea à l'aide de huit petites équations données directement au moyen de la remarque précédente. C'est par l'examen de l'erreur que l'on peut commettre, en les négligeant, dans la recherche de la réduction à l'écliptique, qu'il termine son Mémoire de 1752; l'expression analytique de cette erreur (**), appliquée successivement à toutes les équations du nœud, fait voir que leur somme ne peut jamais produire que 4″,7 d'erreur; quantité assez petite pour qu'on puisse la négliger, sur-tout lorsque par là on abrège beaucoup le calcul.

Simplification du calcul de la latitude et de la réduction à l'écliptique.

(*) En effet on a (note 1), en désignant par l la latitude, par S′ l'argument de latitude et par I l'inclinaison, l'analogie

$$\sin l = \sin S' \sin I;$$

sa différentielle $d.\sin l = \cos S' dS' \sin I + \sin S' \cos I dI$ donne, lorsque $dS' = -\frac{\zeta \sin A}{\sin I}$, et que ..... $dI = \zeta \cos A$,

$$d.\sin l = -\zeta \sin A \cos S' + \zeta \cos A \sin S' \cos I;$$

d'où l'on tire, en substituant l'unité à la place de cos l et de cos I, ce que l'on peut faire sans aucune erreur sensible, à cause de la petitesse de l et de I, et de celle des équations qu'on veut réduire:

$$dl = \zeta \sin(S' - A).$$

On voit par là qu'en faisant A successivement égal à tous les argumens des équations omises, et ζ égal à tous les coefficiens de ces équations dans la série de l'inclinaison, on pourra déterminer immédiatement les équations qui en résultent dans la latitude.

(**) Soit $\delta \sin A$ une équation du nœud,

$i\delta \cos A$ sera l'équation correspondante de l'inclinaison,

i étant la tangente de l'inclinaison de l'orbite;

il trouve $\frac{1}{2} i^2 \delta \sin(A - 2S')$ pour la correction que ces équations produisent dans la réduction à l'écliptique.

Le volume des Mém. de Paris pour 1752 contient, p. 593 — 622, un autre Mémoire de Clairaut sur la théorie de la Lune, qu'il présenta le 30 avril 1755, et qui a pour titre : *Construction des Tables du mouvement horaire de la Lune*. Il contient l'exposition de la méthode par laquelle il était parvenu à déterminer l'expression générale de la variation horaire du lieu de la Lune, et renferme les tables de ce mouvement, qu'il avait construites au moyen de cette formule.

Mémoire de Clairaut présenté à l'Académie des Sciences, en 1755.

Le premier moyen qui se présente pour avoir le mouvement horaire de la Lune pour un instant quelconque, est de calculer le lieu de la Lune pour cet instant, et ce même lieu une heure plus tard ; la différence de ces deux lieux est le mouvement horaire demandé. Mais cette méthode lui parut trop pénible pour ne pas chercher à l'abréger, et voici comment il y parvint. Supposant que $e \sin A$ fût une des équations quelconques du lieu de l'astre, il chercha la quantité α dont l'angle A, argument de l'équation proposée, variait pendant une heure ; $e \sin (A + \alpha)$ représentant alors ce que devenait $e \sin A$ au bout d'une heure, la différence de ces deux expressions devait être l'équation du mouvement horaire, correspondante à l'équation $e \sin A$ du lieu (*); d'où il tira, en réduisant, une expression très simple de la première. Reprenant ensuite l'expression générale du lieu de la Lune, il y fit A successivement égal à tous les argumens qui s'y trouvaient ; α égal aux mouvemens moyens de ces argumens pendant une heure ; enfin e égal aux coefficiens qu'ont les sinus de ces argumens, et il obtint la valeur de chaque équation correspondante du mouvement horaire (**), en négligeant les huit dernières, à cause de leur petitesse ; ce qui réduisit le nombre de ses Tables du mouvement horaire à quatorze.

Méthode pour déterminer le mouvement horaire du lieu de la Lune.

La variation horaire de la longitude ne diffère de celle du lieu dans l'orbite que par la variation de la réduction à l'écliptique. Pour l'obtenir, il faut reprendre l'argument de la latitude, lui ajouter sa variation horaire moyenne, et y appliquer aussi le résultat des équations de la variation horaire du lieu de la Lune. Ayant ainsi le nouvel argument de la latitude pour l'instant qui suit d'une heure le premier lieu calculé, on aura, par le moyen de cet argument et de la même inclinaison de l'orbite, la nouvelle réduction à l'écliptique, en négligeant les corrections insensibles qu'y pourraient apporter la variation horaire des nœuds et celle de l'inclinaison de l'orbite. Enfin, pour déterminer la variation horaire de la latitude de la Lune, il commence par calculer les changemens que les cinq équations de l'argument de la latitude et les trois de l'inclinaison peuvent subir pendant une heure, et il examine ensuite la variation que peuvent éprouver, dans le même temps, les huit dernières équations de la latitude ; mais les corrections que ces dernières produisent dans la latitude sont si légères, qu'elles peuvent aussi être négligées ; ce qui borne à sept le nombre des tables de correction de la latitude pour le mouvement horaire.

Variations horaires de la longitude et de la latitude.

(*) Il obtint ainsi $$e \sin (A + \alpha) - e \sin A = e\alpha \cos A - \frac{e\alpha^2}{2} \sin A$$
pour l'équation cherchée du mouvement horaire, quand on se borne au carré de α ; mais le plus souvent, à cause de la petitesse du coefficient e, on peut se borner au premier terme.

Si l'équation du lieu était représentée par $e \sin A$ au lieu de $e \cos A$, l'équation du mouvement horaire serait $-e\alpha \sin A - \frac{e\alpha^2}{2} \cos A$.

(**) Ainsi, par exemple, la première équation du lieu étant $-22664'' \sin y$, et le mouvement moyen de y pendant une heure étant de 32′ 40″, on aura, en prenant $e = -22664''$ et $\alpha = 32' 40'' = 0{,}009503$, $-3' 35'',4 \cos y + 1'' \sin y$ pour l'équation horaire du lieu de la Lune dépendant de l'argument y.

CHAPITRE III.

Théorie de la Lune, de d'Alembert.

Nous venons de passer successivement en revue toutes les parties de la solution du problème des trois corps donnée par Clairaut. Pour juger avec impartialité celle de d'Alembert, il faut nous reporter à l'époque où aucun des travaux du premier n'était encore publié, afin de voir sous quel point de vue d'Alembert envisagea la question, et de bien constater toutes les idées dont il ne fut redevable qu'à son génie.

Mémoire de d'Alembert, lu en 1747.

Après avoir envoyé à l'Académie de Berlin des recherches sur la théorie de la Lune, d'Alembert lut à celle de Paris, le 14 juin 1747, un Mémoire ayant pour titre : *Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvemens de toutes les planètes, en ayant égard à leur action mutuelle.* Il est imprimé à la suite des premières recherches de Clairaut, dans les *Mém. de Par.*, 1745, p. 365, l'Académie ayant permis à ces deux auteurs d'avancer ainsi de deux ans la publication de leurs premières solutions. D'Alembert commence par faire voir que pour trouver l'orbite d'une planète autour du Soleil, il faut transporter à cette planète, en sens contraire et dans une direction parallèle, les forces accélératrices que cette planète et toutes les autres exercent sur le Soleil, puis combiner ces forces avec les forces attractives du Soleil et des autres planètes sur la planète proposée, et avec la vitesse de projection apparente de celle-ci. Il fait voir ensuite que la détermination exacte de l'orbite d'une planète autour du Soleil dépend de trois choses : 1°. de la projection de cette orbite sur le plan de l'écliptique (en entendant par là un plan fixe qui passe par le Soleil et dont la Terre s'écarte fort peu) ; 2°. du mouvement des nœuds ; 3°. de l'inclinaison de l'orbite à chaque instant. Il s'occupe successivement de déterminer chacun de ces trois élémens.

Équation différentielle de l'orbite.

Pour cela il cherche d'abord l'équation différentielle de l'orbite décrite par un corps A, attiré par un autre corps S, en raison inverse du carré des distances, et soumis de plus à l'action de deux forces φ et π, l'une dirigée vers S, l'autre perpendiculaire à la première. Il obtient l'expression du carré de la vitesse v de A, au point où sa distance à S est x, en fonction de la vitesse initiale g, de la distance primitive a, de la force principale $\frac{Fa^2}{x^2}$ et des forces perturbatrices (*). Il détermine le temps employé à parcourir un secteur infiniment petit. Supposant ensuite que l'orbite ne diffère pas beaucoup d'un cercle ; que l'angle de la direction primitive du mouvement avec le rayon vecteur est droit, et que les forces φ et π sont très petites par rapport à F ; enfin faisant $\frac{1}{x}$ égal à $\frac{F}{g^2} - \frac{t}{a^2}$, t étant une nouvelle variable très petite, il parvient à une équation en d^2t, dont les

(*) La force F est égale à celle qu'exercerait, à la distance a, un corps placé en S, et égale à la somme des masses S + A ; il obtient

$$v^2 = g^2 - 2Fa\left(1 - \frac{a}{x}\right) - 2\int\left(\varphi dx - \frac{\pi x dz}{a}\right).$$

deux premiers termes sont linéaires, et dont le troisième est le produit du carré de l'élément dz de l'arc pris pour variable indépendante, par une fonction des forces perturbatrices qu'il désigne par M (*). Si l'on pouvait réduire M à une fonction de z, l'intégration serait facile par la méthode que d'Alembert avait déjà indiquée [art. 101 de sa *Dynamique*, et art. 80 de son ouvrage *sur les Vents*] (**). Or, « comme l'orbite de la » planète autour du Soleil n'est que très peu dérangée par l'action de tous les autres » corps, on trouvera à peu près le point où la première se trouvera; on connaîtra de » même, approximativement, les points où se trouveront les autres planètes dans leurs » orbites, puisqu'elles sont censées se mouvoir à peu près uniformément, et dans des » orbites circulaires. Ainsi l'arc z étant donné, on aura les expressions en z de tous les » arcs décrits par les autres corps; on aura donc aussi les expressions de leurs actions » sur la planète que l'on considère; ces actions étant rapportées sur le plan de projec- » tion et décomposées, donneront les expressions de φ et π en fonction de z, et de là la » valeur cherchée de M. »

Mouvem. des nœuds et variation de l'inclinaison.

Il indique ensuite comment on calculera le mouvement des nœuds, ainsi que la variation de l'inclinaison (***).

Méthode d'approximations successives.

Si, après cette approximation, on voulait, dit-il, un plus grand degré d'exactitude, on pourrait recourir aux méthodes connues pour avoir, avec toute la précision désirée, les quantités dont on a déjà les valeurs approchées. Ainsi, dans la première approximation, on pouvait supposer dans M, t nul, v^2 égal à Fa et ds égal à dz; dans la seconde,

---

(*) L'équation approchée de l'orbite est

$$d^2t + \frac{tdz^2}{a^2} + \frac{dz^2}{g^2}\left\{\varphi - 2\int\frac{\pi dz}{a^2}\right\} = 0.$$

(**) Soit en effet l'équation

$$d^2t + tdz^2 + Mdz^2$$

à intégrer: supposons qu'on ait

$$dt - ydz = 0,$$

valeur qui réduit l'équation différentielle à

$$dy + tdz + Mdz = 0,$$

on a, en ajoutant ces deux dernières équations, multipliant successivement leur somme par $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, et supposant ensuite $t + y\sqrt{-1} = q$, $t - y\sqrt{-1} = k$, les deux équations

$$dq + qdz\sqrt{-1} + Mdz\sqrt{-1} = 0,$$
$$dk - kdz\sqrt{-1} - Mdz\sqrt{-1} = 0,$$

qui sont linéaires du premier ordre, et dont l'intégration (que Jean Bernoulli avait effectuée dès 1697) donne les valeurs de q, de k et celle de $t = \frac{q+k}{2}$, qui renferme des expressions imaginaires que l'on peut toujours faire disparaître.

(***) Soit ξ la force parallèle au plan de projection,
r le sinus de la distance angulaire de la planète à la ligne des nœuds,
r' le sinus de l'angle que fait la direction de la force ξ avec la ligne des nœuds,
ds l'élément de la trajectoire,
m' la tangente de l'inclinaison de l'orbite;

il trouve $\xi\frac{ds^2.arr'}{v^2xds}$ pour la valeur approchée de l'angle élémentaire du mouvement des nœuds; et le produit de cette expression par $\frac{\sqrt{1-r^2}}{m'r}$ représente la variation instantanée de la cotangente de l'inclinaison.

M sera une fonction de z et de t, et l'on n'y supposera plus les élémens constans; mais en substituant pour t sa première valeur, elle sera exprimée en fonction de la seule variable z. L'équation de l'orbite pourra toujours se diviser en deux parties, dont l'une sera l'équation de l'ellipse que la planète aurait décrite, si elle eût été attirée simplement vers le point S en raison inverse du carré de la distance, et dont l'autre ϖ, marquera la correction qu'il faudra faire au rayon de cette ellipse pour avoir l'orbite véritable. On cherchera de même le secteur elliptique qui y répond, et la petite quantité ζ dont il faut l'augmenter pour avoir le secteur correspondant de l'orbite projetée; puis multipliant ζ par le cosinus de l'inclinaison, on aura l'accroissement du secteur de l'orbite de la planète.

« D'après cette méthode, il n'y aura plus, dit-il, aucun des corps célestes dont on ne » puisse donner la théorie avec la dernière précision, en employant à cette recherche » le temps que demandent d'assez longs calculs analytiques; elle s'appliquerait facilement » à la recherche des orbites fort excentriques et fort inclinées à l'écliptique, ainsi qu'à la » détermination des orbites des satellites autour de leurs planètes principales. »

D'Alembert fait usage de la méthode précédente dans la seconde partie de son Mémoire (remise à l'Académie le 6 novembre 1747), pour la recherche de l'orbite de la Lune. Il obtient les valeurs de φ et de ϖ en fonction de la distance variable B' de la Terre au Soleil, de celle de la Lune à la Terre, et du supplément θ de l'élongation de la Lune au Soleil. Il présente les sinus et cosinus sous la forme d'exponentielles imaginaires; ce qui a, suivant lui, l'avantage de réduire l'intégration à celle de fonctions de la forme $c^{A+nz\sqrt{-1}}dz$, n et A étant des constantes, et d'indiquer à quels multiples appartiennent les sinus ou cosinus qui doivent représenter l'intégrale. Supposant que N^2 désigne le coefficient de tdz^2 dans l'équation différentielle, il intègre, en négligeant dans M les termes où t se rencontre; et réduisant θ à une fonction de z, il obtient $\delta \cos Nz$ pour le premier terme de la valeur de t. Or, ce terme est beaucoup plus grand que les autres, δ est à peu près égal à l'excentricité de l'orbite; ainsi l'apogée de la courbe sera, à quelques degrés près, aux points où $\sin Nz = 0$; le mouvement de la planète sera à celui de son apogée :: $1 : 1 - N$; et comme il trouve à très peu de chose près $N = \sqrt{1 - \frac{3}{2}n^2}$ (n étant le rapport des temps périodiques du Soleil et de la Lune), il en conclut que le mouvement de l'apogée n'est que d'environ 1° 31′ par révolution. D'Alembert avait déjà indiqué, six mois auparavant, cette méthode de le déterminer, et avait alors remarqué qu'une très petite erreur dans la valeur de x peut en produire une très grande dans ce mouvement; nous avons même déjà parlé du résultat auquel il fut alors conduit. C'est par les considérations qu'il en tire, que se termine le Mémoire que nous analysons, qui est bien remarquable, comme réduisant la détermination du mouvement de la Lune à l'intégration d'une équation du second ordre par approximation, mais qui, sur quelques points, est peut-être encore un peu obscur et incomplet. L'auteur n'y indique pas par exemple comment on peut tirer de l'expression générale du temps une relation entre les mouvemens vrai et moyen de la Lune. On voit que n'ayant pas fait encore d'application numérique de ses formules, il n'appercevait pas complètement toutes les difficultés du problème, et que ses idées conservaient encore quelque chose du vague des premières conceptions.

Application des méthodes précédentes à la Lune.

Conclusion qu'il en tire sur le mouvement de l'apogée.

Au moment où Clairaut trouva, par la théorie, le vrai mouvement de l'apogée,

d'Alembert était occupé de ses belles recherches sur la précession des équinoxes, et ne vérifia point ce calcul ; il convint cependant de sa méprise, et s'en excusa sur l'obligation où il avait été de suivre l'exemple de Clairaut, en hâtant la publication de son premier Mémoire, avant que des recherches plus exactes lui fissent apercevoir son erreur. Il reprit ensuite ce sujet, et la théorie de la Lune en général ; mais quoiqu'il crût avoir alors rempli les principales vues de l'Académie de Pétersbourg, quelques raisons particulières l'ayant empêché de concourir, il se contenta (ainsi qu'il le dit, Disc. prél. *Rech.*, p. 43) de remettre sa théorie de la Lune à M. de Fouchy, le 10 janvier 1751, près de neuf mois avant le jugement de l'Académie de Pétersbourg, et long-temps avant qu'aucun ouvrage sur ce sujet eût été mis au jour. C'est cette théorie qu'il a publiée ensuite en 1754, dans le premier volume de ses *Recherches sur différens points importans du système du Monde*, en y faisant seulement quelques additions qu'il distingue soigneusement de ce qui était fait trois ans auparavant.

Liv. Ier des *Recherches* de d'Alembert. Théorie de la Lune.

Nous allons exposer rapidement la marche qu'il suit dans cet ouvrage.

Forces qui agissent sur la Lune.

Il commence par chercher les expressions des forces ψ et ϖ qui agissent sur la Lune dans son orbite projetée sur l'écliptique, en négligeant, ainsi que Clairaut, à cause de leur petitesse, l'action des différentes planètes sur la Terre et sur la Lune, et celle de la Terre et de la Lune sur le Soleil. (*Voyez* note 4, § 3.) D'Alembert détermine ensuite l'équation de l'orbite projetée, en la comparant à celle qui serait décrite en vertu d'une seule force centrale Q. Cette méthode, qu'il avait déjà indiquée dans son premier Mémoire, a l'avantage de ramener le problème à un autre déjà connu, et dont il obtient très facilement la solution au moyen de l'équation des aires et de celle des forces vives. La différence entre le cas d'une seule force et celui de l'orbite engendrée par l'action de deux forces, c'est que les secteurs qui sont proportionnels au temps dans celui-là ne le sont pas dans celui-ci. Cherchant donc la variation de l'aire, puis égalant les expressions du petit espace parcouru suivant la direction du rayon vecteur dans l'élément du temps, en vertu de la seule force Q dans le premier cas, et des deux forces ψ et ϖ dans le second, il obtient une valeur de Q en fonction des forces perturbatrices ; et sa substitution dans l'équation différentielle lui donne l'équation de l'orbite cherchée (*).

Équation différentielle de la trajectoire.

Avant de la résoudre, d'Alembert cherche l'expression de la différentielle du mouvement des nœuds de la Lune au moyen d'une construction géométrique assez compliquée ; il trouve plus simplement la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Pour appliquer sa méthode générale d'intégration à l'équation de l'orbite lunaire, d'Alembert commence par montrer la petitesse des forces perturbatrices comparées à la force principale de la Terre sur la Lune, et il en conclut que l'effet des premières devra peu écarter l'orbite de la Lune de la courbure circulaire ; il fait voir ainsi qu'en appelant u l'inverse $\frac{1}{x}$ de la distance accourcie de la Lune à la Terre, K la valeur de u pour l'orbite circulaire, et faisant en général u égal à $K + t$, t devra être une très petite quantité ; substituant alors cette valeur de u dans l'équation de l'orbite, elle devient différentielle

(*) Savoir : $d^2u + udz^2 - \frac{dz^2}{u^2g^2}\cdot\frac{\psi - \frac{\varpi du}{udz}}{1 + 2\int\frac{\varpi dz}{u^3g^2}} = 0$, où $u = \frac{1}{x}$. (*Voyez* note 2, § 2.)

du second ordre par rapport à la variable t, et son premier membre est de la forme $d^2t + N^2tdz^2 + Mdz^2$, N^2 marquant un coefficient constant, et M une fonction de t, de $\frac{dt}{dz}$ et de différens sin. et cos. des angles z, z' et ζ parcourus par la Lune, la Terre et la ligne des nœuds au bout d'un temps déterminé. Il expose ensuite la méthode des substitutions successives, qu'il avait indiquée dans le Mémoire précédent, pour résoudre cette équation, en y faisant une modification importante relative aux arcs de cercle que son intégration pourrait introduire, et dont il n'avait pas parlé d'abord. Il est évident, en effet, que si après avoir obtenu une première valeur de t, on la substitue dans la partie de M qui est fonction de t, et que cette substitution y introduise des termes de la forme A cos $(B + Nz)$, une nouvelle intégration produira, dans la valeur de t qui en résultera, et à cause du passage de la quantité N sous le signe cos. comme multiple de z, des termes où l'arc z se trouvera en dehors des signes périodiques. Cette valeur serait fautive, puisqu'elle croîtrait avec le temps et pourrait devenir très grande, tandis que nous avons vu que t devait être essentiellement une quantité très petite. D'Alembert propose alors un moyen de prévenir ce grave inconvénient de la méthode des substitutions successives. Dans le cas où la valeur de $H + P \cos Nz +$ etc. mise à la place de t dans M, y ferait naître le terme $\gamma \cos Nz$, il prescrit de mettre la fonction N^2tdz^2 sous la forme $\left(N^2 + \frac{\gamma}{P}\right)tdz^2$, en ajoutant aussi à M le terme $-\frac{\gamma}{P}tdz^2$; par ce moyen la quantité $\gamma \cos Nz$, qui se trouve dans M est détruite par la quantité $-\gamma \cos Nz$ provenant de la substitution de $H + P \cos Nz$ à la place de t dans le terme $-\frac{\gamma}{P}tdz^2$.

Méthode pour prévenir l'introduction des arcs de cercle.

Après avoir, dans les six premiers chapitres, exposé toute la partie générale de sa solution, il passe au développement des opérations successives par lesquelles il doit parvenir à déterminer le mouvement troublé. Il commence par négliger l'excentricité de l'orbite terrestre, les termes de ψ et ϖ qui ont B'^5u^3 ou B'^5u^2 au dénominateur, et ceux de M qui sont multipliés par t; il regarde la tangente de l'inclinaison m comme constante, et les angles z', ζ comme égaux à nz et pz : n étant toujours le rapport des moyens mouvemens de la Terre et de la Lune, et p celui du mouvement des nœuds au mouvement de la Lune. Il substitue alors les valeurs des forces ψ et ϖ dans l'équation différentielle (*), et parvient, en l'intégrant, à une valeur de t dont le premier terme, qui a pour coefficient l'excentricité δ de l'orbite lunaire, ne lui donne encore que la moitié du mouvement de

(*) Les valeurs de ces forces, pour la première approximation, sont, en faisant $\frac{S}{B'^3} = (T+L)n^2$,

$$\psi = (T+L)\left\{u^2 - \frac{3}{4}m^2u^2\,[1 - \cos 2(z - pz)] - \frac{n^2}{2u}\,[1 + 3\cos 2(z - nz)]\right\};$$

$$\varpi = -\frac{3n^2(T+L)}{2u}\sin 2(z - nz); \quad (\textit{voyez note 4, § 3})$$

il réduit $\dfrac{\psi - \frac{\varpi du}{udz}}{1 + 2\int\frac{\varpi dz}{u^3g^2}}$ à $\psi\left(1 - 2\int\frac{\varpi dz}{u^3g^2}\right)$, et ne conserve $\int\frac{\varpi dz}{u^3g^2}$ en facteur, que pour le premier terme de la valeur de ψ.

l'apogée ; il calcule, dans la même hypothèse, le mouvement des nœuds et la variation de l'inclinaison, et les trouve par là assez d'accord avec les observations (*).

Remarques sur l'ordre des termes et sur les quantités qui peuvent augmenter par l'intégration.

Avant de faire une seconde approximation, d'Alembert examine les petites quantités auxquelles il faut avoir égard pour corriger l'orbite ; il regarde δ, n, m, et l'excentricité λ de l'orbitre terrestre, comme des quantités *infiniment petites du premier ordre ; p*, n^2, m^2, $n\lambda$ comme étant du *second ordre ;* n^3, λ^2 et c comme étant du *troisième ordre ;* il borne l'approximation à ces trois ordres, et il adopte pour N la valeur $1 - \frac{3n^2}{2}$ qui répond aux observations. « Il y a des termes dans l'équation différentielle de l'orbite (dit-il, » page 44) dont les coefficiens augmentent considérablement par l'intégration ; ce sont » ceux qui contiennent des quantités de la forme cos Rz, R marquant un coefficient qui » diffère peu de N, mais qui ne lui est pas exactement égal. Cela vient de ce qu'il » faut, pour les intégrer, les diviser par la quantité $N^2 - R^2$, qui est très petite, et qui » se trouve de l'ordre de N (au moins), lorsque la différence de N et de R est de ce » même ordre. De là il s'ensuit qu'il n'est pas permis de négliger les quantités du *qua-* » *trième ordre* en cos Rz dans les termes de l'équation différentielle, quand on veut avoir » égard aux quantités du *troisième* dans la valeur de *t*.... Quant aux termes où se trouve » cos Nz il faut aussi avoir égard, dans leurs coefficiens, aux quantités du quatrième » ordre, parce qu'étant divisés par une quantité P, qui est censée infiniment petite du pre- » mier ordre, ils deviendront du troisième, abstraction faite des quantités numériques qui » peuvent multiplier ces coefficiens, et en augmenter ou diminuer beaucoup la valeur. » Enfin, il faut faire une grande attention aux termes de l'équation de l'orbite où se » trouvent des quantités de la forme cos kz, k étant une quantité fort petite de l'ordre n » ou au-dessous ; parce que, quoiqu'ils ne deviennent pas plus grands dans l'équation » intégrée de l'orbite que dans l'équation différentielle, ils augmentent beaucoup de » valeur dans l'expression du temps, où ils acquièrent le petit diviseur k par l'intégration. » S'il s'en rencontre qui soient déjà sous le signe $\int$ dans la valeur de l'élément du temps, » il faudra pousser les coefficiens de ces termes jusqu'aux quantités infiniment petites du » cinquième ordre, puisqu'ils seront abaissés au troisième par la double intégration (**). »

Exposition succincte de la marche suivie par d'Alembert dans sa 2e approximation.

Après avoir fait ces observations et donné à propos du développement des sin. et cos. des quantités composées de plusieurs termes, une démonstration du théorème de Taylor trop élégante pour n'être pas citée, d'Alembert passe au développement des calculs qu'exige une deuxième approximation ; il substitue, dans les expressions des forces, les

---

(*) La formule $d\zeta = -\frac{3Sdt^2}{B'^3dz}\cos(z-z')\sin(z-\zeta)\sin(z'-\zeta)$ lui donne $+\frac{3n}{8}\sin 2(n^2z-pz)$ pour la plus grande équation du mouvement des nœuds, et la formule $\frac{dm}{m} = d\zeta\cot(z-\zeta)$ lui donne, pour l'équation correspondante de l'inclinaison, $\frac{3n}{8}\mu\cos 2(nz-pz)$, μ étant le rapport de l'inclinaison moyenne au rayon.

(**) En effet, le temps étant donné par la formule $\int\frac{dz}{gu^2}\left\{1-\int\frac{\pi dz}{u^3g^2}+\frac{3}{2}\left(\int\frac{\pi dz}{u^3g^2}\right)^2+\text{etc.}\right\}$, supposons que la valeur de t contienne un terme en cos qz, q étant fort petit : ce terme entrera aussi dans $u = K + t$, ce qui amènera dans $\int\frac{dz}{u^2}$ la quantité $-\frac{2\sin qz}{K^3 . q}$, et pourra, dans le cas où $\frac{\pi dz}{u^3g^2}$ contiendrait aussi un terme en cos qz, introduire, par sa double intégration par rapport à z, un terme semblable divisé par q^2, dans la valeur finie du temps.

valeurs de t, m et ζ qu'il a obtenues par la première opération, celle du rayon vecteur B′ de l'orbite elliptique de la Terre (*), et celle de z', qu'il obtient en fonction de z, en égalant, ainsi que Clairaut, les expressions des temps employés par chaque astre respectif à décrire ces angles. Il détermine ensuite les termes de l'équation différentielle de l'orbite où entrent les forces, et, les rassemblant tous, il la réduit ainsi de nouveau à la forme d'une équation linéaire du second ordre, qu'il intègre en désignant, pour abréger, par des lettres, les coefficiens composés de plusieurs termes. Ayant obtenu par là la valeur cherchée de t et de u, en fonction des cos. des multiples des angles z, Nz, ϖnz, pz et nz, des premières et deuxièmes puissances de l'inclinaison, du rapport des moyens mouvemens, de l'excentricité lunaire, et de la première puissance de l'excentricité terrestre, il passe, dans le chap. 9, à la détermination du temps que la Lune emploie à parcourir un arc quelconque de son orbite. Il y parvient, ainsi que Clairaut, en intégrant son équation différentielle, où il substitue la valeur précédente de u; il obtient ainsi la valeur de la longitude moyenne de la Lune Z, en fonction des sin. de la longitude vraie z, et réciproquement l'expression de celle-ci en fonction des sin. des multiples de la première; ce qui lui donne immédiatement le lieu vrai de la Lune dans l'écliptique. Pour rendre la formule encore plus applicable aux usages astronomiques, il y introduit le mouvement vrai z' du Soleil au lieu du moyen nZ. Enfin, il corrige l'équation de l'inclinaison par une substitution poussée au second ordre, ce qui entraîne aussi l'admission réciproque de quelques nouveaux termes dans l'équation de l'orbite et dans celle du lieu.

Le chap. 12 est consacré au calcul numérique des différens termes de la formule du lieu de la Lune; l'auteur exprime leurs coefficiens par une suite de fractions décroissantes dont les dénominateurs sont facteurs de 360, ce qui facilite leur réduction en degrés (**).

Le mouvement moyen de l'apogée Z—NZ n'étant pas encore assez exactement déterminé, d'Alembert est ainsi conduit, pour vérifier sa théorie sur ce point, à le calculer en ne négligeant que les quantités infiniment petites du septième ordre; ce qui l'oblige à employer de nouveaux termes, tels que le troisième de l'expression générale du temps; à évaluer plus exactement les premiers, et le conduit enfin à la quantité 3° 2′ 33″ pour le mouvement de l'apogée, que les observations donnent de 3° 3′ 37″. *Calcul plus exact du mouvement de l'apogée et du lieu.*

Ce sont les équations définitives qu'il vient d'obtenir qui lui servent à construire ses tables. Il suit pour cela une méthode particulière, qui consiste à réduire en formules les tables faites d'après la théorie de Newton, à les comparer ensuite avec les siennes, et à n'en construire de nouvelles que pour les différences qui existent entre les équations *Tables de Newton réduites en formules, et tables de correction.*

(*) $B' = B(1 + \lambda \cos \varpi n' z)$.

(**) Ainsi il met $n = \frac{1}{13\frac{1}{2}}$ sous la forme $\frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} - \text{etc.}\right)$, qu'on obtient en développant $\left(12 + \frac{3}{2}\right)^{-1}$ ou $\frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{-1}$; et comme les coefficiens sont en général donnés en parties du rayon pris pour unité, pour les réduire en degrés, il les multiplie par la valeur 57° 18′ du rayon ou sinus total, en faisant

$$57^\circ\, 18' = 60^\circ \left(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{180} - \text{etc.}\right);$$

forme qui résulte de ce que $57^\circ\,18' = 60^\circ - 2^\circ{,}7$, et de ce que $\frac{2{,}7}{60} = \frac{1}{22 + \frac{2}{9}} = \frac{1}{20}\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1}$.

ayant le même argument dans l'une et l'autre théorie, ou pour les nouvelles équations données par le calcul analytique. Il adopte pour tables de comparaison celles des *Institutions astronomiques* de Lemonnier, qui étaient fondées sur celles de Flamsteed, et il indique un procédé particulier pour faciliter la construction des nouvelles. Il consiste à chercher, dans les tables déjà calculées, les parties aliquotes qui peuvent représenter les équations que l'on veut réduire en tables : ainsi, par exemple, les tables des équations 36″ sin 2A, et 47″ sin 2A lui servent aussi à construire celle de l'équation 12′ 23″ sin 2A, en ajoutant le tiers de la première à la moitié de la seconde.

D'Alembert calcule ensuite la parallaxe de la Lune au moyen de la formule qui donne l'inverse de son rayon vecteur, sa latitude au moyen du mouvement des nœuds et de la variation de l'inclinaison, en ayant égard aux quantités du second ordre, et il termine sa théorie par le recueil de ses nouvelles tables. Celles-ci ont pour argumens les lieux moyens de la Lune, de l'apogée et du nœud, et le lieu vrai du Soleil; elles sont au nombre de dix-sept pour la longitude, entre lesquelles onze sont analogues à celles des *Institutions astronomiques;* il emploie les deux équations du mouvement du nœud déjà connues, en les corrigeant au moyen de cinq autres tables, pour trouver la distance du lieu vrai de la Lune au lieu vrai du nœud. Il ajoute aussi six équations à celle de l'inclinaison que les astronomes employaient déjà; et c'est de la détermination de ces élémens qu'il conclut la latitude. Enfin, il donne une table pour la correction des parallaxes et des demi-diamètres de la Lune. Mais au lieu de vérifier ensuite, ainsi que Clairaut, sa théorie par les observations, il se borne à comparer ses tables avec celles de Lemonnier et celles qu'Euler avait données en 1746 et 1750.

Observations sur l'emploi de la méthode des indéterminées.

Avant de terminer cette esquisse rapide des premiers travaux de d'Alembert sur le problème des trois corps, il n'est pas inutile de remarquer que l'application qu'on pouvait faire de la méthode des coefficiens indéterminés à la théorie de la Lune, n'avait pas échappé à sa sagacité. Voici ce qu'il dit à ce sujet (p. 106) : « A l'égard de l'intégration de l'équation » de l'orbite, j'aurais pu supposer u égal à $R + P \cos Nz + D \cos 2(z - nz) +$ etc., R, P, D » étant des coefficiens indéterminés ; et substituant cette expression dans l'équation diffé- » rentielle, déterminer comme à l'ordinaire la valeur de chaque coefficient. Cette manière » d'appliquer la méthode des indéterminées à la solution du problème dont il s'agit, est » sans comparaison la plus courte et la plus facile de toutes, puisqu'elle ne demande ni » intégration, ni aucune adresse de calcul; d'ailleurs elle se présente très naturellement, » elle est familière aux géomètres, et a été déjà très souvent mise en usage pour l'inté- » gration des équations. Cependant j'ai cru devoir lui préférer la méthode que j'ai suivie, » quoiqu'elle soit un peu plus longue ; et voici les raisons qui m'y ont engagé : pour pou- » voir supposer u égal à $R + P \cos Nz +$ etc., il faut s'être assuré auparavant que u doit » avoir en effet cette forme; car une équation différentielle ou une équation intégrée qui » renferme des signes $\int$ peut avoir, et a souvent en effet, plusieurs intégrales. Il faut » donc démontrer, ou que l'intégrale qu'on suppose est unique, ou au moins qu'elle est la » seule qui convienne au problème proposé; et lors même que la valeur trouvée serait » assez conforme aux observations, on sent que ce moyen de confirmer la solution est » indirect et peut être insuffisant...... Cette méthode peut aussi induire en erreur, soit » parce qu'on peut donner à l'intégrale une forme fautive, soit parce que les coefficiens » étant indéterminés, et par conséquent d'une valeur inconnue, on n'est jamais parfaite- » ment sûr de la valeur des quantités qu'on néglige, sur-tout dans un cas aussi compliqué.

» Au reste, je ne prétends point en condamner absolument l'usage, mais observer seulement qu'il faut prouver, en l'employant, que la forme qu'on suppose à l'équation est en effet la seule qu'elle doit avoir, et j'ai cru qu'il était plus court de chercher directement cette forme en intégrant rigoureusement et absolument l'équation proposée.

CHAPITRE IV.

Première Théorie de la Lune, d'Euler.

EULER envoya à l'Académie de Pétersbourg, dont il était membre honoraire, son jugement sur la pièce de Clairaut, avec une dissertation latine très étendue, qu'il avait composée quelque temps auparavant sur le même sujet. Cette Académie la fit ensuite imprimer à Berlin, sous les yeux de l'auteur, et elle parut en 1753 sous le nom de *Theoria motus Lunæ*. Le but principal qu'Euler paraît avoir eu dans cet ouvrage, est de résoudre la question du mouvement de l'apogée. « Le célèbre Clairaut, dit-il, n'ayant pas encore » exposé publiquement les raisons qui l'ont porté à rétracter sa première assertion sur » l'insuffisance de l'attraction Newtonienne, qu'il me soit permis, à moi qui ai toujours été » d'une opinion contraire à celle qu'il énonce maintenant, et qui m'y suis confirmé depuis » long-temps par plusieurs méthodes différentes, de ne pas regarder la question comme » décidée jusqu'à ce que je sois parvenu à la résoudre par mes propres recherches.... Je » considérerai d'abord le problème dans sa plus grande généralité, afin de déterminer le » mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques; j'introduirai ensuite dans » le calcul les expressions de celles auxquelles la Lune est soumise, et je donnerai les » équations de son mouvement; je les transformerai de diverses manières, jusqu'à ce » qu'elles soient mises sous la forme la plus convenable; enfin, je m'attacherai à en » conclure, tant le mouvement de l'apogée que toutes les inégalités de la Lune, de manière à parvenir à leurs véritables expressions, dans le cas même où la loi de Newton » serait en défaut. » Passons rapidement en revue les divers points de cette théorie.

But principal de cet ouvrage d'Euler.

Euler introduit le premier l'emploi des trois équations du mouvement varié en coordonnées rectangulaires, et il suppose le mobile soumis à l'action de trois forces situées aussi à angle droit; la première P, dirigée suivant la distance accourcie, ou la ligne qui joint le point où le mobile est projeté sur l'un des plans coordonnés, et le centre fixe pris pour origine; la seconde Q, située dans le même plan et en sens contraire du mouvement; la troisième R, perpendiculaire à ce plan, et tendant à en rapprocher le mobile; il parvient de là aux équations en fonction des coordonnées polaires x, ϕ et ψ, qui désignent la distance accourcie, la longitude et la latitude du mobile (*). Il décompose ensuite la troisième équation, au moyen d'une relation trigonométrique, pour obtenir les expressions diffé-

Équations du mouvement.

(*) Ces équations sont (note 2, § 3), en supposant prises avec le signe — les forces qui tendent à diminuer les coordonnées,

$$d^2x - xd\phi^2 = -\frac{1}{2}Pdt^2, \quad 2dxd\phi + xd^2\phi = -\frac{1}{2}Qdt^2, \quad d^2(x \tang\psi) = -\frac{1}{2}Rdt^2;$$

la fraction $\frac{1}{2}$, qui multiplie dt^2, disparaît dans l'élimination de l'élément du temps, et ne produit aucun changement dans les équations définitives.

rentielles du mouvement des nœuds ϖ, et de l'inclinaison ρ de l'orbite; la méthode par laquelle il y parvient, en regardant alternativement ϖ et ρ comme constantes et comme variables, est bien remarquable en ce qu'elle est déjà fondée sur le principe de la variation des constantes arbitraires (*).

Expressions des forces.

Il détermine ensuite les valeurs des forces dans le cas de l'orbite lunaire, en prenant l'écliptique pour plan de projection, et le centre du Soleil pour origine des coordonnées; il suppose la force du Soleil conforme à la loi de Newton, mais il introduit dans l'expression de l'attraction de la Terre sur la Lune un terme indéterminé qu'il suppose constant, et qui diminue la valeur qu'a cette attraction dans le cas de l'inverse du carré des distances (**). Nous n'entrerons pas dans les détails de toutes ses transformations préliminaires; il suffira de dire qu'il substitue, à la place de la distance z de la Lune au Soleil, sa valeur en fonction des deux autres côtés du triangle formé par les trois astres et de l'angle compris, et que le développement des puissances de la valeur de z étant très convergent, à cause de la petitesse du rapport de ces deux côtés, il se borne à ses quatre premiers termes. Il prend successivement pour variables indépendantes, le temps, l'anomalie moyenne du Soleil q et celle de la Lune p; il intègre alors une première fois la seconde équation du mouvement avec une constante arbitraire C, pour obtenir la valeur de $d\varphi$, qu'il substitue dans la

Transformations.

première équation. Il y met à la place du rayon y de l'ellipse solaire, sa valeur elliptique. Il suppose x égal à la valeur qu'il aurait dans le mouvement elliptique, multipliée par une variable u, qu'il fait ensuite égale à l'unité plus une nouvelle variable v; il introduit enfin l'anomalie vraie r de la Lune comme variable indépendante définitive; il désigne par $\int R\,dr$ la partie de la valeur de $d\varphi$ qui reste sous le signe de l'intégration; et ayant appelé

Équations fondamentales du problème.

θ l'angle parcouru par le Soleil, et ν l'élongation $\varphi-\theta$, il obtient, au moyen de l'équation des aires, la valeur de $d\theta$ en fonction des élémens de l'orbite du Soleil, et de là celle de $d\nu$, en retranchant la première de celle de $d\varphi$ et les développant (***). Il transforme aussi la

---

(*) Il obtient, au moyen de la troisième équation du mouvement et de la relation $\operatorname{tang}\psi=\operatorname{tang}\rho\sin(\varphi-\varpi)$, les deux équations :

$$d\varpi=\frac{1}{2}dt^2.\frac{\sin(\varphi-\varpi)}{x\,d\varphi}\left\{P\sin(\varphi-\varpi)+Q\cos(\varphi-\varpi)-\frac{R}{\operatorname{tang}\rho}\right\},$$

$$d(\log.\operatorname{tang}\rho)=\frac{d\varpi}{\operatorname{tang}(\varphi-\varpi)}.\quad (\textit{Voyez note 6, § 3.})$$

(**) Le rayon-vecteur a pour expression $\frac{\cos\psi}{x}$; Euler désigne par S, T, L les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune, et représente la force principale par $(T+L)\cos^2\psi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{h^2}\right)$; en supposant ensuite, pour abréger, $\frac{ma^2}{h^2}=\mu$, il obtient, pour les valeurs des trois forces, (*voyez note 4, § 4*)

$$P=(T+L)\cos^3\psi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{h^2}\right)+S\left[\frac{x}{z^3}-\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{y^2}\right)\cos\nu\right],\quad Q=S\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{y^2}\right)\sin\nu,$$

$$R=(T+L)\cos^2\psi\sin\psi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{h^2}\right)+S.\frac{x\operatorname{tang}\psi}{z^3},$$

où $z=\sqrt{y^2-2xy\cos\nu+x^2\operatorname{séc}^2\psi}$.

(***) Il suppose

$$y=\frac{b(1-e^2)}{1-e\cos s},\qquad x=\frac{a(1-k^2)}{1-k\cos r}.u,$$

première équation du mouvement en une autre dont le premier membre est la différentielle seconde de v par rapport à r, et dont le second membre consiste en une suite de termes de deux espèces. Les uns sont de simples fonctions de quantités non périodiques ou des cos. de l'angle $\varphi - \pi$, qui exprime la distance de la Lune à son nœud ascendant, des anomalies vraies r et s de la Lune et du Soleil, de l'élongation η et de la tangente de l'inclinaison ρ, multipliées par le rapport m des masses divisées par le cube des distances moyennes et par le rapport n des moyens mouvemens, par les deux premières puissances des excentricités k et e, par la variable v elle même et par son carré; les autres termes exprimés par les produits de $\int Rdr$ et de son carré par certains coefficiens, sont des fonctions des excentricités, de v, et des sin. des angles η, r et s, qui restent sous le signe de l'intégration, où elles sont multipliées par dr. Il parvient à des expressions analogues pour $d\pi$ et d log tang ρ. Toutes ces formules fondamentales étant données, il s'agit maintenant d'en conclure, par l'intégration, les valeurs cherchées des variables.

1re Classe. Inégalités provenant de l'élongation.

Intégration par les séries à coefficiens indéterminés.

Pour y parvenir plus facilement, Euler ne considère d'abord que les inégalités de la Lune qui proviennent de l'angle η et de ses multiples, en supposant nulles les excentricités et l'inclinaison de l'orbite, afin d'obtenir toute la partie de la *variation* de la Lune qui est indépendante de son excentricité. Il prend alors pour v et pour la fonction $\int Rdr$, qui exprime la partie variable et périodique de $d\varphi$, des valeurs composées d'une suite de produits des cosinus des quatre premiers multiples de η par des coefficiens indéterminés,

---

et obtient

$$d\varphi = \frac{dr}{u^2}\left(C - \frac{1}{n^2}\int Rdr\right),$$

en faisant

$$R = \frac{3}{2}\,\frac{(1-k^2)^3\,(1-e\cos s)^3}{(1-e^2)^3\,(1-k\cos r)^4}\,u^2 \sin 2\eta + \text{etc.},$$

C étant une constante.

Il fait, pour un moment,

$$x = a\sigma, \qquad y = b\omega;$$

les équations des aires donnent alors

$$\sigma^2 dr = dp\sqrt{1-k^2}, \qquad \omega^2 d\theta = dq\sqrt{1-e^2}.$$

En effet, le principe des aires donne directement pour la Lune, par exemple, l'équation

$$x^2 dr = dt\sqrt{a\,(1-k^2)(T+L)};$$

elle devient, dans le cas du mouvement moyen, où l'on suppose nulle l'excentricité,

$$a^2 dp = dt\sqrt{a(T+L)},$$

d'où l'on tire, en éliminant dt et divisant par a^2, la première des équations précédentes; il en est de même pour la deuxième. Il conclut de là, en faisant $dp = ndq$ et remettant pour σ et ω leurs valeurs elliptiques,

$$d\theta = \frac{1}{n}\,\frac{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}(1-e\cos s)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}(1-k\cos r)^2}\,dr.$$

Enfin retranchant cette valeur de celle de $d\varphi$, il obtient celle de $d\eta$, et faisant $u = 1 + \frac{v}{n^2}$, il change l'équation, qui était en d^2u, en une autre de la forme

$$\frac{d^2v}{dr^2} = C^2\left(n^2 - 3v + \frac{6v^2}{n^2}\right) - 2C\int Rdr + \frac{1}{n^2}\left(\int Rdr\right)^2 + \frac{3m\,\text{tang}^2\rho}{4}[1-\cos 2(\varphi-\pi)](1+k\cos r+\text{etc.})$$
$$+ 3k\cos(2\eta - r) - \frac{9}{4}e\cos(2\eta - s) + \text{etc., etc.}$$

(Voy. *Th. d'Eul.*, p. 45.)

les cos. des multiples impairs ayant aussi en facteur le rapport ν des moyennes distances a et b, ou le rapport des parallaxes du Soleil et de la Lune (*); il substitue cette valeur de $\int R dr$ dans les expressions de $d\varphi$ et de $d\eta$; il obtient ensuite, en la différenciant et en y substituant pour $d\eta$ la valeur précédente, une expression de R qui, étant comparée à sa valeur déjà connue, lui fournit, en égalant de part et d'autre les coefficiens des termes semblables, un certain nombre d'équations pour déterminer les coefficiens inconnus.

La substitution des valeurs supposées pour v et $\int R dr$, dans l'équation différentielle en d^2v, devant aussi la rendre identique, lui donne de nouvelles équations qui lui servent à compléter la détermination des inconnues; il parvient ainsi, au moyen des valeurs des élémens données en parties du rayon, savoir, le moyen mouvement n de la Lune et celui de la ligne des apsides c, et à l'aide de calculs fondés sur des approximations successives, à l'évaluation numérique des coefficiens de tous les termes dépendans des cos. de η et de ses multiples qui entrent dans les valeurs qu'il a supposées pour v et $\int R dr$ dans cette première opération. Il conclut de là les termes qui leur correspondent dans les expressions de v, $d\eta$ et $d\varphi$; il intègre cette dernière en supposant φ composé d'une suite de termes dépendans des sinus des multiples de η, et affectés de coefficiens indéterminés, en différenciant cette expression, et y substituant pour $d\eta$ sa valeur donnée, puis en la comparant avec celle qu'il vient d'obtenir, afin de déterminer les coefficiens de la valeur cherchée de φ.

2e Classe. inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite lunaire.

Euler passe ensuite (chap. 5) à la recherche des inégalités de la Lune qui dépendent de la première puissance de l'excentricité k de son orbite. Il fait usage, pour les obtenir, du même procédé que celui qu'il vient d'appliquer aux inégalités de la première classe. Il suppose pour $\int R dr$ une expression composée des deux premiers termes de sa valeur précédente, et d'une suite de fonctions de k et des cos. des angles r, $2\eta - r$, $2\eta + r$, etc., multipliés par de nouveaux coefficiens indéterminés. Il prend aussi pour v un développement semblable, à l'exception du terme en $\cos r$ qui ne s'y trouve pas. Il a recours aux mêmes opérations que celles qu'il a déjà employées pour déterminer les coefficiens de chacun des termes de ces deux valeurs, en ne considérant dans les équations identiques que ceux qui se trouvent multipliés par k, et en substituant, dans les équations de condition, les valeurs des coefficiens déjà connus et celle de l'élément k.

Le chap. 6 de la théorie que nous analysons est consacré à la recherche des inégalités de la Lune qui dépendent du carré de son excentricité. L'auteur, ajoutant alors aux valeurs indéterminées de v et $\int R dr$ de nouveaux termes où les cos. des angles $2r$, 2η, 4η et de leurs composés se trouvent multipliés par k^2, parvient aussi par la méthode précédente à fixer les valeurs de leurs coefficiens.

Dans le chapitre suivant il cherche, au moyen de calculs longs et compliqués, à obtenir des valeurs plus exactes des inégalités déjà trouvées, en les considérant dans leur ensemble.

(*) Euler suppose, dans cette première approximation,

$$\int R dr = A \cos 2\eta + B \cos 4\eta + C \nu \cos \eta + D \nu \cos 3\eta,$$
$$v = A' \cos 2\eta + B' \cos 4\eta + C' \nu \cos \eta + D' \nu \cos 3\eta;$$

la valeur de la fonction $\int R dr$ ne doit contenir aucun terme constant, et celle de v, par sa nature, ne doit avoir ni un terme constant, ni un terme de la forme $a \cos r$.

Il détermine ainsi avec plus de précision l'expression de $\frac{d\varphi}{dr}$, qu'il intègre ensuite par la méthode que nous avons déjà indiquée. Il obtient alors pour φ un développement dont il réduit les coefficiens en secondes, et dont la partie non périodique est composée de la constante de l'intégration et du terme Or; or, la partie constante de la différence $\varphi - r$, entre la longitude et l'anomalie vraie de la Lune, doit exprimer la longitude de l'apogée; $O - 1$ est donc le rapport du mouvement de l'apogée au mouvement de l'anomalie de la Lune. Euler a jusqu'alors pris pour O la valeur donnée par les observations; dans le chap. 8, qui traite du mouvement de l'apogée, il cherche à le déterminer par le calcul.

Mouvement de l'apogée.

Il reprend pour cela l'une des équations de condition obtenues précédemment, qui lui donne pour O une valeur en fonction de C. Une première détermination de C, faite en négligeant les termes en k^2, ceux en e et en ε, qui viennent de la position et de l'ellipticité du Soleil, lui avait donné, pour cette constante, une valeur en fonction de n et de la lettre μ, qui représente le terme ajouté à celui qui exprime l'action de la Lune dans le cas de l'attraction Newtonienne. Cette valeur ne lui fournit, pour le mouvement de l'apogée, que la moitié de celui qui a lieu réellement; mais comme la constante doit avoir une valeur différente, quand on a égard à toutes les circonstances du problème, Euler avait ajouté une quantité δ inconnue, à cette première expression; et c'est en cherchant avec soin sa valeur, qui ne paraissait d'abord d'aucune importance, qu'il retrouve, à 2″ près, la seconde moitié du mouvement cherché par la considération de la seule inégalité qui dépend de l'angle $2\eta - r$ (*). Il déduit de la comparaison du résultat du calcul avec l'observation, une valeur de μ déjà très petite, et qui doit diminuer encore par un calcul plus exact; d'où il conclut qu'il n'y a nul besoin de supposer d'autre force que celle qui a lieu en raison inverse du carré des distances, pour accorder les résultats de la théorie avec ceux de l'observation.

3e Classe. Inégalités provenant de l'excentricité solaire.

Euler passe ensuite (chap. 9) à la détermination des inégalités de la Lune qui proviennent de la seule excentricité e de l'orbite du Soleil, qu'il a négligée jusqu'alors. Ces inégalités doivent dépendre en partie de l'anomalie vraie s du Soleil, et en partie de l'angle 2η; il l'exprime par les valeurs qu'il prend pour v et $\int R\,dr$, en omettant les termes en r; il compare les valeurs qu'elles donnent pour R et d^2v (en y substituant pour $ds = dt$, sa valeur) avec celles qui viennent de la substitution des expressions indéterminées de $\int R\,dr$ et de v, dans les valeurs déjà connues de R et de d^2v.

4e Classe. Inégalités qui dépendent des deux excentricités à la fois.

Il parvient de même (chap. 10) à l'évaluation des termes qui dépendent du produit ek des excentricités, en ne prenant, dans les séries indéterminées, que les termes qui ont A, A′, e, k ou ek pour facteur, et introduisant les cos. des nouveaux angles $r - s$, $r + s$, $2\eta - r + s$, $2\eta - r - s$, etc.

(*) Il trouve, page 98,

$$O = C - 0{,}000364\,;$$

mais il a obtenu d'ailleurs, page 39,

$$C^2 = 1 + \frac{3 + 4\mu + \delta}{2n^2}\,;$$

d'où il tire, quand il néglige μ et δ,

$$O = \sqrt{1 + \tfrac{3}{2}n^2} = 1{,}0042592\,;$$

mais en ayant égard à la valeur de $\delta = 3{,}20892$, trouvée chapitre VII, il obtient la valeur $O = 1{,}0084307$, tandis que l'observation donne $O = 1{,}0085272$, d'où il déduit $\mu = 0{,}038$.

5e Classe. Inégalités de la parallaxe.

Il détermine enfin les inégalités de la Lune qui proviennent du rapport des parallaxes ou des distances moyennes du Soleil et de la Lune à la Terre, et dont il a déjà obtenu quelques-unes (chap. 4) dans une première approximation. Il fait entrer, pour cet effet, de nouveaux termes dans les séries où ce rapport multiplie les cos. des angles η, 3η, $\eta - r$, $\eta - s$, $3\eta - s$, et il en détermine les coefficiens de la même manière. Il remarque que les inégalités qui dépendent des angles $2\eta - 3r$, $2\eta - 2r + s$ peuvent monter à plusieurs secondes, mais que leur détermination est si rebutante, qu'il a préféré s'en rapporter sur ce point aux observations.

Mouvement des nœuds et variation de l'inclinaison.

Après être parvenu aux valeurs de toutes les inégalités de la Lune qui ne dépendent pas de l'inclinaison de son orbite, Euler s'occupe ensuite, dans les chap. 12 et 13, du mouvement des nœuds et de la variation de l'inclinaison. Il développe leurs équations différentielles, et réduit la première à une série de cos. des angles η, r, φ, π, θ, s et de leurs multiples; la seconde à un développement des sinus des mêmes angles: chaque terme de l'une et de l'autre étant multiplié par un coefficient numérique. Il remarque que quoique quelques-uns de ces termes paraissent assez petits pour qu'on pût les rejeter, ils peuvent croître par l'intégration d'une manière notable : tels sont ceux dont les différentielles diffèrent très peu de dr. Pour en tirer π et log. tang ρ, il cherche séparément les parties de leurs valeurs qui proviennent de ces angles, et sont indépendantes des excentricités; puis, celles qui résultent des deux premières puissances de l'excentricité de l'orbite lunaire, enfin celles qui viennent de l'excentricité de l'orbite solaire; il intègre dans chacun de ces trois cas, en posant pour π et log. tang ρ des valeurs indéterminées, en les différenciant par rapport à r, et en y mettant, pour les coefficiens différentiels de φ, η, θ ou s et π, leurs valeurs déjà connues, η étant toujours égal a $\varphi - \theta$; comparant ensuite les expressions auxquelles il parvient avec les formules numériques qui donnent $d\pi$ et d log. tang ρ, il obtient un nombre d'équations suffisant pour déterminer tous les coefficiens. Dans le calcul de l'inclinaison, il dit qu'on peut négliger plusieurs inégalités dont quelques-unes passent 10″; à peine même veut-il qu'on ait égard à une équation qu'il trouve de 23″. Rassemblant ensuite tous les résultats, il en tire immédiatement la valeur de π, et obtient aussi celle de ρ en la tirant de celle de log. tang ρ (*).

6e Classe. Inégalités provenant de l'inclinaison de l'orbite.

Ces valeurs pouvant influer sur celles de φ et de v, il faut encore y avoir égard en déterminant dans $\int R dr$ et v de nouveaux termes multipliés par les cosinus des angles $\varphi - \pi$, $\theta - \pi$, $\varphi - \pi - r$, etc., et de leurs multiples. On a un exemple, dans cette partie, des risques que l'on court par ce procédé, en ne mettant pas la plus scrupuleuse attention aux termes que l'on néglige; car, après avoir trouvé dans φ le terme 18′ 3″

(*) Pour passer de la valeur de log. tang ρ à celle de ρ, Euler posant log. tang $\rho = S$, obtient d'abord

$$\text{tang}\,\rho = 1 + S + \frac{1}{2} S^2;$$

il fait $\rho = \iota + \omega$, ι étant l'inclinaison moyenne donnée par les observations, ω étant une petite quantité variable, ce qui lui donne

$$\text{tang}\,\rho = \frac{\text{tang}\,\iota + \omega}{1 - \omega\,\text{tang}\,\iota} = \text{tang}\,\iota + \frac{\omega}{\cos^2 \iota};$$

il fait ensuite $\frac{\text{tang}\,\rho}{\text{tang}\,\iota} = V$, et obtient

$$\omega = (V - 1) \sin \iota \cos \iota = \frac{1}{2} (V - 1) \sin 2\iota.$$

sin $(2\theta - 2\pi)$, dont on ne voyait aucun vestige dans les tables astronomiques, Euler est conduit par là à un examen plus attentif, qui ne lui donne plus que 3′ 25″ sin $(2\theta - 2\pi)$ pour cette équation, ou environ la cinquième partie de ce qu'elle était d'abord.

Rassemblant ensuite tous ces résultats partiels, en ajoutant les coefficiens de chaque fonction périodique donnés par toutes les opérations successives, il parvient aux valeurs complètes de u et de $\frac{d\varphi}{dr}$, en fonction des produits des cos. de η, r, s, et de leurs multiples, par des coefficiens numériques et par les élémens e, k et ν. Il représente par ζ la longitude de la Lune déterminée, dans son mouvement elliptique, selon les règles de Kepler; φ est alors égal à ζ, plus une fonction des sin. des angles η, r, s, φ, π, θ et de leurs multiples.

Après avoir, dans les chapitres précédens, considéré successivement les six classes d'inégalités qui dépendent de l'élongation, des deux excentricités considérées séparément ou simultanément, de la parallaxe du Soleil et de l'inclinaison de l'orbite, Euler montre, dans le chapitre 16, qu'on peut, relativement aux usages astronomiques, distinguer aussi cinq classes différentes d'inégalités, suivant qu'elles servent à déterminer la distance de la Lune à la Terre ou la parallaxe, le mouvement horaire de la Lune, la longitude vraie sur l'écliptique, la position de la ligne des nœuds et l'inclinaison vraie, d'où l'on tire la latitude. Il cherche à exprimer l'anomalie vraie r, en fonction de l'anomalie moyenne p et de l'excentricité k, qui sont connues assez exactement, d'autant plus qu'une erreur de quelques minutes dans l'anomalie vraie, n'en produit qu'une de quelques secondes dans les inégalités de la Lune. Il parvient à ce but au moyen de l'équation différentielle qui lie ces anomalies dans le mouvement elliptique; elle lui donne d'abord, par son développement, la valeur de p en fonction de r et des sin. des multiples de r; d'où il tire réciproquement celle de r en fonction de p et des sin. des multiples de p (*). Celle de ζ est alors déterminée en fonction de la longitude moyenne, et d'une suite de produits des sinus des multiples de r par les quatre premières puissances de k : ce qui est d'une exactitude suffisante.

Le chapitre 17 de l'ouvrage est consacré à la détermination des élémens. « La » théorie seule (dit Euler, dans son introduction) ne suffit pas pour construire des » tables, et elle doit nécessairement emprunter à l'observation six élémens, savoir : » 1°. l'excentricité de l'orbite lunaire, qui dépend du mouvement primitif imprimé à » la Lune, que la théorie ne peut faire connaître; 2°. le lieu moyen de la Lune à une » époque déterminée; 3°. le lieu de l'apogée de son orbite à un moment donné; 4°. le

---

(*) On a, dans le mouvement elliptique (*voyez* le bas de la page 45),

$$dp = \frac{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\,dr}{(1-k\cos r)^2},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$p = r + 2k\sin r + \frac{3}{4}k^2\sin 2r + \frac{1}{3}k^3\sin 3r + \text{etc.}$$

Si l'on pose $r = p - R$, et qu'on cherche les valeurs des sinus des différens multiples de r, suivant les puissances de R et les sinus de p, on obtiendra l'équation

$$r = p - 2k\left(1 - \frac{1}{8}k^2\right)\sin p + \frac{5}{4}k^2\sin 2p - \frac{13}{12}k^3\sin 3p + \text{etc.},$$

que l'on peut mettre en table.

» temps périodique de la Lune selon son mouvement moyen; 5°. le lieu des nœuds » à une certaine époque; 6°. l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune au plan » de l'écliptique. C'est au moyen de ces six quantités déterminées une seule fois, que » la théorie doit faire connaître la position de la Lune et les élémens de son orbite pour » un temps quelconque. » Pour corriger plus aisément les élémens par les observations, Euler prend celles où le nombre des inégalités est le plus petit; telles sont celles faites aux momens où la Lune est en opposition ou en conjonction. Il emploie treize éclipses de Lune observées à Paris; il suppose à la longitude moyenne, à l'excentricité k, et par suite à l'anomalie vraie v, des premières valeurs passablement approchées; il désigne par m, n et i les corrections dont ces élémens ont besoin; et comme le terme.... $\sin 2(\phi - \varpi - r)$ est incertain aussi, il désigne son coefficient par $100\,y$, et le regarde comme indéterminé. Calculant ensuite, au moyen des élémens approchés, les formules que donne la théorie pour le lieu de la Lune au moment de chaque observation, et comparant ces valeurs avec les longitudes observées, la différence des résultats, attribuée à l'incertitude des élémens, lui donne, pour chaque observation, une équation dont le premier membre est un certain angle, et le second une fonction de la forme $am + bn + ci + dy$; a, b, c, d étant des coefficiens numériques. Il obtient treize équations semblables, d'où il peut tirer, par l'élimination, les corrections cherchées. C'est en cela que consiste la méthode des équations de condition, qu'Euler a indiquée et pratiquée dès 1747. Il dispose enfin les formules qui donnent ϕ, ϖ et ρ de manière à leur donner une forme convenable pour les mettre en tables; et mettant de côté les inégalités qui ne surpassent pas 10″, il réduit à vingt équations le calcul de la correction de la longitude. Comme l'argument de plusieurs d'entre elles contient l'angle ϕ lui-même, il prescrit d'employer, pour le calculer, la longitude moyenne, corrigée seulement à l'aide des quatre premières inégalités; mais il ne donne pas les tables qu'il a construites d'après sa théorie; il présente même, sous le nom d'*Additamentum*, à la fin de son ouvrage, des remarques sur les inconvéniens de la marche qu'il vient de suivre, accompagnées d'une nouvelle méthode, dont il s'est aussi occupé depuis dans les Mém. de Berlin pour 1763, et dont l'exposition rapide doit terminer ce chapitre.

Nouvelle méthode indiquée par Euler dans l'addition qu'il a jointe à sa théorie.

L'idée principale sur laquelle repose le nouveau procédé d'Euler, est de choisir une anomalie qui soit nulle ou égale à 180°, lorsque la distance de la Lune à la Terre est la plus petite ou la plus grande, de manière que dx ne dépende pas de l'élongation ϖ, et soit nulle à l'apogée et au périgée. Il reprend les deux premières équations du mouvement; il prend l'angle ω, qui exprime le mouvement moyen, pour mesure du temps, et désigne par M et N ce que deviennent les forces perturbatrices correspondantes; il obtient, par l'intégration, les valeurs de $d\phi$ et de dx en fonction de x, de $d\omega$ et de termes composés des forces M et N, et affectés du signe $\int$ (*). Supposant ensuite

(*) Il désigne par a la distance moyenne du Soleil à la Terre, par ω son moyen mouvement, et fait

$$\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3 d\omega^2}{S}, \quad P = \frac{S}{a^3}\left(\frac{A}{x^2} + N\right), \quad Q = \frac{S}{a^3}.M;$$

les deux premières équations du mouvement deviennent alors

$$d^2x - xd\phi^2 = -\left(\frac{A}{x^2} + N\right)d\omega^2, \quad 2dxd\phi + xd^2\phi = -Md\omega^2;$$

x donné par l'équation polaire d'une ellipse dont p est le demi-paramètre, q l'excentricité et ν l'anomalie vraie, au lieu de prendre, comme on le fait dans le mouvement régulier, ces quantités pour constantes et connues, il les regarde comme variables et arbitraires ; il substitue alors cette valeur de x dans celle de dx, et profite des deux indéterminées p et q pour réduire celle-ci à la forme H sin ν, qui exprime correctement la supposition primitive, puisque de cette manière dx est nul ainsi que sin ν, quand ν est égal à o ou à 180°. Les équations de condition qui servent à ce but étant différenciées, lui donnent alors les valeurs de dp et de dq ; la différentiation de la valeur supposée de x lui fournit celle de $d\nu$; et comme il connaît déjà celle de $d\phi$, il en conclut l'expression de $d\phi - d\nu$, ou du mouvement de l'apogée, et celle de $d\eta$. Ce sont ces valeurs des différentielles premières de toutes les variables, qu'il emploie comme formules fondamentales pour sa nouvelle solution (*).

Il développe ensuite les valeurs des lettres M et N ; il fait $p = b(1+\xi)$, et obtient l'expression de la différentielle de ξ par rapport à ω, ainsi que celles de tous les autres élémens, développées suivant les puissances de e, de q, les sin. et cos. des multiples des angles u, ν et η. Il distingue ensuite quatre genres de termes, selon qu'ils dépendent des excentricités, de la parallaxe ou de l'inclinaison ; et il parvient, par la méthode des coefficiens indéterminés qu'il a déjà employée, aux inégalités des deux premiers genres. Enfin il termine cette addition par quelques réflexions sur les méthodes précédentes et sur divers procédés dont il propose de faire usage. Il montre, par exemple, qu'on pourrait réduire les premiers membres des équations différentielles au premier ordre, sans supposer une anomalie dont le sinus s'évanouit au périgée et à l'apogée, en substituant aux variables q et ν ces deux-ci, $r = q\cos\nu$, $s = q\sin\nu$. La valeur de r devrait alors se composer d'un premier terme de la forme K cos ν, et d'autres dépendans des cos. des multiples de η ; les plus grandes et les plus petites distances dépendraient alors plutôt de l'angle η que de l'anomalie, ce qui est avantageux lorsque l'excentricité est très petite.

---

la seconde donne, en la multipliant par $2x^3 d\phi$ et intégrant,

$$d\phi = \frac{d\omega}{x^2}\sqrt{2V}, \quad \text{en supposant} \quad V = -\int Mx^3 d\phi\,;$$

la première, multipliée par $2x d\phi$ et ajoutée à la seconde multipliée par $2dx$, donne, en l'intégrant et y mettant pour $x^2 d\phi$ la valeur précédente,

$$dx = \pm\, d\omega \sqrt{2\left(U + \frac{A}{x} - \frac{V}{x^2}\right)}, \quad \text{en supposant} \quad U = -\int (Mx d\phi + N dx).$$

(*) Euler suppose (*Th. L.*, p. 279) $x = \frac{p}{1 - q\cos\nu}$; il introduit cette valeur dans celle de dx, à laquelle il vient de parvenir, et posant, pour simplifier, $2V - ap = 0$, $Up^2 + Ap - V = Vq^2$, il obtient

$$dx = -q\,\frac{d\omega \sin\nu}{p}\sqrt{Ap}, \qquad d\phi = \frac{d\omega}{x^2}\sqrt{Ap}\,;$$

il différencie ensuite les équations de condition et la valeur supposée de x, et remettant pour V et U ce qu'ils représentent, il en conclut :

$$dp = -\frac{2Mx\,d\omega}{A}\sqrt{Ap}, \qquad dq = d\omega\left\{\frac{M}{A}\left(2\cos\nu - \frac{q\sin^2\nu}{1 - q\cos\nu}\right) + \frac{N}{A}\sin\nu\right\}\sqrt{Ap},$$

$$d\phi - d\nu = \frac{d\omega}{q}\left\{\frac{M}{A}\left(2\sin\nu + \frac{q\sin\nu\cos\nu}{1 - q\cos\nu}\right) - \frac{N}{A}\cos\nu\right\}\sqrt{Ap},$$

$$d\eta = d\phi - d\theta = d\omega\left\{\frac{1 - q\cos\nu}{p^2}\sqrt{Ap} - \frac{(1 - e\cos u)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

CHAPITRE V.

Comparaison des Méthodes précédentes de Clairaut, d'Alembert et Euler.

Résumé des solutions précédentes.

Nous venons de voir trois géomètres du premier ordre entreprendre à la fois de résoudre directement le problème des trois corps dans toute sa généralité. Tandis que Newton, après avoir assigné la cause unique des inégalités de la Lune, et l'avoir heureusement appliquée à l'évaluation isolée de plusieurs d'entre elles, n'avait pu, par la méthode synthétique dont il se servait, les découvrir ni les calculer toutes; et qu'il avait laissé les tables fondées en partie sur la théorie, en partie sur l'observation, et sujettes encore à des erreurs de 5'; Clairaut, d'Alembert et Euler, profitant de toute la supériorité de l'analyse, réussirent à mettre le problème en équation, c'est-à-dire à en exprimer la nature et à en embrasser l'ensemble et toutes les circonstances pendant un temps quelconque, au moyen d'un petit nombre de formules différentielles rigoureuses. Ils furent ensuite forcés, il est vrai, de renoncer à l'espoir de pouvoir les intégrer complètement; mais ayant fait usage des données de l'observation et de diverses méthodes d'approximation, ils parvinrent à une solution suffisamment exacte. Ils obtinrent alors, pour déterminer le mouvement du corps troublé, des développemens composés d'un nombre infini de termes, dont les plus considérables se composaient des inégalités déjà connues, et dont les suivans en indiquaient d'autres auxquelles il fallait avoir égard; mais le nombre de ces derniers était si grand, qu'il s'agissait dès-lors bien moins de chercher à l'étendre, pour obtenir des inégalités nouvelles, qu'à le resserrer et le contenir dans des limites convenables. Enfin ayant substitué dans les séries qui exprimaient les coordonnées astronomiques, les valeurs des élémens pour un instant quelconque, en supposant ces élémens constans, au lieu de les regarder comme variables, ainsi que l'avait fait Newton, ils purent s'en servir ensuite pour construire des tables qui représentassent correctement, pendant un long espace de temps, les mouvemens de la Lune.

Égalité des droits des auteurs de chacune d'elles.

Il serait difficile d'établir quel est, entre ces trois géomètres, celui qui arriva le premier à la solution de ce problème si compliqué; et l'on n'a pu découvrir encore, sur ce point, quelque zèle qu'on mette en général aux recherches de ce genre, un seul de ces passages positifs qui, assurant à l'un des auteurs une antériorité décidée, enlèvent en même temps aux autres un titre qu'on leur avait conféré jusqu'alors. Euler aurait probablement la priorité dans le cas actuel, s'il avait mis autant de soin que ses deux rivaux à publier immédiatement toutes ses recherches, puisque, dès 1745, il avait donné des tables où la théorie entrait pour quelque chose, et qu'on le voit, dans sa pièce couronnée en 1748, comparer à plusieurs reprises les difficultés de la théorie de Saturne avec celles que présente la théorie de la Lune, comme si cette dernière lui était déjà familière; mais il n'envoya à Pétersbourg qu'en 1751 ou 1752 sa dissertation sur la Lune, dont l'impression a été ainsi postérieure de quelques années à celle des premières recherches de Clairaut et de d'Alembert. C'est ce que remarque ce dernier (*Rech.*, t. I, p. 252) au sujet d'un passage où Mayer disait qu'Euler avait le premier

réduit le mouvement de la Lune à des équations analytiques. D'Alembert soutient au contraire que c'est lui et Clairaut qui les premiers ont calculé et publié, d'après la théorie, des formules de ce mouvement. Playfair dit, en parlant (*) de ce problème, que s'il y avait une priorité à réclamer pour l'un des trois illustres géomètres qui le résolurent, elle appartiendrait plutôt à Clairaut, qui assurait, au rapport de Lalande, avoir trouvé sa solution dès la fin de 1746.

Tous trois, après avoir posé les équations fondamentales du mouvement en fonction des coordonnées polaires, du temps et des composantes rectangulaires des forces perturbatrices, éliminèrent l'élément du temps pour y substituer l'anomalie vraie regardée comme variable indépendante, afin d'obtenir l'équation de la trajectoire, qu'Euler et d'Alembert conservèrent sous la forme différentielle, tandis que Clairaut l'intégra généralement avant d'y faire aucune substitution, en laissant sous le signe $\int$ les termes dépendans des forces perturbatrices encore indéterminées. Il fallait ensuite, pour pouvoir faire l'application de cette équation au mouvement de la Lune et l'intégrer complètement par les méthodes directes, rendre différentielles exactes en fonction d'une seule variable, les parties qui dépendaient des forces troublantes. Clairaut y introduisit, pour cet effet, l'hypothèse d'une ellipse mobile décrite par la Lune, et il considéra l'orbite réelle qu'elle parcourait dans l'espace. Euler et d'Alembert déterminèrent l'orbite projetée sur l'écliptique; ils substituèrent à la place de la variable, une valeur constante dont elle diffère toujours fort peu; plus, une nouvelle variable très petite, dont ils pouvaient d'abord négliger le carré et les puissances supérieures, et ils augmentèrent par là la convergence des résultats. D'Alembert après avoir, ainsi que Clairaut, réduit l'équation différentielle de l'orbite à la forme des équations linéaires du second ordre, l'intégra, après les premières substitutions, par les mêmes méthodes; et tous deux formant à plusieurs reprises de nouvelles approximations, parvinrent, par le procédé des substitutions successives et par l'intégration, à l'expression définitive du rayon vecteur en fonction des cos. de l'anomalie vraie. Ils la substituèrent dans l'équation différentielle qui détermine le temps, et obtinrent, en l'intégrant, la valeur du mouvement moyen en fonction des sinus des multiples du mouvement vrai; d'où ils conclurent réciproquement l'expression cherchée du mouvement vrai en mouvement moyen. Euler suivit un procédé différent d'intégration. Ayant développé et transformé ses équations de manière à ce qu'elles donnassent les valeurs des élémens de la longitude vraie et de la différentielle seconde de la partie variable du rayon vecteur, en fonction des sin. et cos. des multiples de l'anomalie vraie et de l'élongation (dont quelques-uns restaient sous le signe de l'intégration), il distingua différentes classes dans ces développemens, et supposant dans la recherche de chacune d'elles, faite séparément, des valeurs indéterminées aux deux variables cherchées, il détermina leurs coefficiens par la comparaison de leurs différentielles avec les seconds membres des équations du problème qui les exprimaient. Il parvint aussi, par des procédés analytiques, aux expressions du mouvement des nœuds et de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, que Clairaut et d'Alembert avaient obtenues au moyen des considérations géométriques de Newton.

Parallèle des trois méthodes.

(*) *Edinburgh Review*, n° 22, janv. 1808, p. 258. « Clairaut, d'Alembert and Euler, are the three » illustrious men, who, as by a common impulse, undertook this investigation in the year 1747; *the priority* » *if any could be claimed, being on the side of Clairaut.* »



On doit distinguer avec soin, dans la comparaison des solutions dont nous venons de nous occuper, leur mérite réel sous le rapport analytique, et le succès dont elles ont été suivies dans les applications que leurs auteurs en ont fait. Il s'agissait en effet de recherches nouvelles qui exigeaient des calculs plus pénibles que tous ceux qu'on avait eu à faire jusqu'alors : dans ce travail, la patience et l'exactitude étaient presque aussi essentielles que le génie, et l'utilité pratique plus importante encore que la nouveauté des procédés ; on ne peut pas non plus juger de la bonté des méthodes uniquement par la précision des tables qu'elles ont servi à construire.

Examen de la théorie de Clairaut.

Clairaut, doué d'un esprit exact et méthodique, est celui qui a mis le plus d'ordre, de clarté et de concision dans ses recherches ; il douta peut-être un peu légèrement de la loi de Newton ; mais il racheta d'une manière brillante cette précipitation, en découvrant le vrai mouvement de l'apogée par la théorie. Sa marche a été constante et régulière ; aucun de ses premiers travaux n'a été perdu, et il en est parti pour des recherches plus exactes, dont il n'a pas exposé toutes les opérations. Sa méthode est sur-tout d'une application simple et facile, ce qui lui a valu l'avantage d'être plus souvent employée que les autres. En effet, ses formules générales étant établies sous la forme intégrale, il ne s'agit plus que de trouver, dans chaque cas particulier, les valeurs de ρ et de Ω, en les réduisant à de simples fonctions de v, d'en conclure celle de ξ, et de substituer la première et la troisième dans l'expression de l'anomalie moyenne, d'où l'on déduit très facilement les termes correspondans de la longitude vraie. « Son principal mérite (dit Bailly) fut le talent des applications : malgré » son génie, il n'était point rebuté des détails ; il pensait qu'une vérité de pratique était » préférable à celles qui restent ensevelies dans vingt pages d'analyse : aussi n'a-t-il » fait que des choses..... » C'est à sa sûreté dans les calculs, et au soin qu'il a eu de corriger ses élémens au moyen des observations, que ses tables, qui furent les premières construites, durent d'être préférées à celles des autres géomètres. Il regardait comme un avantage de sa supposition, la séparation qu'elle permettait de faire dans la valeur du rayon vecteur, entre la partie elliptique et celle qui est due aux forces perturbatrices ; mais d'Alembert reprocha à ce procédé que l'on partait alors d'une première valeur du rayon vecteur qui n'était qu'une hypothèse tirée des observations, et non une forme démontrée *à priori ;* il lui attribuait l'inconvénient de faire naître, dans l'intégrale, un terme en $\cos v$ dès la première approximation ; et, ainsi que Fontaine, il accusait Clairaut de faire disparaître ce terme trop légèrement, sans démontrer rigoureusement qu'il ne devait pas s'y trouver ; il remarquait aussi que cette solution ne donnerait pas la vraie valeur du rayon vecteur de l'orbite, si l'apogée du Soleil était immobile, mais qu'elle amènerait des arcs de cercle.

Clairaut considère l'orbite vraie décrite par la Lune au lieu de chercher plutôt sa projection sur l'écliptique ; cette méthode, qui semble d'abord la plus simple pour déterminer immédiatement le lieu vrai de l'astre, a l'inconvénient d'exiger une opération de plus, savoir, la réduction à l'écliptique, lorsqu'on veut obtenir la longitude selon l'usage des astronomes. D'Alembert observe à ce sujet que l'orbite réelle de la Lune n'étant pas plane, la somme des angles infiniment petits dv décrits par la Lune dans le temps t, n'est pas précisément égale à l'angle v compris entre le rayon vecteur final et le primitif ; que le mouvement de l'apogée n'est plus le même que celui que les astronomes observent, qui est sur l'écliptique ; et que la distance angulaire de la Lune au nœud mobile rapporté au

plan de l'orbite, doit aussi être un peu différente de ce qu'elle est par rapport au nœud mobile considéré dans le plan de l'écliptique; mais il convient (*Opusc.*, t. 5, Mém. 38) que les erreurs qui en résultent se sont quelquefois compensées; et nous montrerons d'ailleurs que ses reproches étaient souvent plus sévères que fondés, puisqu'il ne s'agissait pas d'obtenir une solution rigoureuse, mais de parvenir à une approximation suffisamment exacte.

Quoique la méthode de d'Alembert ne l'ait pas tout-à-fait conduit à des résultats aussi précis, elle n'en doit pas moins être envisagée comme bien remarquable, et se recommande à juste titre comme ayant été approuvée et en partie suivie par l'un des plus illustres géomètres de notre temps (voyez *Mém. de l'Instit.*, t. 2, pag. 127). Outre les idées heureuses que d'Alembert a partagées, cet esprit fin et ingénieux en a eu plusieurs autres qui lui sont propres; son procédé pour trouver l'équation différentielle de l'orbite troublée par le moyen de celle des trajectoires elliptiques, lui paraissait le plus simple possible; il se donnait aussi comme ayant le premier réussi à démontrer rigoureusement que les arcs de cercle ne devaient pas entrer dans la valeur du rayon vecteur de l'orbite, et proposé une méthode directe pour empêcher qu'il ne s'en produisît. Il a remarqué, dès 1748, que plusieurs termes très petits dans l'équation différentielle, augmentent considérablement par l'intégration, à cause des petits multiples qui deviennent diviseurs, et dit en avoir fait part à Clairaut cette année-là. Celui-ci a soutenu de son côté (*Jour. des Sav.*, juin 1762, p. 376) avoir donné à d'Alembert des idées dont ce dernier a profité; et il a voulu expliquer ainsi la différence qui existe entre la méthode que ce géomètre indiqua, en 1747, pour construire des Tables de la Lune, et celle qu'il suivit ensuite. « Il apprit (dit Clairaut), tant par mon Mémoire que » par nos conférences, comment mon équation de l'orbite de la Lune, et l'expression du » temps qui en résultait, pouvaient servir à désigner tant de révolutions que l'on voudrait, » comptées depuis le point qu'on prendrait pour servir d'époque, et comment l'équation » qui donnait le temps par la longitude vraie, en fournissant également la longitude » vraie par le temps ou par la longitude moyenne, donnait un moyen de construire les » tables. L'essai qu'il en fit fut un peu plus exact que celui dont je m'étais contenté » alors, parce qu'il fit entrer dans le calcul le carré de l'excentricité que j'avais réservé » pour la seconde approximation; mais l'avis qu'il m'en donna ne me parut d'aucune » importance. » Nous avons déjà remarqué que c'est à d'Alembert qu'on doit d'avoir bien vu le premier, que dans le mouvement de l'apogée il ne suffit pas de s'en tenir au second terme de la série, et qu'il faut pousser l'exactitude jusqu'au troisième et au quatrième terme, afin de s'assurer que la série est assez convergente après le second, pour que ceux qui sont au-delà des quatre ou cinq premiers puissent être négligés sans crainte. On le voit (p. 146 et 234, du t. I. de ses *Rech.*) convenir de l'incertitude de quelques-unes de ses corrections, et avouer que lors même qu'il aurait poussé le calcul jusqu'aux infiniment petits du quatrième ordre, tant dans la recherche de la latitude et du nœud, que dans celle du lieu de la Lune, il n'oserait encore affirmer d'aucune des équations en particulier qu'elle fût exacte à 1′ près. Il fonde cette opinion sur la délicatesse et la longueur des opérations, sur la différence des élémens employés et des résultats trouvés par plusieurs calculateurs, enfin sur le nombre des termes qui augmente dans les divers ordres, à mesure qu'ils sont plus élevés; et ayant trouvé à des termes du quatrième ordre des coefficiens d'une demi-minute, il demande pourquoi il ne pourrait pas arriver que plusieurs termes réellement du cinquième ordre ou même au-dessous, donnassent un résultat pareil ou peut-être plus considérable?

Méthode de d'Alembert.



D'Alembert avait un talent et un goût particuliers pour juger les diverses méthodes, pour comparer les avantages ou les inconvéniens de chacune d'elles, et pour examiner ce qu'elles laissaient toutes à désirer. Il exigeait assez impérieusement qu'on lui attribuât avec une attention scrupuleuse toutes les idées qui lui étaient dues; mais il était exact en général dans la part qu'il faisait aux autres; il les critiquait avec rigueur et relevait leurs fautes sans pitié; mais ses discussions subtiles, et les remarques fines qu'elles lui suggéraient, servaient souvent aussi à éclaircir les points importans dont elles étaient l'objet. Ses ouvrages sont remarquables par la précision et l'élégance du style. Ce géomètre, homme de lettres, est un de ceux qui ont su le mieux manier et assouplir une langue souvent peu flexible, en l'assujétissant à exprimer correctement les méthodes et les résultats de la théorie. Il n'est pas aussi heureux dans la manière dont il présente ses calculs, qui manquent quelquefois de clarté et de symétrie; il n'est pas facile de le comprendre toujours dans ses expositions, quelquefois un peu obscures, ni de le suivre jusqu'au bout quand il descend dans les détails des opérations analytiques. Il aimait à se livrer aux considérations générales ou aux spéculations de pure curiosité, et préférait quelquefois critiquer les méthodes des autres plutôt que de perfectionner laborieusement les siennes. Le procédé qu'il a suivi pour construire ses premières tables, qui ont paru dans la même année où Clairaut publia les siennes, avait l'avantage de se rapprocher de celui qui était déjà familier aux astronomes, et de ne leur donner à calculer de plus qu'ils ne le faisaient, que des tables de différences dont la comparaison avec l'observation et avec les lieux calculés par les anciennes tables, servait immédiatement à vérifier l'exactitude; mais on lui a encore attribué un autre motif dans sa préférence pour cette méthode, c'est celui de redouter le travail qu'aurait exigé la construction de tables nouvelles tout entières; on a reproché aux siennes de doubler presque la peine du calculateur, et de s'écarter quelquefois de 8 à 10′ des observations. C'est peut-être par ce manque de persévérance et de suite qu'on peut expliquer aussi comment, ayant observé promptement qu'il y a des termes qui augmentent par l'intégration, et qui sont sensibles quoique étant d'un ordre élevé, il a pu laisser échapper quelques-unes des plus importantes applications de cette remarque.

Mérite de la théorie de la Lune, d'Euler.

Euler, ce génie si vaste, si fécond et si lumineux, a fait faire aussi plusieurs pas importans à la théorie de la Lune, dont il paraît s'être occupé avant de travailler à celle des planètes. Il y a introduit l'emploi initial des trois coordonnées rectangulaires, la décomposition des forces suivant trois axes situés à angle droit, la méthode des coefficiens indéterminés, et celle des équations de condition. Ses tables furent les premières où, en supposant les élémens constans, on appliqua directement toutes les inégalités au mouvement de la Lune, et ce fut à lui qu'on dut également ensuite les premiers essais de la variation des constantes arbitraires. Il est peu d'idées heureuses en ce genre qu'il n'ait eues le premier, ou dont il n'ait partagé l'invention; et la modestie ou l'indifférence qui l'empêchait de réclamer ce qui lui appartenait, ne doit rendre que plus attentif à lui faire honneur de ce qui lui est dû. La marche d'Euler, dans sa Théorie de la Lune, ne le cède à aucune autre en simplicité et en clarté. Conduit par une seule idée, il la suit jusqu'au bout en se confiant à la puissance de l'analyse pour en tirer des résultats exacts. On peut remarquer cependant que, tandis que Clairaut, par exemple, réduit tous les termes de son équation à être de simples fonctions de v, presque toutes les variables sont conservées et mêlées ensemble dans les équations dont Euler fait usage; ce qui ne l'empêche pas d'intégrer, par sa méthode des

indéterminées, en connaissant préalablement les valeurs des différentielles de chacune de ces variables, mais ce qui produit une extrême complication dans les calculs. Cette méthode d'intégration n'était pas sujette aux difficultés qui viennent de l'introduction des termes en fonction du cosinus de la simple anomalie vraie; elle était la plus courte, et c'est celle dont on s'est dès-lors presqu'exclusivement servi; mais à cette première époque elle exigeait peut-être trop de connaissances antérieures, ainsi que l'a remarqué d'Alembert, pour qu'on pût l'employer avec sûreté.

On peut observer, dans le cours de cette volumineuse dissertation d'Euler, que son goût et son extrême facilité pour le calcul, le rendent quelquefois un peu prolixe, lui font négliger la rédaction de ses travaux, et qu'il aime mieux en entreprendre d'autres sur le même sujet que de revoir les précédens et de retoucher ses premiers jets; enfin, que la richesse de son imagination le porte souvent à abandonner un peu trop vite les artifices qu'il a adoptés, pour leur en substituer de nouveaux. C'est ainsi que dans l'*Appendix* à la Théorie qui avait exigé de lui des calculs immenses et une patience à l'épreuve, il porte de cet ouvrage un jugement rigoureux, et semble presque renoncer à la route qu'il s'était ouverte : « Je suis » forcé, dit-il, d'avouer que la méthode précédente, quoique assez bonne en elle-même, » est non-seulement très laborieuse, mais qu'elle laisse incertaines plusieurs inégalités im- » portantes. Cela vient de ce qu'elles sont tellement liées entr'elles, qu'on ne peut fixer la » vraie valeur d'aucune que lorsque toutes sont connues en même temps. Comme j'ai » supposé d'abord quelques inégalités données, afin d'en conclure les autres, il faut » remarquer que celles-ci étant obtenues, doivent à leur tour produire sur les premières » de légères modifications, qui, si elles eussent été connues d'abord, auraient changé » aussi les inégalités qu'elles ont servi à déterminer. Or, quelques-unes sont si » délicates, qu'elles peuvent éprouver de grands changemens quand on en fait subir de » très petits à celles dont elles dépendent. Tel est, en particulier, le cas du mouve- » ment de l'apogée...; de plus, l'anomalie n'étant pas prise dans cette méthode de » manière à être nulle ou égale à 180°, suivant que la distance de la Lune à la Terre » est la plus petite ou la plus grande; mais la différentielle de la distance accourcie » dépendant encore de l'élongation, lorsque le sinus de l'anomalie s'évanouit; la Lune » ne se trouve ni à l'apogée ni au périgée quand l'angle, que la direction de son mou- » vement fait avec le rayon vecteur, est droit.... Cette méthode étant donc sujette à » de si grands inconvéniens, j'en ai essayé une toute différente, etc. »

Euler passe de là à l'exposition de son nouveau procedé, où, conformément à ce qui a lieu dans la nature, il suppose que la différentielle de la distance s'évanouit dans le cas où la distance elle-même est la plus grande ou la plus petite. Il revient alors à la considération des élémens variables employée par Newton, et qui lui sert à simplifier ses formules; il parvient aux véritables expressions des variations des élémens, et réduit ainsi au premier ordre toutes les équations du second. Cette nouvelle méthode a l'avantage de ne pas exiger qu'on considère à part les inégalités qui dépendent de l'élongation; elle lui paraît préférable quand l'excentricité moyenne est considérable et que sa variation est petite comparativement; mais il convient que, lorsque les inégalités de l'excentricité, auxquelles il faut avoir égard, sont grandes et nombreuses, les opérations sont si longues et le calcul est si laborieux, que lors même qu'on le développerait avec le plus grand soin, cela serait d'un usage très difficile dans la pratique; il reconnaît que cette méthode laisse

encore plusieurs inégalités très incertaines, savoir, celles qui sont à longues périodes et à très petits diviseurs, et il n'entreprend pas même le calcul des termes qui dépendent de la parallaxe et de l'inclinaison de l'orbite. Nous verrons dans la suite Euler appliquer aux planètes ce nouveau procédé, et il était intéressant de faire remarquer que l'idée lui en était venue dès ses premières recherches, de même que celle de la variation des constantes arbitraires.

CHAPITRE VI.

Nouvelles recherches de d'Alembert et de Clairaut. Discussion entre ces deux Géomètres.

Les premières Tables de la Lune, de Mayer, parurent dans l'année 1753; mais comme nous ne devons guère nous occuper que de la *Théorie* qui les suivit, nous renvoyons ce que nous avons à en dire au chapitre où nous parlerons de cette dernière, et nous allons passer rapidement en revue quelques ouvrages publiés dans l'intervalle par les géomètres français.

2es Tables de d'Alembert, 3e vol. de ses *Recherches*.

D'Alembert fit paraître en latin, au commencement de 1756, de nouvelles *Tables de correction;* il ajouta, peu de mois après, un troisième volume aux deux premiers de ses *Recherches*, où il rendit compte des changemens qu'il avait faits à ses premières tables, et donna, sous le titre d'*Observations sur les Tables de la Lune*, de nouvelles idées sur les moyens de les perfectionner. Quant au premier objet, il dit avoir calculé plus exactement différentes équations, et réformé quelques légères fautes de calcul ou d'impression, « presque inévitables, ajoute-t-il, dans un travail immense, pour lequel je n'ai » ni pu, ni voulu être aidé par personne. » Ainsi, par exemple, il reconnaît que le coefficient du terme sin 3NZ au lieu d'être de + 8″ était à peu près — 37″, comme les tables le donnent. Dans ses premières tables le lieu de la Lune était supposé *moyen;* dans celles-ci, pour se conformer aux tables des *Institutions astronomiques* de *Lemonnier*, en prenant la distance angulaire de la Lune au Soleil, il suppose déjà le lieu de la Lune calculé par l'équation du centre; il augmente un peu l'excentricité, diminue de 3′ la variation des *Institutions*, et supprime plusieurs tables inutiles. Il compare ensuite les équations qu'il avait trouvées avec celles des tables de Lemonnier, Mayer et Clairaut; et comme sur les 2170 observations que Halley avait comparées avec ses tables, il s'en trouvait 1520 qui donnaient l'erreur en *moins* et qui faisaient monter son *maximum* à 8′, il cherche la quantité qu'on doit *ajouter* au lieu de la Lune de ces tables, afin d'en diminuer les erreurs, soit en faisant en sorte que le nombre des erreurs en + soit égal au nombre des erreurs en —, soit en rendant la somme des erreurs en — égale à la somme des erreurs en +.

Quant aux moyens qu'il indique pour perfectionner les tables de la Lune, il en présente d'abord pour simplifier les tables des *Institutions*; il donne ensuite une méthode

Méthode pour former des tables par les observations.

facile, et dont il avait déjà dit un mot t. I., p. 205, pour former des tables par le moyen des observations. Elle consiste à supposer le lieu vrai de la Lune donné par un développement composé de son lieu moyen, et de vingt-deux termes en fonction des sinus

des divers multiples de ce dernier angle et du lieu moyen du Soleil, tous affectés de coefficiens indéterminés, excepté les trois derniers et celui en sin 3NZ, qui sont à peu près les mêmes dans toutes les tables. Il admet de plus qu'on ait des observations faites dans des circonstances particulières où tous les termes disparaissent, à l'exception de quelques-uns qui forment un groupe à part, de manière que le nombre d'observations soit égal à celui des termes qui subsistent; et il montre comment on en peut conclure autant d'équations de condition qu'il en faut pour déterminer tous les coefficiens inconnus. Il suffit donc d'avoir dix-neuf observations, faites dans les divers cas où les deux anomalies de la Lune et du Soleil sont nulles, où elles sont égales à 180°, où l'une d'elles est nulle et l'autre de 180°; enfin, dans le cas où l'élongation est nulle et dans celui où elle est égale à 90°; et comme il n'a besoin au plus que de cinq observations faites dans l'une de ces circonstances, il ne peut aussi avoir que cinq coefficiens combinés à la fois dans un seul système d'équations, et il indique comment on en conclurait chacun d'eux par l'élimination.

Cette méthode, assez analogue à celle qu'Euler employait dès 1747, pour rectifier les élémens, a l'inconvénient d'exiger des conditions qui, prises dans un sens absolu et rigoureux, ont lieu si rarement qu'elle serait difficile à pratiquer. D'Alembert en convient, et propose, pour y remédier, de prendre des positions très voisines de celles dont on a besoin, et d'évaluer l'erreur que peut produire cette différence. Il termine ses recherches sur la Lune par quelques réflexions sur l'usage de la *période de Halley*.

Réflexions sur la période de Halley.

On sait que cet astronome ayant été l'un des premiers à faire voir l'utilité des observations de la Lune pour déterminer les longitudes en mer, avant que la théorie eût servi à perfectionner les tables de cet astre, essaya d'employer, pour les corriger, la période des Chaldéens, dont nous avons déjà parlé, et qu'il fixa à 18 années (dont 5 bissextiles) 10ʲ 7ʰ 43′ 20″. Pour cet effet, il avait entrepris un cours d'observations assidues pour déterminer toutes les positions successives de la Lune pendant cet intervalle, afin de pouvoir ensuite les appliquer aux instans correspondans dans les retours consécutifs de cette période, et il avait réussi par là à représenter quelquefois les positions de la Lune avec une exactitude surprenante. D'Alembert fait voir cependant que cette période est loin d'être rigoureuse, et que, lorsqu'elle est achevée, les distances de la Lune à son nœud, à son apogée et au Soleil, sont respectivement plus petites de 28′ 11″, 2° 51′ 25″ et de 17″ qu'au commencement, ce qui fait aussi varier les équations qui dépendent de ces trois argumens. Il cherche à évaluer, par approximation, la correction qui doit en résulter dans l'erreur des tables, et indique la période de 18 ans 10ʲ 12ʰ 58′ 13″ comme ayant l'avantage de ramener exactement à la même valeur, l'anomalie moyenne de la Lune, au commencement et à la fin de la période. Il propose enfin de dresser les tables, en exprimant le lieu moyen ou le temps, par le lieu vrai, au moyen d'une formule qu'on trouve immédiatement, et donne son procédé pour calculer la *variation horaire* du mouvement vrai de la Lune. (*Voy.* l'anal. de tout l'ouvrage, *Hist. Acad.*, 1754, p. 125).

Discussion entre Clairaut et d'Alembert.

Il n'est malheureusement que trop commun de voir naître des différens entre ceux que leurs talens et les circonstances sembleraient devoir le plus rapprocher. C'est ainsi que Clairaut et d'Alembert, compatriotes et confrères, dont l'amitié aurait, par la réunion de leurs différens tours d'esprit, pu produire de bien plus grandes choses que celles qu'ils ont faites isolément, se rencontrant tous deux dans une carrière où chacun aurait désiré



atteindre le premier le but, en conçurent un peu d'humeur et de jalousie réciproques. Ils ne le firent pas paraître d'abord : Clairaut convient, dans son premier Mémoire (*Mém. de Par.*, 1745, p. 335), que d'Alembert, *fait pour attaquer et pour résoudre les problèmes les plus difficiles*, travaillait à la théorie de la Lune dans le même temps que lui. Ce dernier avoue (*Mém.* cités, p. 389) que Clairaut n'avait eu aucune connaissance de sa méthode pour le mouvement des apsides, et ne lui dispute point (*Rech.*, disc. prél., p. 39) l'honneur de s'être aperçu le premier qu'il ne suffisait pas, en calculant la série qui donne le mouvement de l'apogée, de s'en tenir au premier terme; mais, dans ces mêmes *Recherches*, on le voit employer son talent pour la critique à examiner en détail les travaux de son rival sans pourtant le nommer, et ne pas négliger les occasions d'en signaler les côtés faibles. Le succès des Tables de Clairaut auprès des astronomes, contrastant avec le peu de cas et d'usage qu'il firent de celles de d'Alembert, anima encore le ressentiment de ce dernier; et les amis de l'un et de l'autre géomètres, au lieu d'intervenir pour terminer ce différend, l'envenimèrent plutôt par leurs louanges exclusives. On voit déjà percer trop de sévérité dans le troisième volume des *Recherches de d'Alembert*, où il s'attache à rabaisser l'opinion qu'on avait de l'exactitude des Tables de Clairaut, et à exagérer un peu les difficultés et l'incertitude de la théorie. Clairaut, pour parer les coups qu'on lui portait, se chargea de rendre compte de ce troisième volume, dans le n° de juin 1757 du *Journal des Savans*, où l'on avait, en 1756, fait un grand éloge des deux premiers; et là, tout en parlant très avantageusement de plusieurs parties de l'ouvrage, il y mêla quelques observations critiques. D'Alembert, oubliant celles qu'il s'était permises, accusa dès-lors Clairaut d'être l'agresseur, et d'avoir commis, dans cet article, le premier acte d'hostilité. Il répliqua, soit à la fin de la deuxième édition de sa *Dynamique*, publiée en 1758, soit dans une lettre insérée dans le *Mercure;* Clairaut reproduisit cette lettre dans le n° de février 1758 du *Journal des Savans*, en la réfutant article par article, et fortifiant ses premières allégations, dont nous avons déjà parlé dans le chapitre précédent : il lui suffit que d'Alembert ait jugé avec sévérité les Tables de Mayer, pour que lui-même s'empresse de les protéger.

Retour de la comète de 1682. Les choses en seraient peut-être restées là, si une autre pomme de discorde n'était venue ranimer et aigrir cette discussion. Halley, avait comme on sait, prédit le retour de la comète de 1682, pour les années 1758 ou 1759. Lalande proposa à Clairaut, dès 1757, d'appliquer sa solution du problème des trois corps aux perturbations que l'action de Jupiter avait dû produire sur le mouvement de cette comète. Clairaut entreprit en effet cette tâche immense; il vit bientôt qu'il fallait considérer aussi l'action de Saturne; et, avec l'aide de Lalande et de quelques autres personnes, il calcula les distances de Saturne et de Jupiter à la comète pour 150 ans, les forces que ces deux planètes avaient exercées sur elle, et les surfaces des courbes qui exprimaient les perturbations, ou les intégrales de chaque terme des équations du problème. On connaît le succès brillant et mémorable de ce travail prodigieux, dont Clairaut lut le résultat à l'Académie, le 14 novembre 1758, en lui annonçant que la comète passerait à son périhélie vers le milieu d'avril 1759, tandis qu'elle y arriva le 12 mars, époque qui se trouvait encore dans les limites des erreurs dont il croyait son résultat susceptible. Peu de temps après parurent, dans le t. II de l'*Observateur littéraire*, et le troisième volume du *Journal Ency-*

clopédique, deux articles très piquans qui ont été attribués à d'Alembert, et où l'on avance que Clairaut avait ajouté peu de chose aux instructions de Halley sur le retour de la comète; que le plus fort de son travail avait consisté dans des opérations d'arithmétique, dans l'application des nombres à des méthodes connues depuis long-temps, et à celle que d'Alembert avait donnée pour l'intégration de l'équation de l'orbite. On représente la différence de 32 jours entre le résultat de la théorie et l'observation, comme une erreur assez grossière, qui devait être comparée à la différence entre la période moyenne fictive et la période réelle, etc. Clairaut se justifia assez vivement aussi, tant dans une lettre (*Jour. des Sav.*, novembre 1759) que dans une brochure de vingt pages, où il montra toutes les difficultés d'un sujet qui ouvrait une région entièrement inconnue, où il fallait se frayer une route soi-même, et où les passages du positif au négatif, dans toute la suite des nombres qu'on emploie, exigeaient entre autres la plus scrupuleuse attention. Il soutint plus tard, que sa méthode des comètes lui était bien propre, que ce n'était que depuis sa publication que d'Alembert avait envisagé dans toute leur étendue les difficultés de cette théorie, et qu'il y avait loin des évolutions de calcul et de l'indication des méthodes, aux solutions complètes. Il envoya à d'Alembert un exemplaire de sa *Réponse aux Anonymes*, et celui-ci lui écrivit à ce sujet une lettre très sèche (reproduite dans le *Journ. des Sav.* de juin 1762), où il rehaussait la valeur de ce qui lui était propre, et annonçait l'intention de déprécier le travail de son confrère, *par amour de la vérité*, disait-il. Clairaut lui répondit avec plus de modération, et en le félicitant néanmoins avec quelque ironie, des recherches qu'il avait cru devoir faire sur la comète *depuis son retour*.

Mémoire de Clairaut sur les intégrales premières du problème des trois corps.

Clairaut avait aussi inséré dans le *Journal des Savans* d'août 1759, un petit Mémoire lu en juin, à l'Académie, à l'occasion d'un prix proposé par M. de Lauraguais, et contenant des *Réflexions sur le problème des trois corps, avec les équations différentielles qui expriment les conditions de ce problème*. Son but principal, dans cet opuscule, est de tirer, des six équations différentielles du second ordre, qui se présentent d'abord, quatre équations différentielles du premier, dont deux s'intègrent immédiatement. Il ne considère que le cas où les trois corps se meuvent dans un même plan, en remarquant que son résultat s'applique également lorsque le mouvement se passe dans des plans différens. Il part des équations du mouvement rapportées à deux axes rectangulaires, en désignant par m, n, q les masses des trois corps; par d, d', d'' les distances mutuelles du premier aux deux derniers, et du second au troisième; par r et s, t et u, x et y leurs coordonnées rectangulaires rapportées à une origine quelconque. Les équations qu'il obtient sont au nombre de six; elles sont symétriques et différentielles du second ordre par rapport au temps z, considéré comme variable indépendante (*).

(*) Ces équations sont, en supposant le corps m plus près de l'origine que les deux autres, le corps n intermédiaire, $u > y$, $y > x$, et prenant avec le signe — les composantes qui tendent à diminuer les coordonnées :

$$(1)\ldots\ n.\frac{(t-r)}{d^3}+q.\frac{(x-t)}{d'^3}=\frac{d^2r}{dz^2},\qquad (2)\ldots\ n.\frac{(u-s)}{d^3}+q.\frac{(y-s)}{d'^3}=\frac{d^2s}{dz^2}\ \text{pour le corps } m;$$

$$(3)\ldots\ q.\frac{(x-t)}{d''^3}-m.\frac{(t-r)}{d^3}=\frac{d^2t}{dz^2},\qquad (4)\ldots\ -q.\frac{(u-y)}{d''^3}-m.\frac{(u-s)}{d^3}=\frac{d^2u}{dz^2}\ \text{pour le corps } n;$$

$$(5)\ldots\ m.\frac{(x-r)}{d'^3}-n.\frac{(x-t)}{d''^3}=\frac{d^2x}{dz^2},\qquad (6)\ldots\ -m.\frac{(y-s)}{d'^3}+n.\frac{(u-y)}{d''^3}=\frac{d^2y}{dz^2}\ \text{pour le corps } q.$$

Il multiplie ensuite les deux premières équations par m, les deux suivantes par n, et les deux dernières par q; il ajoute séparément les trois équations de n° impair et les trois autres de n° pair, ce qui fait disparaître en entier les premiers membres, et donne, en intégrant, deux équations du premier ordre, qui peuvent être intégrées entièrement, et qu'il est facile de tirer, ainsi qu'il l'observe, de la propriété des *centres de gravité* trouvée par Newton.

Il multiplie de nouveau chacune des six équations par l'une des lettres s, r, u, t, y et x; puis retranchant la seconde équation de la première, la quatrième de la troisième, la cinquième de la sixième, et ajoutant les résultats, il obtient, en intégrant, une nouvelle équation du premier ordre, qui revient, comme il le remarque, à la loi des secteurs donnée par le chevalier d'Arcy, et qui a été appelée depuis intégrale des *aires*.

Enfin, il multiplie les équations impaires respectivement par $m.dr$, $n.dt$, $q.dx$, et ajoutant ces produits à ceux qui viennent de la multiplication semblable des équations paires par $m.ds$, $n.du$, $q.dy$, il obtient encore, par l'intégration immédiate, une autre équation du premier ordre, qu'il regarde avec raison comme une extension du principe des *forces vives*.

Ainsi on a, en joignant ces quatre intégrales premières, qu'il dit avoir trouvées depuis l'origine de ses recherches, à deux quelconques des équations proposées, un système complet d'équations pour résoudre le problème. Clairaut après l'avoir remarqué, ajoute : *Intègre maintenant qui pourra!* comme pour indiquer, par ce brusque défi, qu'on doit désespérer de parvenir à une solution rigoureuse; il poursuit alors en ces termes : « Ayant promptement abandonné ces équations pour recourir aux approximations, j'ai cherché, par une » méthode générale, la correction que le mouvement calculé à l'ordinaire dans une trajectoire simple, devait subir lorsque le projectile, au lieu d'être poussé vers le foyer de » cette trajectoire, recevait encore l'impression de deux autres forces quelconques. Ma » solution me donne cette correction en termes séparés de l'équation de l'orbite primitive » ou non altérée, en sorte qu'il n'est plus question que de mesurer à peu près les forces » perturbatrices, ou plutôt de connaître grossièrement l'orbite cherchée, pour l'obtenir » ensuite avec autant d'exactitude qu'il en faut pour les calculs astronomiques. »

1ers volumes des *Opuscules mathémat.* de d'Alembert.

C'est dans l'année 1761 que d'Alembert publia les deux premiers volumes de ses *Opuscules mathématiques*, recueil précieux où l'on trouve consignées tant d'idées neuves et ingénieuses, de discussions profondes et variées, de remarques intéressantes sur divers sujets de Physique, d'Astronomie et de Mathématiques. C'est en parlant de ces deux premiers volumes, qui contiennent quinze Mémoires, que les rédacteurs du *Journal des Savans* disent, dans le n° de décembre 1761 : « Quelle attaque ! quelle défense ! Rien » ne lui échappe, soit pour établir la justesse de ses procédés, soit pour renverser les

---

Clairaut en conclut les suivantes :

$$m.dr + n.dt + q.dx = adz, \qquad m.ds + n.du + q.dy = bdz,$$
$$m(sdr - rds) + n(udt - tdu) + q(ydx - xdy) = cdz,$$
$$\frac{m.n}{d} + \frac{q.m}{d'} + \frac{q.n}{d''} + f = \frac{m(dr^2 + ds^2) + n(dt^2 + du^2) + q(dx^2 + dy^2)}{dz^2},$$

les lettres a, b, c, f désignant des constantes arbitraires.

» moyens qu'il s'est proposé de combattre. Ici il déploie cette richesse de calcul qui » fait admirer le grand géomètre; là il répand ces considérations neuves et fortes qui » annoncent le métaphysicien profond; il étend, il rectifie les points de vue, il en » présente de nouveaux. C'est un esprit plein de ce qu'il traite, qui est maître de sa » matière; il ne fait grâce à aucun de ces principes que les mathématiciens nous ont » transmis sans preuves, et que nous avons reçus sans examen. »

Le quatorzième Mémoire a pour objet la théorie de la Lune; il y donne de nouvelles tables de cet astre, que Cousin avait calculées sous sa direction; il y joint des considérations intéressantes sur les méthodes, et n'épargne pas celle de Clairaut. Ces troisièmes tables, un peu plus exactes que les précédentes, n'ont guères été plus utiles, et cela a tenu probablement à ce que d'Alembert n'a pas eu la patience d'en fixer les coefficiens par les observations. Clairaut répondit à ses reproches par une lettre (*Journ. des Sav.*, déc. 1761) où il dit qu'il avait été d'abord flatté de voir que l'examen de sa méthode occupât tant de place dans les deux premiers volumes des *Recherches*, sans qu'il y fut nommé; il avoue que l'irritation que lui avaient causée les nouveaux procédés de son rival l'avait peut-être fait aller un peu trop loin dans sa *Réponse;* mais il s'étonne de voir d'Alembert persister si long-temps à examiner et disséquer toute sa théorie, et à faire ressortir la sienne avec l'avantage que lui donne la connaissance approfondie qu'il en a, tandis qu'il n'apprécie qu'incomplètement celle de son rival. « Puisque M. d'Alembert, dit-il en terminant, ne se sent » pas assez de patience pour faire les calculs nécessaires à la construction de bonnes » tables, qu'il veuille bien laisser tranquilles ceux qui ont le courage de l'entreprendre. »

D'Alembert répliqua dans le *Journ. Encycl.* du 15 février 1762, en renouvelant tous ses précédens reproches, et mettant sur des coopérateurs subalternes une grande partie du mérite des calculs de Clairaut. Celui-ci inséra dans le *Journal des Savans* de juin de la même année, un article qui porte l'empreinte d'un homme fatigué d'une contestation contraire à son caractère naturellement doux et modeste, mais qui a de la peine à prendre son parti des attaques dirigées publiquement contre ses productions, et qui craint de fournir, par son silence, des armes à un adversaire aigri. Il montre comment on peut, par la seule théorie, arriver à l'équation de l'ellipse mobile approchée, décrite par la Lune dans son mouvement troublé. Il cherche aussi à défendre ses collaborateurs, et déclare, en finissant, qu'il est décidé à ne plus continuer cette discussion dans les journaux; qu'il profitera avec reconnaissance des vues utiles que lui donnera d'Alembert, mais qu'il ne répondra point à ses nouveaux reproches: « J'aime mieux, dit-il, s'il le veut, » lui accorder une supériorité infinie, que d'être sans cesse à combattre pour les petits » domaines de nos amours propres. » Nous verrons dans la suite que d'Alembert n'abandonna pas sitôt la partie.

Fin de la discussion de Clairaut et de d'Alembert.

Fontaine avait aussi attaqué assez brusquement Clairaut, peu de mois auparavant (*Journ. des Sav.*, févr. 1762), dans une production ayant pour titre: *Doutes sur la méthode de M. Clairaut, pour déterminer le mouvement de la Lune autour de la Terre.* Ses objections portaient sur ce que Clairaut, pour faire disparaître les terme en $\cos v$, était obligé de limiter mal à propos une des constantes de l'intégration, et sur ce que son équation ne donnait, pour l'orbite de la Lune, qu'un cercle, lorsqu'on y substituait dans Ω avant l'intégration, pour $\frac{1}{r}$ sa valeur approchée de la forme $\alpha+\mathcal{C}'\cos\mu v$, et qu'on

Objections de Fontaine contre la méthode de Clairaut, et réponse de celui-ci.

y faisait abstraction de la force du Soleil. Clairaut lui répondit dans le n° de mai suivant: « Je ne crois pas, dit-il, pouvoir mieux reconnaître la peine que s'est donnée un adversaire dont je fais autant de cas que M. Fontaine, d'examiner une partie de mon travail, qu'en prenant celle de suivre pas à pas tous les argumens qui lui ont paru infirmer les conclusions que j'en ai tirées..... On sait que la détermination des constantes provenant de l'intégration de l'équation différentielle d'une certaine classe de courbes, sert à spécifier la courbe particulière que l'on considère, et qu'on est sûr d'avoir trouvé la véritable équation de la courbe, lorsque sa substitution dans l'équation différentielle fait évanouir tous les termes, quand la solution est rigoureuse, ou qu'elle n'en laisse que de très petits, quand elle n'est qu'approchée.... C'est ce dernier cas qui se présente ici; et comme l'équation ne serait pas résolue s'il y restait un terme en cos v, la limitation de la constante qu'il a pour coefficient est nécessaire. » Il attribue cette surabondance de termes à ce que la solution renferme tous les cas d'une classe de courbes dont on ne veut prendre qu'une seule en particulier. Il montre aussi que le second reproche de Fontaine tient uniquement à la manière dont celui-ci a intégré; car ayant, avant l'intégration, déterminé la valeur de Ω qui dépend des forces perturbatrices, lorsque ces forces sont nulles, la solution n'a plus lieu, puisqu'on ne peut rien substituer dans la quantité Ω, qui est égale à zéro; tandis que Clairaut laissant les termes en Ω distincts et indéterminés, obtient séparément et indépendamment de Ω l'équation de la section conique, qui ne devient celle d'un cercle qu'en limitant à dessein la vitesse et la direction au point où l'orbite coupe l'axe.

2e théorie de la Lune, de Clairaut.

Nous arrivons au dernier ouvrage de Clairaut, qu'il publia, en 1765, sous le titre de *Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction*, et qui renferme (en un volume de 161 pages in-4°) une deuxième édition de sa pièce couronnée en 1751, le résultat de ses recherches postérieures, et les nouvelles tables auxquelles elles l'avaient conduit. Quoique cet ouvrage soit à peu près le seul du même auteur qu'on connaisse et qu'on lise maintenant sur ce sujet, le compte que nous avons rendu de la marche progressive de ses travaux ne nous laisse presque plus rien à dire de celui-ci. Clairaut n'y donne pas plus que dans les précédens, le détail des opérations numériques par lesquelles il est parvenu à son expression du lieu de la Lune; il fait quelques petites corrections à celle de la parallaxe horizontale; il ne change rien à celle qu'il avait d'abord trouvée pour le nœud et l'inclinaison; mais il abrège encore le calcul des tables qui s'y rapportent, après s'être aperçu que la relation qu'il avait déjà remarquée pour les petites équations, avait également lieu dans les trois plus grandes. Des quinze équations qu'il avait d'abord pour le lieu du nœud, il n'en garde plus que deux; il détermine directement la réduction à l'écliptique par de très petites équations; et quant à la latitude, après l'avoir calculée à peu près d'une manière analogue, il la corrige au moyen de quatre autres tables dont trois sont à double entrée, et il reconnaît (p. 101) que ce n'est qu'après avoir vu les tables de Mayer qu'il a pensé à pousser plus loin l'abréviation du calcul qu'il ne l'avait fait en 1754. Enfin, il ajoute à ses quarante-une tables, calculées pour l'intervalle de 1756 à 1776, de manière à en rendre toutes les équations positives, la comparaison des lieux obtenus par leur moyen avec les observations que Lacaille lui avait données d'abord, et avec environ quatre-vingts autres lieux de la Lune observés par Bradley. Les erreurs en longitude ne s'élèvent jamais à plus de $1'\frac{1}{2}$, ce qui fait voir que ces tables peuvent servir à déterminer la longitude en mer, à $\frac{3}{4}$ de

degrés près. « Malgré toutes les peines que j'ai prises (dit-il dans son Avertissement) pour » perfectionner les résultats de ma théorie, il s'en faut bien que je fixe au terme où je suis » arrivé tous les secours que la navigation peut retirer des recherches de cette nature. » Il y a déjà quelques années que j'ai commencé la fatigante entreprise de refaire tous les » calculs avec plus d'uniformité et de rigueur, et j'aurai peut-être le courage de l'achever » quelque jour... » La mort devait anéantir ce projet, en enlevant cette même année, à l'âge de cinquante-deux ans, le géomètre précoce et distingué qui l'avait conçu, et qui, après avoir lu, dès l'âge de douze ans et huit mois, un Mémoire à l'Académie, et y être entré à dix-huit ans (ce qui ne s'était jamais vu), promettait encore de grandes choses après une carrière déjà si brillante. On lit avec intérêt son éloge par M. de Fouchy (*Hist. Acad.*, 1765), et celui qu'en a fait Bailly, dans le troisième *Discours* du tome III de son *Histoire de l'Astronomie moderne.*

CHAPITRE VII.

Tables et Théorie de la Lune, de Mayer.

Il est rare de voir ceux qui ont fait une découverte profiter de tous les avantages qu'elle présente. Après que des hommes de génie ont signalé un point de vue nouveau, ils laissent ordinairement à d'autres le soin d'appliquer le talent dont ils sont doués à cette invention; non plus pour la faire naître, mais pour en simplifier l'application, et pour en tirer tout le parti possible. C'est ainsi que, par la division du travail et la transmission successive des efforts de chacun, on parvient à surmonter des difficultés qu'il eût été presque impossible de franchir toutes à la fois. 1res Tables de Mayer.

On peut observer cette gradation dans le sujet qui nous occupe. Newton, dans ses sublimes recherches, avait ébauché le problème des trois corps; Euler, Clairaut et d'Alembert, l'avaient résolu les premiers d'une manière générale, en géomètres consommés; mais il était réservé à un homme, à la fois géomètre et astronome, de profiter avec succès des travaux de ses prédécesseurs et de ses contemporains, de prendre l'analyse pour guide, l'observation pour régulateur, et de construire le premier des tables utiles à la navigation. Cet homme fut Tobie Mayer, dont les premières Tables de la Lune parurent en 1753, dans le tom. II des *Mém. de la Soc. roy. de Gottingue*. Il les compara, dans le tome III, avec les observations; et sur 139, dont il fit usage, il n'en trouva aucune qui s'écartât du calcul jusqu'à 2′. Il annonça avoir dressé ses tables par une méthode particulière, qu'il trouva trop long d'expliquer. Clairaut disait à ce sujet (*Th. L.*, p. 102) : « J'ai lieu de croire qu'il s'est servi de la méthode de » M. Euler, dont il a rectifié les élémens par les observations, et dont il a tiré un » parti singulier, en pensant à ne faire usage des grandes équations qu'après avoir corrigé » le lieu moyen par les plus petites. » Il accusa cependant, ainsi que d'Alembert, les équations du nœud et de l'inclinaison, employées par Mayer, de n'être pas assez exactes, et les latitudes qu'elles servaient à calculer, de s'écarter notablement des observations; ce dernier ajoutait : que ce qui devait jeter du doute sur la précision des Tables de Mayer, c'est qu'elles n'étaient pas meilleures aux syzygies qu'ailleurs, tandis que cela

devait être; il ne lui accordait quelque mérite que sur les points où il était parvenu aux mêmes quantités que lui, et rappelait qu'on avait d'abord cru que les Tables de Newton ne différaient des observations que de 2′, tandis qu'on avait trouvé depuis, que l'erreur moyenne y montait au moins à 5′ : ce qui faisait voir qu'il fallait un nombre prodigieux d'observations pour apprécier sûrement de nouvelles tables de la Lune. Celles de Mayer sortirent victorieuses de cette épreuve, puisque l'examen et l'usage ne firent que confirmer leur bonté auprès des astronomes. Dans l'intervalle, l'auteur continua à les perfectionner, soit en calculant plus exactement les résultats de la théorie, soit en les ajustant avec les observations de Bradley.

Prix relatif aux longitudes, proposé en Angleterre.

Dès l'année 1714, le Parlement d'Angleterre avait passé un acte par lequel il assurait 20,000 livres sterling à celui qui indiquerait une méthode pour trouver la longitude sur mer, à un demi degré près. Clairaut avait aspiré à remporter ce prix par ses derniers travaux et par ceux qu'il méditait. Mayer, pour y concourir, envoya à Londres, en 1755, ses secondes tables et sa théorie; mais cet habile astronome n'eut pas plus que Clairaut l'avantage de jouir de la récompense de ses grands travaux, et après avoir encore introduit de nouveaux perfectionnemens dans ses tables, il mourut en 1762, à l'âge de trente-neuf ans. Sa veuve envoya, l'année suivante, au Bureau des Longitudes anglais, les dernières tables de son mari, mises en ordre par Kœstner. Déjà Bradley, auquel on avait confié les précédentes, avait reconnu, tant par onze cents observations faites à Greenwich, que par d'autres faites en mer avec le sextant nouvellement inventé par Hadley et perfectionné par Mayer, que l'erreur de ces tables n'excédait pas 1′; Maskeline, de retour de l'île de Sainte-Hélène, avait confirmé leur utilité dans les voyages sur mer. Le Bureau des Longitudes décida en conséquence, le 9 février 1765, qu'on enverrait à la veuve de Mayer la somme de 3,000 livres sterlings, et en accorda, dans le même temps, une bien plus forte à Harrison, auquel on devait l'idée des montres marines à balanciers compensateurs. Cette Commission publia à Londres, en 1767, la théorie de Mayer écrite en latin; mais les tables de cet astronome, quoique imprimées alors, ne parurent qu'en 1770, par les soins de Maskeline.

Mayer en remporte une partie après sa mort.

Théorie de la Lune de Mayer.

La théorie de la Lune, de Mayer, est l'une des plus élégantes et des plus exactes qui aient paru. L'auteur n'y est pas entré dans le détail de toutes ses opérations, et il s'est contenté de montrer leur marche et leurs résultats. « Ce n'est pas (dit-il dans sa préface) » pour démontrer l'exactitude et la vérité de mes tables lunaires, que j'expose ici la » méthode que j'ai employée à la recherche des inégalités du mouvement de la Lune » par la théorie; car celle-ci a l'inconvénient de ne pouvoir donner certaines iné» galités qu'en poussant le calcul beaucoup plus loin que je n'ai eu la patience » de le faire; mais c'est pour faire voir du moins qu'on ne peut tirer de la théo» rie aucun argument contre la bonté de mes tables. Cela suit évidemment de ce » que les inégalités que l'on trouve dans ces tables, corrigées et assujéties à un grand » nombre d'observations, ne diffèrent presque jamais de plus d'une ½ minute de celles » qui sont tirées de la seule théorie; ce qui montre suffisamment, d'un côté que les erreurs » viennent plutôt du calcul analytique que des tables, et de l'autre, que la loi de l'at» traction newtonienne s'accorde avec les observations, même dans les plus petits » détails. » Il a pris pour base la théorie de la Lune d'Euler, de 1753, et il convient lui-même que ses équations fondamentales du mouvement sont, à très peu de chose

Rapports de cette théorie avec celle d'Euler.

près, les mêmes que celles d'Euler. Il exprime les forces d'une manière semblable, considère comme lui l'orbite projetée, et prend aussi d'abord pour variable indépendante, le moyen mouvement q de la Lune. Il désigne par X, Y, Z les trois composantes rectangulaires des forces qui agissent sur elle; par x l'inverse du rapport de la distance accourcie au $\frac{1}{2}$ grand axe; par φ la longitude; l'intégration de la seconde équation lui donne : $\frac{d\varphi}{x^2dq} = e - \int \frac{\mathrm{Y}dq}{x}$; il désigne alors, ainsi qu'Euler, par une lettre P, le deuxième terme du second membre; il suppose, pour simplifier, $ex^2dq = dp$, et regardant dès-lors l'élément dp comme constant, il réduit la première équation du mouvement à exprimer $\frac{d^2x}{dp^2} + x$, en fonction de X et de P.

La troisième équation renferme la différentielle seconde de la tangente de la latitude l de la Lune, divisée par x; Mayer remarque qu'au lieu de la décomposer, ainsi qu'Euler, en deux autres qui lui donnent le lieu du nœud et la variation de l'inclinaison, il est bien plus simple de l'employer à la détermination directe de la latitude, puisque, d'après le premier procédé, non-seulement le travail est doublé, mais les tables auxquelles il conduit sont moins conformes à l'usage astronomique. Il transforme donc cette équation de manière à lui donner la forme la plus commode, et à y faire entrer tang l précisément de la même manière que x entre dans la première, ce qui ramène la résolution de cette équation au même procédé qu'il doit employer pour celle de l'autre. (*) Opérations préliminaires.

Mayer commence par l'intégration des deux premières formules qui donnent d^2x et dP. Pour y parvenir, il a recours au même procédé qu'Euler, c'est-à-dire aux séries indéterminées, avec ces différences cependant qu'il ne sépare point comme lui les inégalités en différentes classes considérées à part; qu'au lieu de prendre pour P un développement en fonction des cos. des multiples de p, il en prend un pour $\frac{d\mathrm{P}}{dp}$, en fonction des sin. des mêmes angles; enfin, qu'il suppose les multiples de p indéterminés comme les coefficiens de leurs sin. et cos. Pour légitimer ces suppositions, il suffit d'observer Intégration des équations par les séries.

(*) Les équations employées par Mayer sont (voyez note 6, § 4), en supposant entre dp et dq la relation $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{ex^2}$,

$$(1)\ldots\; o = \frac{d^2x}{dp^2} + x - \frac{\mathrm{X}}{e^2x^2} - \frac{2\mathrm{P}x}{e} + \frac{\mathrm{P}^2x}{e^2}, \qquad (2)\ldots\; o = \frac{d\mathrm{P}}{dp} - \frac{\mathrm{Y}}{ex^3},$$

$$(3)\ldots\; o = \frac{d^2(\mathrm{tang}\, l)}{dp^2} + \mathrm{tang}\, l + \frac{(\mathrm{Z}-\mathrm{X})}{e^2x^3}\,\mathrm{tang}\, l - \frac{2\mathrm{P}\,\mathrm{tang}\, l}{e} + \frac{\mathrm{P}^2\,\mathrm{tang}\, l}{e^2};$$

la seconde étant intégrée, sert ensuite à déterminer $d\varphi$ au moyen de l'équation $\frac{d\varphi}{dp} = 1 - \frac{\mathrm{P}}{e}$.

Les valeurs des composantes X, Y, Z sont (voyez note 4, § 4), en faisant $\nu = \frac{1}{x}$,

$$\mathrm{X} = gx^2\cos^3 l - \frac{n^2}{2xy^3}(1 + 3\cos 2\omega) - \frac{3\pi n^2}{8x^2y^4}(3\cos\omega + 5\cos 3\omega),$$

$$\mathrm{Y} = \frac{3n^2\sin 2\omega}{2xy^3} + \frac{3\pi n^2}{8x^2y^4}(\sin\omega + 5\sin 3\omega), \qquad \mathrm{Z} = gx^2\cos^3 l + \frac{n^2}{xy^3} + \frac{3\pi n^2\cos\omega}{8x^2y^4},$$

n étant le rapport des moyens mouvemens, $\frac{a\gamma}{\pi}$ la distance du Soleil à la Terre, π le rapport des parallaxes, ω l'angle d'élongation, et g la quantité $\frac{n^2(\mathrm{L}+\mathrm{T})}{\pi^3(\mathrm{S}+\mathrm{T})}$.

que l'introduction d'une nouvelle variable indépendante p (qui est artificielle pour ainsi dire, et n'est représentée par rien dans la nature) dans la première équation en x, qui est différentielle du second ordre, et dont les termes principaux sont linéaires, indique que son intégrale doit être exprimée par une suite de cos. des multiples de p; et comme P et son carré entrent dans cette équation, il faut que la valeur de P soit réductible aussi à une suite de cos. des multiples de p, et par conséquent que sa différentielle, prise par rapport à p, s'exprime par une série de sin. des mêmes angles, qui devra satisfaire de plus à la seconde équation. On verra d'ailleurs *à posteriori*, comme le remarque Mayer, que ces suppositions s'accordent avec la nature du problème, puisque les équations différentielles qui l'expriment suffiront pour déterminer toutes les quantités arbitraires, et qu'aucun terme, différent de ceux de la forme $A \cos \alpha p$ ou $a \sin \alpha p$, n'y sera introduit, ainsi qu'on le vérifiera par la résolution de ces équations.

La raison qui a dû le porter à prendre d'abord des multiples arbitraires au lieu de multiples connus, c'est que n'ayant pas, comme Euler, développé les secondes parties de ses équations différentielles avant de prendre les valeurs indéterminées de x et de dP, il ne pouvait pas connaître d'avance quels seraient les multiples déterminés qui y seraient introduits, et quels seraient ceux qui devraient par conséquent entrer aussi dans les intégrales de ces équations. D'un autre côté, l'arbitraire laissé aux multiples de p, avait un avantage marqué sous le rapport de la plus grande simplicité qu'il permettait de donner aux formules. En effet, au lieu de prendre, comme Euler, pour les valeurs cherchées, des développemens composés d'autant de termes qu'on veut en déterminer, Mayer substitue pour $1-x$ et pour $\frac{dP}{dp}$, des séries dont il lui suffit de considérer trois termes (*); nous verrons ensuite que le premier de ces termes n'est même pas arbitraire, et comment les deux autres ont pu lui suffire pour la détermination des coefficiens de tous les termes qui entrent en si grand nombre dans les valeurs définitives.

Réduction de tous les termes à des fonctions de p seulement.

Après avoir adopté pour x et pour le coefficient différentiel de P ces valeurs indéterminées, il lui reste à développer les termes des équations différentielles qui proviennent des forces perturbatrices. Ces termes sont exprimés par des fonctions des puissances de P et des rayons vecteurs x et y de la Lune et du Soleil, des sin. et cos. des multiples de l'élongation ω, enfin du cos. de la latitude l, et il s'agit de les réduire à des fonctions périodiques de la seule variable p.

Pour y parvenir, Mayer commence d'abord par remarquer que les termes dont il s'agit étant affectés pour la plupart du facteur n^2, qui est fort petit, puisqu'il désigne le carré du rapport des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune, on peut en général se borner, dans leurs valeurs, aux secondes puissances des coefficiens indéterminés ou à leurs produits deux à deux; et il ne conserve dans les termes du troisième ordre que ceux qui sont multipliés par A^3, A représentant le premier et le plus grand des coefficiens de la valeur de x. Il développe alors les puissances de cette variable en cosinus d'arcs multiples; prenant ensuite pour y sa valeur dans le cas du mouvement elliptique, en fonction de l'excentricité ε et de l'anomalie vraie s du Soleil, il obtient aussi la valeur

(*) Savoir :

$$1-x = A\cos\alpha p + B\cos\beta p + C\cos\gamma p + \text{etc.},$$
$$\frac{dP}{dp} = a\sin\alpha p + b\sin\beta p + c\sin\gamma p + \text{etc.}$$

de s en fonction de l'anomalie moyenne nq; et comme l'intégration de l'équation entre dq et dp donne q en fonction de p et des sin. des multiples de p, il obtient par là les expressions de nq et de s, d'où il déduit la valeur de y et de ses puissances, en fonction de p et des cos. des multiples de p, en négligeant les puissances de ϵ supérieures à la seconde (*).

L'intégrale de la valeur supposée pour dP, prise sans ajouter de constante et substituée pour P dans l'expression de $d\varphi$, lui donne, en intégrant de nouveau (ce qui introduit comme diviseurs les carrés des multiples de p), la valeur de φ en p; et comme il connaît déjà celle de s, il ne lui reste plus qu'à les retrancher l'une de l'autre pour obtenir celle de ω, dont le premier terme est rp, en supposant $r = 1 - n$ (**). On peut en déduire facilement les valeurs cherchées des sin. et cos. des multiples de ω.

Enfin, quant à l'expression de l, dont le cos. entre dans la première équation, il faudrait à la rigueur, pour la connaître, avoir déjà résolu la troisième, qui sert à déterminer tang l; mais comme il suffit d'une valeur approchée, Mayer prend pour cet effet le résultat d'une première opération qui lui donne cos l en fonction des cos. des angles np, rp, ip, αp, et de leurs multiples, affectés de coefficiens numériques; α désignant le rapport du mouvement de l'anomalie de la Lune au mouvement de sa longitude, et i le rapport du mouvement de la Lune à partir de son nœud, à son mouvement en longitude.

Forme des équations après toutes les substitutions.

Il ne s'agit plus que de substituer toutes ces valeurs dans les deux premières équations différentielles, d'y mettre aussi pour $\frac{d^2x}{dp^2} + x$ et $\frac{d\mathrm{P}}{dp}$ leurs expressions tirées de celles qu'on a supposées, et de réunir tous les termes semblables en les ordonnant. Ces opérations exigent les calculs les plus laborieux, et Mayer se contente d'en donner le résultat, qui consiste, pour la première équation, en une suite de cosinus de cent vingt-deux

---

(*) On a, en supposant l'orbite du Soleil elliptique,

$$y = \frac{1-\epsilon^2}{1-\epsilon\cos s}, \qquad s = nq - 2\epsilon\sin nq + \frac{5\epsilon^2}{4}\sin 2nq;$$

or, l'équation $dq = \frac{dp}{ex^2}$ donne, en y mettant pour x sa valeur précédente, déterminant la constante e par la condition que la somme des coefficiens de dp soit égale à 1, et intégrant,

$$q = p + \frac{2\mathrm{A}}{\alpha e}\sin\alpha p + \frac{2\mathrm{B}}{\mathcal{C}e}\sin\mathcal{C}p + \frac{3\mathrm{A}^2}{4\alpha e}\sin 2\alpha p + \frac{3\mathrm{AB}}{(\alpha\pm\mathcal{C})e}\sin(\alpha\pm\mathcal{C})p + \text{etc.}$$

On tire de là la valeur de nq et celle de s, d'où l'on déduit, pour $\frac{1}{y^3}$, par exemple, une expression de la forme

$$\frac{1}{y^3} = 1 + \frac{3}{2}\epsilon^2 - 3\epsilon\cos np - \frac{3\mathrm{A}n\epsilon}{\alpha}\cos(\alpha+n)p + \frac{3\mathrm{B}n\epsilon}{\mathcal{C}}\cos(\mathcal{C}-n)p + \text{etc.}$$

(**) L'intégrale de la valeur de $\frac{d\mathrm{P}}{dp}$ est $\mathrm{P} = -\frac{a}{\alpha}\cos\alpha p - \frac{b}{\mathcal{C}}\cos\mathcal{C}p - \frac{c}{\gamma}\cos\gamma p$; l'équation...... $\frac{d\varphi}{dp} = 1 - \frac{\mathrm{P}}{e}$ donne, en y mettant pour P cette valeur, et intégrant,

$$\varphi = p + \frac{a}{\alpha^2 e}\sin\alpha p + \frac{b}{\mathcal{C}^2 e}\sin\mathcal{C}p + \frac{c}{\gamma^2 e}\sin\gamma p;$$

d'où l'on tire

$$\omega = \varphi - s = rp + \dot{a}\sin\alpha p + \dot{b}\sin\mathcal{C}p + \text{etc.} - \frac{3\mathrm{A}^2 n}{4\alpha}\sin 2\alpha p - \frac{3\mathrm{AB}n}{\alpha\pm\mathcal{C}}\sin(\alpha\pm\mathcal{C})p - \text{etc.},$$

valeur où $r = 1 - n$, et où $\dot{a}$, $\dot{b}$, etc., désignent des coefficiens composés de plusieurs termes.

multiples différens de p, et pour la seconde, en une série de sinus comprenant soixante-huit de ces multiples de p.

On peut distinguer dans chacune d'elles trois espèces de termes, d'après la nature des multiples de p et celle des coefficiens. La première espèce comprend ceux où les multiples sont α, ζ, γ, ou leurs composés $\alpha + \zeta$, $\alpha + \zeta + \gamma$, $\gamma - 2\zeta$, etc., et dont les coefficiens contiennent un ou plusieurs termes qui ont tous en facteur l'une des lettres A, B, C, a, α, etc. La seconde espèce se compose des termes où les multiples sont mixtes, c'est-à-dire sont le résultat de la combinaison des multiples connus avec les multiples indéterminés ; tels sont $2r + \alpha$, $2r + 2\gamma$, $2r + \zeta + \gamma$, $2r + n + \gamma$, etc.; leurs coefficiens sont à la fois composés de fonctions des seuls élémens, ou de fonctions des élémens et des indéterminées. Enfin les termes de la troisième espèce ne renferment que des multiples connus, tels que n, i, r et leurs composés ; leurs coefficiens sont des nombres ou de simples fonctions des élémens connus. Le multiple α entre dans la première équation, soit dans les termes de la première, soit dans ceux de la troisième espèce ; il se trouve introduit dans ceux de la première par les valeurs indéterminées supposées pour x et pour P, et dans ceux de la troisième par la valeur approchée substituée pour $\cos l$, en supposant alors α connu, et son cos. affecté d'un coefficient numérique. Ainsi, la symétrie qui existe d'ailleurs partout dans la manière dont entrent les lettres A, B, C, α, ζ, γ, a, b, c, est dérangée en ce point dans la première équation par l'introduction de cette dernière valeur.

« Il faut remarquer, dit Mayer, que l'un des coefficiens de la valeur de x, par exemple » A, n'est pas déterminé par ces équations ; et cela tient à la nature même du problème, » car on y suppose que l'excentricité de l'orbite lunaire, en tant qu'elle ne dépend pas » de l'action des forces, est connue. » D'après cela il représente par A cette excentricité, le multiple α du terme correspondant désigne alors le mouvement de l'anomalie moyenne, et $1 - \alpha$ le mouvement de l'apogée lunaire ; sa valeur doit être déterminée par le premier terme de la première équation, qui lui sert à vérifier sur ce point l'accord de la théorie avec les observations, et il suppose α connu dans tous les autres termes. Il donne les valeurs en nombres des élémens n, α, r, i, ϖ, A, ι, qui doivent être substituées dans les coefficiens où ils entrent ; et comme α est regardé maintenant comme connu, il ne demeure plus alors dans les équations que deux multiples arbitraires ζ et γ combinés de diverses manières, et il lui reste à déterminer, au moyen de ces équations, tant les multiples que les coefficiens de tous les termes des valeurs définitives.

Détermination des multiples et des coefficiens. « Ce serait, dit-il, une chose longue, fastidieuse et difficile, à moins d'exposer tous les » calculs, que de montrer comment je suis parvenu à la détermination cherchée. Je ne vois » pas cependant que cette méthode ait rien de nouveau, si ce n'est sa longueur, et elle ne » diffère point du procédé ordinaire pour fixer les valeurs des quantités indéterminées, » connu de tous ceux qui se sont le moins du monde occupés de l'analyse moderne. Il me » suffira donc de poser les valeurs des quantités A, B, C, etc., a, b, c, etc., telles » que je les ai obtenues après beaucoup de soins et d'attentions, en répétant souvent trois » ou quatre fois le même calcul... » On doit regretter que Mayer ne soit pas entré dans quelques détails de plus sur toutes ces opérations, que la complication de ses équations rend d'abord assez difficiles à se représenter. Nous allons cependant, d'après quelques indications qu'on peut tirer de ses calculs préliminaires et de l'inspection de ses formules, hasarder quelques conjectures sur la manière dont il a pu s'y prendre.

Pour que les valeurs supposées aux variables x et P soient les véritables intégrales des équations différentielles, il faut qu'elles satisfassent à ces équations ou qu'elles les rendent identiques après qu'on y a fait, de part et d'autre, toutes les substitutions; il faut donc que les coefficiens des sin. ou cos. de chaque multiple différent de p qui y entre, se détruisent séparément. Or, nous venons de voir qu'il s'y trouvait des sin. ou cos. de multiples connus qui avaient pour coëfficiens des nombres ou des fonctions des élémens qui ne se réduisaient point à zéro. On doit conclure de là que pour que les équations soient satisfaites, il faut profiter de l'arbitraire laissé aux multiples $\mathfrak{C}$ et γ pour égaler les termes qui les contiennent à chacun des sin. ou cos. des multiples connus, et déterminer ensuite leurs coefficiens en égalant à zéro la somme de ceux qui multiplient chaque fonction périodique. Autant il se trouve de multiples de p déjà connus dans les équations identiques, autant il doit s'en trouver aussi dans les valeurs définitives de x et de P, et autant il doit y avoir d'équations de condition pour déterminer leurs coefficiens.

Si l'on avait supposé dès le commencement les développemens de x et de P composés d'autant de termes indéterminés qu'on veut en obtenir, il suffirait alors d'égaler respectivement chaque multiple indéterminé à un multiple connu; mais l'énorme complication qui résulterait des substitutions de ce grand nombre de termes qui se combineraient dans les équations trois à trois, quatre à quatre, etc., ne serait rachetée par aucun avantage lorsqu'on ne veut conserver, ainsi que le fait Mayer, que les combinaisons deux à deux des multiples et des coefficiens. Il lui suffit alors de deux termes dans chaque valeur, savoir, B $\cos \mathfrak{C}p$, C $\cos \gamma p$ dans celle de $1-x$; $b \sin \mathfrak{C}p$, $c \sin \gamma p$ dans celle du coefficient différentiel de P, pour les exprimer tous, en prenant successivement pour $\mathfrak{C}$ et γ tous les multiples qui doivent entrer dans les valeurs définitives; c'est en effet ce qu'on lui voit faire, p. 35 de sa Théorie, où il calcule les valeurs numériques qu'ont, dans chacun de ces divers cas, les log. des quantités $\mathfrak{C}^2-f^2$, γ^2-f^2, qui multiplient B et C dans les coefficiens des termes de la première formule en $\cos \mathfrak{C}p$, $\cos \gamma p$. Par ce procédé ingénieux, les développemens sont, dès le commencement, bornés au second ordre; il ne s'y trouve aucun terme inutile, et la symétrie avec laquelle ces lettres indéterminées entrent dans les formules, les rend propres à représenter également tous les coefficiens et les multiples qu'on veut.

Supposons par exemple qu'on cherche l'équation de condition qui doit provenir du terme en $\cos 2rp$; désignons par L son coefficient indéterminé, par M, N, P, etc., ceux des cos. dont les multiples sont $2r-\alpha$, $4r$, $2r-n$, etc.; si l'on fait $\mathfrak{C}=2r$, ce qui entraîne $B=L$, qu'on prenne successivement pour γ tous les multiples de p qui réduisent à $2rp$ les angles mixtes où se trouvent à la fois γ et des multiples connus, en exceptant cependant $2r$ et α, puisque ce dernier entre déjà dans les formules, et qu'on remplace aussi C par les lettres correspondantes; on verra que la valeur $\gamma=2rp-\alpha$, réduisant à $2rp$ l'angle $(\alpha+\gamma)\,p$ dont le cos. entre dans la formule, produit un terme de l'espèce de ceux que l'on considère, et dans le coefficient duquel il faudra faire $B=L$, $C=M$. Il en sera de même de la valeur $\gamma=4r$, par rapport à l'angle $(2r-\gamma)\,p$, et de la valeur $\gamma=2r-n$ par rapport à l'angle $(n+\gamma)\,p$; il faudra donc remplacer, dans les coefficiens des cos. de ces angles, les lettres B et C par L et N dans le premier cas, L et P dans le second, et ainsi de suite. Lorsqu'on aura épuisé toutes les combinaisons possibles qui peuvent amener l'angle $2rp$, il ne restera plus qu'à ajouter, avec leurs signes, tous les coefficiens de son cos., et à égaler leur somme à zéro pour avoir l'équation de

condition cherchée; on continuera ainsi à calculer ces équations une à une, jusqu'à ce qu'on ait successivement donné à ζ toutes les valeurs des multiples de p qui doivent se trouver dans x, et on appliquera le même procédé à la seconde formule.

Il faut remarquer cependant qu'il peut y avoir dans les valeurs définitives de x et de P des termes en multiples connus qui ne se trouvent pas dans les formules posées par Mayer, et réciproquement. Ainsi, la première formule contient cinquante-cinq multiples déterminés, la seconde n'en renferme que trente, et cependant les deux valeurs définitives en contiennent, à une unité près, le même nombre l'une que l'autre. Les termes dont les multiples sont $4r+\alpha$ et $4r-\alpha$, par exemple, n'entrent que dans les valeurs définitives, et ceux en $(2r-4i)\,p$, $(4r-2i)\,p$ ne se rencontrent que dans les formules. Cela tient probablement à ce que, dans le premier cas, ces termes sont produits par des combinaisons qui introduisent de nouveaux multiples; ainsi, la valeur $\zeta = 2r$ réduisant à $4r-\alpha$, $4r+\alpha$ les multiples $2r-\alpha+\zeta$, $2r+\alpha+\zeta$, indique qu'il pourrait se trouver des termes semblables dans la valeur de x, où l'on est conduit par là à en supposer de tels, affectés de certains coefficiens qu'on détermine ensuite par le même procédé que celui dont on a fait usage pour les autres.

Il devrait se rencontrer d'après cela, dans x et dans P, un bien plus grand nombre de termes qu'il ne s'en trouve dans les formules, si la petitesse de leurs coefficiens n'autorisait pas à les négliger le plus souvent. Ce sont ces mêmes considérations sur l'ordre et la petitesse des termes qui permettent d'en omettre, dans les valeurs de x et de P, quelques-uns qui existent dans les formules, et qui servent aussi à réduire considérablement le calcul de l'élimination des coefficiens, dont la complication serait effrayante, si l'on ne pouvait y appliquer des procédés d'approximation successive; ainsi, on peut supposer que Mayer a été guidé par le résultat d'une première opération qui lui indiquait quels étaient les plus grands termes; qu'il n'a introduit d'abord pour ζ et γ que les argumens qui y répondaient, et a déterminé par là les coefficiens de ces inégalités d'une manière approchée; que partant alors de ces premières données pour prendre de nouvelles valeurs pour ζ et γ, qui servissent à déterminer de nouveaux coefficiens plus petits, il est revenu aussi, à plusieurs reprises, sur les déterminations précédentes, en ayant égard aux diverses combinaisons des argumens, qui reproduisaient les premiers, et en indiquaient d'autres qu'il fallait aussi faire entrer dans le calcul.

Valeurs définitives des variables, et réduction de ces valeurs à la forme la plus commode.

Après avoir, sur de simples présomptions, cherché à donner de la méthode de Mayer une explication peut-être bien imparfaite, il nous reste à indiquer en peu de mots les résultats auxquels sa théorie le conduit. Il obtient pour x une valeur composée de quarante-quatre cosinus de multiples différens de p, et pour le coefficient différentiel de P, une série de sinus de quarante-trois de ces mêmes angles, où $\sin np$ et $\sin 2np$, dont il a trouvé les coefficiens nuls dans l'ordre où il se bornait, sont remplacés par le sin. de $3np$, dont le cos. n'entre pas dans l'expression de x. Il substitue alors, pour les multiples et les coefficiens, leurs valeurs dans les équations obtenues précédemment par l'intégration, qui donnent φ et q en fonction de p et des sin. des multiples de p, et tire alors de la seconde, par le retour des suites, l'expression de p en q : ce qui lui fournit ensuite le moyen d'éliminer de la première l'angle auxiliaire p, et d'obtenir, après des calculs très pénibles, la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne, des sinus de ses multiples, et de ceux des distances angulaires de la Lune au Soleil et à son nœud. « Quoique » cette formule, qui donne les mouvemens vrais par les moyens, soit (dit-il) analogue

» à celle dont Clairaut s'est servi pour construire ses Tables, néanmoins le grand nombre des
» inégalités qui y entrent, et des tables qu'elles exigeraient, rendrait si pénible le calcul
» des lieux de la Lune, qu'il pourrait rebuter le calculateur le plus patient. J'ai cherché
» d'après cela à réduire le nombre des inégalités de cette formule, et j'en suis venu à
» bout en remarquant que plusieurs des inégalités introduites par le mouvement moyen
» du Soleil disparaîtraient si l'on employait son mouvement vrai; que les deux termes
» en sin $(\alpha + n)\, q$ et sin $(\alpha - n)\, q$ s'évanouissaient presqu'en entier, en appliquant
» à l'anomalie moyenne de la Lune αq, avant d'en conclure l'équation du centre, une
» équation particulière qui dépend de l'anomalie moyenne du Soleil nq; enfin, que
» d'autres inégalités étaient diminuées ou même annulées, quand on appliquait, à
» cette même anomalie de la Lune, les petites inégalités de la longitude, en exceptant
» celles qui dépendent des distances rq et iq de la Lune au Soleil et à son nœud. » Il ramène par là la formule précédente à la forme la plus commode, et il la réduit à vingt-deux termes, qu'il calcule au moyen de quinze tables dont les argumens sont : d'abord les anomalies moyennes du Soleil et de la Lune, puis les distances de la Lune au Soleil et à son nœud, successivement corrigées par les premières équations, et il néglige un grand nombre de termes dont les coefficiens sont très petits. Mayer expose ensuite les corrections qu'il a faites à sa formule d'après les observations, tant pour en rectifier les élémens, que pour déterminer certains termes que la théorie ne peut pas, dit-il, suffisamment faire connaître. Il compare les coefficiens des inégalités, réduits en secondes, tels que les donnent la théorie au moyen des élémens corrigés, avec ceux qu'il a employés dans ses tables, après les avoir assujétis à un grand nombre d'occultations observées par Bradley, par la méthode des équations de condition que Mayer avait employée déjà dans son Mémoire sur la libration de la Lune, publié en allemand en 1750; il vérifie par là que les résultats ne diffèrent que de quelques secondes. La comparaison qu'il fait ensuite de l'inégalité qui dépend du sinus de l'élongation, déterminée par la théorie en supposant la parallaxe du Soleil de 10",8, avec cette même inégalité déduite des observations, lui montre aussi que cette parallaxe ne doit pas dépasser 7",8; et comme il se croyait sûr, à 5" près, de l'inégalité, montant à 1′ 55", d'où il la concluait, il en résultait pour lui que cette valeur de la parallaxe ne pouvait différer de la véritable au-delà de sa vingt-quatrième partie.

Inégalités de la latitude.

Mayer passe alors à la détermination des inégalités de la Lune en latitude, et il y parvient plus facilement qu'à celles de la longitude, mais par le même procédé; ainsi il suppose pour tang l une suite de termes en fonction des sinus de divers multiples indéterminés de p; il substitue cette expression dans la troisième équation différentielle, et y met aussi pour n, e, x, y, α, π et P, leurs valeurs numériques, en prenant pour le coefficient du premier terme la tangente de l'inclinaison moyenne. Il détermine les coefficiens et les multiples inconnus; le multiple du premier terme exprime le mouvement moyen de la Lune à partir du nœud ascendant; il le trouve ainsi le même, à 1" près, que celui que donnent les observations. Il obtient ensuite pour tang l une série composée de 34 termes; et après avoir réduit cette formule définitive à la forme la plus commode, il la corrige comme la première par les observations, en négligeant les termes qui montent à peine à 2", de manière à n'avoir plus besoin que de dix tables pour la calculer. Enfin, quant à la parallaxe, il fait voir que son expression peut être tirée facilement de la valeur précédente de x, sans entrer dans aucun détail sur ce calcul.

CHAPITRE VIII.

Premières recherches sur l'équation séculaire de la Lune. Seconde Théorie de la Lune, d'Euler.

Découverte de l'accélération du moyen mouvement de la Lune, par l'observation.

NOUS venons de voir Mayer montrer, par un usage simultané de la théorie et de l'observation, que la première est éminemment utile pour découvrir la forme des inégalités auxquelles le mouvement de la Lune est soumis, et pour en déterminer plusieurs; mais que la seconde est le plus souvent préférable pour fixer leurs coefficiens avec précision; il avait à peu près tiré de celle-là tout le parti possible relativement aux inégalités périodiques, et ce n'était plus guère que par une longue suite d'observations exactes, et par un emploi judicieux de la méthode des équations de condition, qu'on pouvait perfectionner sur ce point les Tables de la Lune, auxquelles il avait donné la forme la plus convenable. Mais il restait encore une question importante à résoudre, sur laquelle les observations ne pouvaient signaler que des effets isolés, sans indiquer leur cause ni leur loi; je veux parler de l'*équation séculaire de la Lune*, dont l'explication, par l'attraction newtonienne, devait si long-temps échapper aux recherches des plus grands géomètres.

Kepler avait, dès l'année 1625, élevé des doutes sur l'uniformité des moyens mouvemens de quelques planètes; mais ce fut Halley qui s'aperçut le premier de l'accélération de celui de la Lune, en comparant (ainsi que le rapporte Newton, dans un passage de la seconde édition des *Principes*, qui a été supprimé dans la troisième) des observations d'éclipses faites à Babylone avec celles d'Albategnius et avec celles des modernes; mais il n'eut point égard à cette accélération dans ses tables. Dunthorn et Mayer examinèrent de nouveau ce point important de la théorie lunaire. Ils essayèrent d'accorder les observations des Chaldéens et des Arabes avec celles des modernes, en ajoutant aux longitudes moyennes de la Lune une quantité proportionnelle au carré du nombre des siècles écoulés depuis une certaine époque; hypothèse que Halley avait déjà faite pour les mouvemens de Saturne et de Jupiter, et qui découlait naturellement de la supposition d'un accroissement uniforme de vitesse. Dunthorn admit une équation séculaire de 10″ pour le premier siècle, à partir de 1760 (*Phil. Trans.*, 1749); Mayer ne la porta qu'à 7″ dans ses premières Tables de la Lune, et à 9″ dans les dernières, ce qui la faisait monter à 1° en 2000 ans, d'après la proportion $1 : (20)^2 :: 9'' : x$. Enfin Lalande, dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1757, fut conduit, par une discussion exacte des observations, à une équation séculaire de 9″,886 pour le premier siècle.

L'Académie des Sciences qui avait, dès 1760, proposé pour sujet d'un prix l'altération des moyens mouvemens des planètes, et couronné la pièce de *Charles* Euler, second fils du grand géomètre de ce nom, prit pour sujet, en 1762, *la résistance de l'éther*. L'abbé Bossut remporta le prix, et fit voir que s'il y avait dans l'espace où les planètes se meuvent une matière éthérée, la résistance qu'elle leur opposerait pourrait changer la figure, la grandeur et la situation des orbites après un certain nombre de révolutions, et donner ainsi une explication assez satisfaisante de l'équation séculaire de la Lune.

Recherches de d'Alembert dans ses Opuscules.

D'Alembert s'était déjà occupé (*Rech.*, t. II, p. 165) du mouvement des planètes dans un fluide résistant, et doutait de l'existence de ce fluide ; il s'attacha en conséquence à la discussion des différens termes de l'équation de l'orbite de la Lune, afin d'y découvrir quelque inégalité qui rendît raison, par la simple attraction newtonienne, de l'accélération de son mouvement. C'est ce qu'il fit dans les Mémoires 29, 38, 39, 40, 41 et 45 de ses *Opusc. Math.*, contenus, le premier dans le t. IV, imprimé en 1768, les quatre suivans dans le t. V, qui parut la même année, le dernier (donné à l'Académie en 1770 et publié en 1773) dans le t. VI des *Opuscules*. Ces Mémoires contiennent des recherches nouvelles et ingénieuses sur quelques autres points de la théorie de la Lune ; l'auteur s'y occupe, à plusieurs reprises, de la comparaison des méthodes et de l'examen de leurs imperfections ; il montre les avantages de celle des coefficiens indéterminés, et critique encore celle de Clairaut plusieurs années après la mort de ce géomètre ; il en indique une autre dans le Mémoire 29, fondée sur des différenciations successives, et qui ne paraît guère susceptible d'être appliquée ; il propose enfin quelques corrections à faire aux premières Tables de Mayer. Après avoir vainement essayé de trouver, dans l'équation de l'orbite, des termes en $\cos Nz$ ou $\cos kz$ (voyez p. 40) qui pussent représenter l'équation séculaire de la Lune, et fait voir que ceux qui sembleraient devoir la faire naître, en produiraient une plus grande dans le mouvement de la Terre, ce qui serait contraire aux observations, il revient aux considérations tirées d'un milieu résistant, en montrant cependant qu'il ne peut avoir d'effet sensible sur le mouvement des nœuds et sur l'inclinaison, et indique aussi la figure non sphérique des deux planètes comme pouvant rendre raison d'une partie de l'équation séculaire, en introduisant un terme constant sous le signe intégral, et un arc de cercle dans l'équation du mouvement.

Prix de l'Académie relatifs à la théorie de la Lune.

L'Académie des Sciences de Paris proposa de nouveau pour sujet du prix de 1768, qui fut prorogé à l'année 1770, *de perfectionner les méthodes sur lesquelles est fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce satellite qui sont encore incertaines, et d'examiner en particulier si l'on peut rendre raison, par cette théorie, de l'équation séculaire du mouvement de la Lune.* Euler, qui avait déjà tant de fois été récompensé par cette Académie, de travaux qui devaient profiter à tout le monde savant, lui envoya un Mémoire qui remporta le prix, et qui se trouve dans le t. IX des *Prix de l'Académie.* Mais comme il n'y traitait pas spécialement la question de l'équation séculaire, et se contentait de conclure, de ce qu'aucune des inégalités que lui donnait sa théorie ne s'y rapportait, que l'attraction ne pouvait servir à l'expliquer, l'Académie remit ce sujet au concours pour l'année 1772, et partagea le prix entre une pièce de Lagrange intitulée : *Essai sur le problème des trois corps*, avec l'épigraphe : *Juvat integros accedere fontes*, et un Mémoire qu'Euler avait aussi envoyé sous le titre de *Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune.* Ces deux ouvrages sont imprimés dans le même tome des *Prix ;* le second contenait, avec un petit nombre de réflexions, le recueil des formules auxquelles la méthode donnée par Euler dans sa pièce de 1770, l'avait conduit, en y faisant de petites modifications, et en poussant beaucoup plus loin les calculs. C'est ce travail immense, entrepris par Jean Albert Euler, Krafft et Lexell, sous la direction de cet infatigable géomètre déjà privé de la vue, dont il publia ensuite tous les développemens, avec les tables qui en étaient le résultat, dans sa *Theoria motuum Lunæ, novâ methodo pertractata*, qui parut à Pétersbourg, en 1772.

Nous allons donner une légère idée des différences principales qui existent entre la méthode qu'Euler avait d'abord employée, et celle dont il fait usage tant dans cette volumineuse théorie que dans les deux Mémoires précédens, et dans un troisième qui se trouve dans ceux de l'Académie de Pétersbourg, pour 1769.

2e Théorie, liv. 1, 1re partie. Nouvelle méthode d'Euler pour déterminer les mouvemens de la Lune.

C'est sur un nouveau choix de coordonnées qu'Euler a basé cette dernière méthode. Au lieu de considérer le rayon vecteur, la longitude et la latitude, qui sont les variables ordinaires, il introduit trois coordonnées rectangulaires prises sur la ligne menée du centre de la Terre qui indique la longitude moyenne de la Lune, sur la perpendiculaire à cette ligne dans le plan de l'écliptique, et sur la perpendiculaire abaissée de la Lune sur ce plan. Il représente la première par $a(1+x)$, la seconde par ay, la troisième par az; a étant la moyenne distance de la Lune à la Terre, en prenant celle de la Terre au Soleil pour unité. Il emploie les variables x, y, z, comme plus propres que tout autres, par leur petitesse, à se prêter à des approximations convenables, en remarquant qu'étant une fois déterminées il sera facile d'en tirer les valeurs des coordonnées astronomiques (*). Il transforme les équations du mouvement de manière à en tirer trois équations du second ordre, où l'anomalie moyenne t du Soleil est variable indépendante, et où les termes principaux sont linéaires. Ils sont exprimés en fonction d'une longue suite de termes composés des puissances et des produits des six premières dimensions des variables x, y, z, multipliées par l'excentricité n de la Terre, par le rapport a des parallaxes, et par les sin. et cos. des divers multiples de l'anomalie t, de l'élongation moyenne p et de leurs combinaisons.

On ne peut y satisfaire qu'en prenant pour les valeurs de x, y et z des sinus et cosinus d'angles semblables, multipliés par des coefficiens indéterminés. Euler considère d'abord les deux premières équations; il suppose celle en x bornée à ses trois premiers termes, et à un autre de la forme $M\cos\omega$, qui représente l'un quelconque de ses termes périodiques; celle en y réduite à ses deux premiers termes et à un troisième $M'\sin\omega$; et comme l'intégration doit alors en amener de semblables dans les expressions de x et de y, il fait ensuite $x = N\cos\omega$, $y = N'\sin\omega$, et détermine, par leur substitution, les valeurs de N et N' en fonction de M et M' (**).

(*) On a en effet, en désignant par φ et ψ la longitude et la latitude de la Lune, et par r sa distance à la Terre, dont l'inverse donne la parallaxe horizontale,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{1+x}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{r\cos\varphi}{1+x}, \qquad \frac{\text{r}}{r} = \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1+x}.$$

(**) En effet, les deux premières équations ainsi réduites étant

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dy}{dt} - 3\lambda x + M\cos\omega, \qquad o = \frac{d^2y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dx}{dt} + M'\sin\omega,$$

où $m = \frac{dp}{dt}$, et où λ est déterminé par l'équation $\lambda = \frac{1}{2} + (m-1)^2$, qui doit avoir lieu pour qu'il n'y ait point de terme constant dans la première équation; si l'on différencie les valeurs $x = N\cos\omega$, $y = N'\sin\omega$, en supposant $d\omega = \mu dt$, on aura, par la substitution et l'élimination,

$$N = \frac{\frac{2(m+1)}{\mu}M' - M}{\lambda - 2 - \mu^2}, \qquad N' = -\frac{2(m+1)}{\mu}N + \frac{M'}{\mu^2};$$

la troisième équation, réduite à $\frac{d^2z}{dt^2} + (\lambda+1)z + H\sin\omega = o$, donnera de même pour z le terme $K\sin\omega$, où l'on aura $K = \frac{H}{\mu^2 - \lambda - 1}$.

Pour mettre plus d'ordre et de clarté dans la détermination des variables, il s'occupe séparément, comme dans sa première théorie, des diverses espèces de termes contenus dans les équations. Il distingue alors dans les valeurs que doivent avoir x et y, treize classes différentes de termes, suivant qu'ils se trouvent indépendans des excentricités et de l'inclinaison, ou multipliés par les trois premières puissances de l'excentricité k de l'orbite lunaire, par la première puissance de $\varkappa$, et par leurs produits; par a, et par le carré de l'inclinaison i de l'orbite lunaire; enfin par les produits de ces quantités et des excentricités. En conséquence, il prend pour x et y des valeurs composées de treize lettres inconnues différentes, ayant chacune l'une de ces quantités en facteur, et représentant les parties des expressions de ces variables correspondant à chaque ordre (*). Il les substitue dans les équations; et comme les termes appartenant à différens ordres ne peuvent se détruire mutuellement et doivent séparément satisfaire aux formules, il obtient autant de couples d'équations différentielles spéciales qu'il y a de lettres ou d'ordres différens.

Liv. 1, 2e partie. Développement des inégalités des dix premiers ordres.

La seconde partie du livre Ier, qui occupe à elle seule près de 300 pages, comprend, dans dix chapitres, les développemens numériques des équations qui donnent successivement les dix premières parties des valeurs des coordonnées x et y. Le travail y est présenté dans le plus grand détail, ce qui offre l'avantage de pouvoir le vérifier entièrement, et de découvrir la source des moindres erreurs. La séparation des inégalités en classes augmente la longueur des calculs, mais elle en diminue la complication, en divisant pour ainsi dire la difficulté, et en permettant de déterminer successivement les coefficiens sans avoir besoin de les éliminer entre un grand nombre d'équations simultanées.

Prenons pour exemple le développement des formules relatives à la première classe, où les inconnues sont O et O′, et sont données en fonction des sin. et cos. de l'angle $2p$, indépendamment des excentricités. Comme l'on doit prévoir que les valeurs de O et O′ seront petites, Euler néglige leurs carrés et leurs produits dans une première approximation. Il suppose alors $O = A \cos 2p$, $O' = A' \sin 2p$; et substituant pour M et M′, dans les relations générales données au bas de la page précédente, les valeurs qu'elles ont dans le cas actuel, où N et N′ sont remplacés par A et A′, il détermine ces coefficiens en nombres, par le calcul logarithmique, au moyen des valeurs numériques des lettres m, μ et λ (**); ayant obtenu par là des valeurs approchées de O et de O′, il les substitue dans les termes des équations en O^2, O'^2 et OO'; il en tire par là de nouvelles où entrent les cos. et sin. de $4p$, et posant ensuite tout-à-la-fois pour O et O′ des valeurs indéterminées en fonction de cet angle ainsi que du précédent, il s'assure, par leur substitution, des corrections qu'il faut encore faire aux secondes valeurs, et il pousse l'approximation des coefficiens jusqu'à la septième décimale, ou aux cinquantièmes de seconde.

(*) Il pose

$$x = O + kP + k^2Q + k^3R + aS + akT + \varkappa U + \varkappa kF + \varkappa k^2V + a\varkappa W + i^2X + i^2kY + i^2k^2Z,$$

$$y = O' + kP' + k^2Q' + k^3R + aS' + akT' + \varkappa U' + \varkappa kF' + \varkappa k^2V' + a\varkappa W' + i^2X' + i^2kY' + i^2k^2Z'.$$

(**) Les équations sont, dans ce cas,

$$o = \frac{d^2O}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dO'}{dt} - 3\lambda O - \frac{3}{2}(1+O)\cos 2p + \frac{3}{2}O'\sin 2p + 3\lambda\left(O^2 - \frac{1}{2}O'^2\right),$$

$$o = \frac{d^2O'}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dO}{dt} + \frac{3}{2}(1+O)\sin 2p + \frac{3}{2}O'\cos 2p - 3\lambda OO';$$

ce qui donne, quand on néglige les O et O′ qui se trouvent dans les derniers termes,

$\omega = 2p$, $M = -\frac{3}{2}$, $M' = \frac{3}{2}$, d'où l'on tire $A = N = 0{,}0102113$, $A' = N' = -0{,}0071797$.

Les inégalités de la première classe étant une fois déterminées, leur substitution au lieu de O et O′, dans les parties des équations des ordres suivans où ces lettres entrent en facteur, y introduit déjà un certain nombre de termes connus. Quoique ces équations ne renferment pas explicitement l'anomalie moyenne q de la Lune, il est clair que les combinaisons des angles p et t doivent l'amener dans l'intégration; aussi Euler admet-il dès le second ordre, dans les valeurs supposées, des termes en fonction des sin. et cos. des angles q, $2p - q$, $4p + q$, etc.; il détermine d'abord les valeurs de leurs coefficiens séparément, en appliquant à chacun d'eux les relations générales entre N, N′ et M, M′; puis simultanément en les faisant entrer tous à la fois dans les expressions indéterminées des variables; et comme les parties P et P′ de y et de x, qui doivent contenir ces sin. et cos., doivent être ensuite multipliées par l'excentricité k, il peut, à cause de la petitesse de k, se borner au sixième caractère décimal dans la détermination des coefficiens de chacun de leurs termes, lorsqu'il veut pousser au septième l'approximation définitive. C'est par un motif analogue qu'il se borne à la cinquième décimale pour les coefficiens qui doivent avoir k^2, a et αk en facteur, et à la quatrième pour ceux qui appartiennent aux ordres k^3, ak, αk^2, $a\alpha$; il obtient ceux de chacun de ces ordres de la même manière, c'est-à-dire par des séries indéterminées prises pour chaque variable, qu'il substitue dans les équations correspondantes, et dont il tire des conditions en nombre suffisant pour qu'on puisse ensuite en déduire, par des approximations successives, les valeurs cherchées des coefficiens de chaque sinus et cosinus qu'il a supposé devoir entrer dans les expressions des variables.

Liv. 1, 3e partie. Développement de la valeur de z.

La troisième partie du livre Ier est consacrée au développement numérique de la troisième équation différentielle, ou de celle qui est relative à la coordonnée z. Euler y parvient par le même procédé qu'il vient d'employer pour les deux autres; il distingue six ordres de termes différens, suivant qu'ils sont multipliés par l'inclinaison i de l'orbite, sa troisième puissance, et son produit par les excentricités et le rapport des parallaxes. Il prend en conséquence, à la place de z, une suite de termes où chacun des ordres multiplie une variable particulière (*), et il détermine toutes celles-ci séparément, en résolvant l'équation du second ordre correspondante, par la méthode des séries dont il vient de faire usage.

Il revient ensuite aux trois derniers ordres des deux premières équations, en substituant pour z la valeur précédente dans les termes où cette variable entre en facteur.

Liv. 2. Application des formules à la construction des tables.

Le livre II de cet ouvrage contient l'application de la théorie de la Lune au calcul astronomique. Après avoir rassemblé toutes les inégalités qu'il a déterminées, Euler compare ses formules avec celles des tables de Clairaut, dont les argumens sont, comme les siens, les anomalies et élongations moyennes, et il examine les résultats de chacune dans tous les cas particuliers qu'offrent les suppositions alternatives de p, q, r égaux à zéro ou à 90° et de t égal à zéro ou à 180°. Il rectifie par là ses élémens, réduit ensuite tous les coefficiens en nombres absolus, et obtient pour x un développement composé d'un

---

(*) La troisième équation différentielle étant de la forme

$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + (\lambda + 1)z - 3\lambda xz + \text{etc.} + 3az\cos p - 3\alpha z\cos t + \text{etc.},$$

Euler y suppose

$$z = ip + ikq + ik^2r + i\alpha s + i^3u + iav.$$

coefficient constant et de cinquante cosinus de multiples et combinaisons différentes de p, q, t, r; pour y une série de cinquante-quatre sinus d'angles analogues, et pour z une suite semblable à celle-ci, et composée de vingt-huit termes. Le calcul de chacune des coordonnées x et y exige vingt-une tables, celui de z n'en demande que seize. Les deux premières variables étant connues au moyen des quarante-deux tables qui s'y rapportent, servent à déterminer la longitude, tandis que le calcul de la latitude et de la parallaxe ne peut se faire que quand elles sont connues toutes trois, et exige ainsi cinquante-huit tables, dont le recueil termine ce volumineux ouvrage, qui remplit près de 800 pages.

Euler ne dissimule pas qu'il n'a pas tout-à-fait achevé les calculs de quelques ordres d'inégalités à cause de leur longueur presque insurmontable, et il regarde aussi la différence entre les figures de la Lune et de la Terre et celle d'une sphère, comme pouvant influer sur leurs mouvemens, en introduisant dans l'expression des forces un petit terme inversement proportionnel à la quatrième puissance de la distance. On doit presque regretter la peine qu'a dû coûter à ce grand géomètre et à ses collaborateurs le travail immense dont nous venons de donner un court exposé, puisque les tables qui en sont le résultat ont été reconnues comme étant fort inférieures en exactitude à celles de Mayer, et qu'il paraît même que celles de Clairaut ont conservé sur elles quelque supériorité.

CHAPITRE IX.

Essai sur le problème des trois corps. Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune.

Variables employées par Lagrange.

Il est singulier que, dans le même temps et pour la même occasion, Euler et Lagrange aient tous deux voulu substituer aux coordonnées angulaires les rectilignes comme variables principales, dans les équations différentielles du problème des trois corps. La méthode de Lagrange, dans sa pièce couronnée en 1772, consiste à n'employer, dans la détermination de l'orbite de chacun des corps A, B, C, d'autres élémens que leurs distances mutuelles r, r', r''. Son Mémoire peut être divisé en deux parties; l'une contient des recherches sur le problème pris dans toute sa généralité, et se trouve partagée en deux chapitres; l'autre traite en particulier de la théorie de la Lune, et comprend aussi, en deux chapitres, les formules générales et un essai de leur application.

1re partie de son Mémoire; formules générales.

Quant à la première partie, après avoir donné les équations en coordonnées rectangulaires, qui déterminent les orbites relatives des corps B et C autour du corps A, et de C autour de B, Lagrange parvient avec une grande élégance aux quatre intégrales premières du problème; il réduit ensuite les six premières des équations primitives à trois autres équations symétriques, entre les différentielles secondes des carrés des distances prises par rapport au temps, et des fonctions des masses et des distances précédées ou non du double signe de l'intégration (*). Ces équations sont moins simples que les primitives, puisqu'elles

(*) Ces équations sont (*voyez* note 7, § 1):

$$\frac{d^2 . r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - C(p'q' - p''q'' + Q) = 0, \quad \frac{d^2 . r'^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r'} + B(pq + p''q'' + Q') = 0,$$



renferment chacune deux signes d'intégration; mais elles ont l'avantage de ne contenir aucun radical, et ce sont celles que l'auteur doit ensuite appliquer à la théorie de la Lune.

Supposant alors les trois variables r, r', r'' déterminées en fonction de t par ces équations, il lui reste à voir comment on pourra en conclure l'orbite même de chaque corps ou ses coordonnées rectangulaires. Il fait voir qu'il est impossible d'obtenir ces variables directement et par les seules opérations de l'algèbre, mais qu'on peut en venir à bout au moyen d'une intégration. Il parvient à des formules qui servent à déterminer les orbites de B et de C autour de A, par rapport à un plan fixe passant par ce même corps; il prouve qu'entre tous ces plans il y en a un par rapport auquel le mouvement des deux premiers corps est le plus simple, et détermine par les mêmes formules la position mutuelle des orbites des corps B et C.

Cas où le problème des trois corps admet une solution rigoureuse.

Dans le chapitre second il examine quelques cas particuliers qui n'ont pas lieu dans le système du monde, mais qui simplifient beaucoup la solution du problème des trois corps. Il prouve qu'il est résoluble exactement, soit que les distances entre les trois corps soient constantes ou qu'elles gardent seulement entre elles un rapport constant, et cela dans deux cas, savoir : lorsque les distances sont toutes égales entre elles, en sorte que les trois corps forment toujours un triangle équilatéral, et lorsque l'une des distances est égale à la somme ou à la différence des deux autres, en sorte que les trois corps se trouvent toujours rangés en ligne droite; il convient que la solution de ces problèmes serait plus simple en employant à la fois comme variables les rayons vecteurs et les angles décrits par ces rayons, dans le cas où les corps se mouvraient dans un même plan fixe; mais il croit qu'elle serait alors très difficile, si l'on supposait, comme il l'a fait, que les corps pussent se mouvoir dans des plans différens.

2e Partie. Cas de la nature.

Lagrange passe ensuite, dans le chapitre III, au cas où l'on suppose que le corps C, par exemple, est beaucoup plus éloigné des corps A et B que ceux-ci ne le sont entre eux, et il examine les modifications qui doivent en résulter dans les formules du chapitre Ier. Les distances r et r'' étant alors fort grandes par rapport à r, il les suppose respectivement égales au quotient de la division des nouvelles quantités R et R′, finies et comparables à r, par une très petite constante i; il fait aussi $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{i}$; il détermine R′ en fonction de r, de R et du cosinus de l'angle compris ζ (en faisant $r\cos\zeta = z$), afin de pouvoir ensuite éliminer R′ des équations; celles-ci contenant alors les différentielles secondes de r^2, R^2 et Rz, par rapport à t, peuvent servir à déterminer ces variables; et il montre comment on peut, en les supposant connues, en conclure les valeurs des latitudes ψ et ψ' des deux corps B et C, et celles des différentielles de leurs longitudes φ et φ', en ne poussant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre i.

$$\frac{d^2.r''^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r''} - A(-pq - p'q' + Q'') = 0, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} + Cpq - Bp'q' - Ap''q'' = 0,$$

en supposant

$$p = \frac{1}{2}(r'^2 + r''^2 - r^2), \quad p' = \frac{1}{2}(r^2 + r''^2 - r'^2), \quad p'' = \frac{1}{2}(r^2 + r'^2 - r''^2),$$

$$q = \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}, \quad q' = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}, \quad q'' = \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3},$$

$$d\rho = x'dx + y'dy + z'dz - xdx' - ydy' - zdz',$$

$$dQ = q'dp' - q''dp'' - qd\rho, \quad dQ' = qdp + q''dp'' + q'd\rho, \quad dQ'' = -qdp - q'dp' + q''d\rho.$$

Équations du mouvement lunaire, et leur intégration.

Pour appliquer toutes ces formules à la théorie de la Lune, il suffit de supposer que A soit la Terre, B la Lune, C le Soleil et i le rapport des parallaxes. Les variations de r et de R étant alors fort petites, si l'on fait $r^2 = 1 + x$, $R^2 = 1 + X$, x et X devront être des quantités peu considérables par rapport à l'unité, et ne contenir aucun terme constant. Lagrange, mettant y à la place de Rz, et faisant toutes ces substitutions, obtient quatre équations dont les premiers termes sont $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2x}{2dt^2}$, $\frac{d^2X}{2dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, et sont donnés en fonction des variables x, X, y, de leurs puissances et de leurs produits : ceux-ci multipliés par i et par le carré du rapport α des moyens mouvemens. Il néglige d'abord ces derniers termes et ceux qui renferment x et X dans l'équation en y; il différencie deux fois cette équation, afin d'y faire disparaître les signes $\int$; elle devient ainsi du quatrième ordre, et est intégrable par les méthodes connues (*); il substitue ensuite la valeur approchée de y qu'on en conclut, dans l'équation en x, en y négligeant d'abord les termes où x et y sont mêlés (**), et en rejetant tous les termes constans; il voit par là quelle doit être la forme de l'intégrale; et sa substitution lui sert ensuite, en égalant à zéro les coefficiens de chaque cosinus, à déterminer les coefficiens de tous les termes; enfin l'équation en X, convenablement réduite, lui donne, par une intégration très simple, la valeur de cette variable.

Connaissant par là la forme des premiers termes des valeurs de y, x et X, il ne s'agira plus que de les substituer dans les termes négligés des équations proposées, pour avoir la forme de ceux qu'il faudra introduire dans de nouvelles valeurs des variables, et dont on déterminera les coefficiens par la substitution. Lagrange exécute ces nouvelles opérations pour x et y, plutôt pour donner une idée de la méthode d'intégration qu'il faut suivre, que pour en déduire les inégalités du mouvement de la Lune, ou pour présenter une théorie complète de cet astre; et il ne traite point l'objet spécial du prix proposé, l'équation séculaire de la Lune. « Le défaut de temps, et d'autres occupations indispen-
» sables (dit-il dans un avertissement) ne m'ont pas permis d'entrer dans tout le détail
» nécessaire pour répondre aux principaux points de la question proposée par l'Académie,
» et je ne me suis déterminé à lui présenter ces Recherches pour le concours, que par l'espé-
» rance qu'elle trouvera peut-être ma méthode digne de quelque attention, tant par sa nou-
» veauté et sa singularité, que par les difficultés considérables de calcul qu'elle renferme. »

Mérite de cet ouvrage.

Il fallait en effet de l'habileté et du génie pour présenter, sous une forme toute nouvelle, les équations d'un problème déjà si souvent traité; c'était pour ainsi dire un tour

---

(*) En effet, cette équation étant alors

$$\frac{d^4y}{dt^4} + (2 + \alpha^2)\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 3\alpha^2)y = 0;$$

si l'on fait $y = f\cos pt$, et qu'on substitue cette expression dans l'équation, on trouvera pour p une double valeur, en négligeant les puissances de α plus hautes que la seconde, et l'on aura, en désignant la deuxième par q,

$$y = f\cos pt + g\cos qt,$$

d'où l'on tire la valeur de $\sin\psi$, qui fait voir que $\frac{1}{2}(p + q)t$ est l'argument de latitude.

(**) L'équation en x devient alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \alpha^2\left[9y^2 - 3\left(\int y\,dt\right)^2\right] = \text{const.};$$

celle en X se réduit de même à $\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2X = 0$, et donne $X = b\cos\alpha t$.

de force, que celui de donner un système de formules générales, sans y faire entrer aucun angle comme variable, et aucune fonction périodique. On doit admirer aussi l'élégance et la richesse d'idées qui règnent dans l'*Essai sur le problème des trois corps*; outre le vif intérêt qu'il doit inspirer sous le rapport analytique, on doit regarder comme fort utiles des recherches qui tendaient à frayer des routes nouvelles, à indiquer des méthodes différentes de celles qui étaient connues, et où, surmontant la plus grande difficulté, celle de l'invention, l'auteur ne laissait qu'une tâche bien plus aisée, celle de juger et comparer ses procédés avec les autres, pour en discerner les avantages et les inconvéniens. Le succès ne semble pas cependant avoir couronné cette fois les efforts de Lagrange; le choix des distances comme seules variables ne paraît pas heureux, puisqu'il complique les équations plutôt que de les simplifier, qu'il oblige à multiplier les notations, et à rendre quelquefois par là la marche des opérations difficile à suivre; d'ailleurs, comme il ne dispense pas de revenir, dans la résolution définitive, à l'emploi des sinus et cosinus, on ne voit pas quelle utilité il y a à les faire disparaître d'abord, et il faut bien que l'auteur ait trouvé des désavantages à cette méthode, puisqu'il l'a lui-même promptement abandonnée.

Conjecture de M. Laplace, relative à la cause de l'équation séculaire.

Avant de passer au second des Mémoires de Lagrange qui font l'objet de ce chapitre, nous devons dire un mot de l'ingénieuse hypothèse de la *transmission successive de la gravité*, par laquelle M. Laplace avait cherché à expliquer, en 1773, l'équation séculaire de la Lune, dans le temps où tous les géomètres la croyaient inexplicable par la loi de l'attraction généralement admise. Comme nous n'avons aucun moyen pour mesurer la durée de la propagation de la pesanteur, une fois que l'attraction a atteint le corps sur lequel elle agit, ce n'est que par les effets produits qu'il est possible de l'apprécier. Daniel Bernoulli soupçonnait, dans sa pièce sur le flux et le reflux, que la gravitation ne se propage pas instantanément, et que l'action de la Lune pouvait employer un ou deux jours à parvenir à la Terre. M. Laplace considérant la pesanteur d'une molécule de matière comme produite par l'impulsion d'un corpuscule infiniment plus petit qu'elle, et mu vers le centre de la Terre avec une vitesse quelconque, démontra qu'il résultait de la supposition que cette vitesse était finie, une accélération dans les moyens mouvemens des planètes autour du Soleil et des satellites autour de leurs planètes; et il prouva que, si l'équation séculaire de la Lune provenait de cette cause, il fallait supposer à cet astre, pour le soustraire entièrement à sa pesanteur vers la Terre, une vitesse vers le centre de cette planète au moins sept millions de fois plus grande que celle de la lumière. Il ajouta cependant qu'il était bien loin de croire cette cause certaine, et qu'il ne la regardait que comme une simple conjecture.

Nouveau prix de l'Académie sur ce sujet.

L'Académie, qui venait de proposer deux prix sur ce sujet sans en recevoir aucune solution, n'en persista pas avec moins de zèle à encourager les recherches sur ce point important, et elle demanda, pour le prix de 1774, *d'examiner si l'on pourrait expliquer l'équation séculaire de la Lune, soit par les perturbations qu'excite, dans le mouvement de cette planète, l'attraction de tous les corps célestes, soit par l'effet qui peut résulter de la non sphéricité de la Terre et de la Lune.* Le Mémoire que Lagrange lui envoya fut couronné, et se trouve dans le t. VII des *Mém. des Savans étrangers.*

But du Mémoire de Lagrange, qu'elle couronna.

Quoiqu'il contienne de belles recherches, l'auteur y fut encore moins heureux que dans le précédent, puisque non-seulement il n'y trouva pas la véritable cause de l'équation

séculaire, mais qu'il chercha même à y élever des doutes sur l'existence de cette équation.

Marche qu'il a suivie.

Sans s'occuper de la première partie de programme, ou de l'évaluation des erreurs qui pourraient résulter des quantités négligées dans le mouvement de la Lune, parce qu'il ne trouve, dit-il, sur ce point rien à ajouter aux recherches de d'Alembert, il fait voir que ce n'est que par la théorie qu'on peut se flatter de déterminer la forme de l'équation séculaire. Reprenant alors l'équation différentielle qui donne le temps (*), il montre que l'équation séculaire ne peut avoir lieu, à moins que la quantité Πx^3, qui reste sous le signe $\int$ multipliée par $d\varphi$, ne contienne un terme tout constant, ou un terme qui renferme le sinus d'un angle qui varie infiniment peu. Dans le premier cas, l'équation séculaire sera réelle et ira en augmentant comme les carrés des temps; dans le second cas elle ne sera qu'apparente, et ne différera des autres équations du mouvement de la Lune que par la longueur de sa période. Il prouve, par la discussion de ces deux espèces de termes seulement, que l'équation séculaire ne saurait venir de la non sphéricité de la Terre, tant qu'on y suppose les deux hémisphères semblables; et que pour la faire naître il faudrait donner aux deux hémisphères de la Terre des figures trop dissemblables pour qu'on pût les accorder avec les mesures des degrés et les théories de la précession et de la nutation. La considération de l'inclinaison de l'orbite de la Lune ne lui donne aucune nouvelle combinaison, et l'examen de l'altération qui pourrait venir de la non sphéricité de la Lune n'en amène pas davantage. C'est alors que, passant à la question de fait, il refuse de croire à l'authenticité des observations dont on s'était servi pour conclure l'accélération, particulièrement de celles faites au Caire en 977 et 978, par l'arabe Ibn-Junis, et conclut, de la discussion des erreurs des tables, que l'hypothèse d'une accélération réelle ou apparente dans le mouvement moyen de la Lune n'est pas absolument nécessaire pour concilier les observations anciennes et modernes.

Lagrange reprit en 1780, dans son beau Mémoire sur la libration de la Lune, la question de l'influence de la figure de cet astre sur son moyen mouvement; l'égalité des moyens mouvemens de la Lune sur elle-même et autour de la Terre, exigeait une discussion particulière, qu'il fit avec beaucoup de soin, et dont il conclut seulement de très petits termes, qui ne pouvaient expliquer l'équation séculaire.

Ouvrages divers sur la théorie de la Lune.

Nous terminerons ce chapitre par l'énumération de plusieurs ouvrages relatifs à la théorie de la Lune, et dont nous n'avons pas encore fait mention. Tel est celui de Th. Simpson, qui a pour titre *Miscellaneous Tracts*, et dont le troisième volume, publié en 1757, a cette théorie pour objet; Walmesley publia à Florence, l'année suivante, un Traité intitulé : *De inæqualitatibus motuum Lunarium;* Mélander fit paraître, dans les Mém. de l'Acad. de Suède, pour 1760, des remarques sur la Théorie de la Lune de d'Alembert; son ouvrage ayant pour titre *Lineamenta theoriæ Lunaris*, parut à Parme en 1768, et il en publia un autre l'année suivante, sous le titre de *De Theoria Lunæ commentarii*, de concert avec le père Frisi. Ce dernier avait fait imprimer à Milan, en 1768, son Traité *De gravitate universali corporum, libri tres,* et fit paraître, en 1774 et 1775, sa *Cosmographia*, qui a le même objet. Enfin, le premier volume des *Essais*

(*) $dt = \frac{x^2 d\varphi}{\sqrt{k^2 + 2\int \Pi x^3 d\varphi}}$.

d'Analyse de Condorcet, publié en 1768, roule principalement sur le problème des trois corps ; mais il ne contient aucune application.

Travaux relatifs aux Tables de la Lune.

Lambert donna, en 1770, des Mémoires sur les Tables de la Lune, et fut un de ceux qui travaillèrent au Recueil de nouvelles Tables astronomiques en trois volumes, qui parut à Berlin en 1776, où l'on ajouta à celles de la Lune, de Mayer, des tables destinées au calcul des argumens des dix premières. Schulze, astronome royal de Berlin, publia, dans les Mémoires de cette Académie, pour 1781, des Recherches sur une *Méthode directe pour déterminer la longitude vraie de la Lune par les mouvemens moyens.* Il y observe que les tables de Mayer exigent qu'on emploie, dès le commencement du calcul, le lieu vrai du soleil, et qu'on cherche ensuite, au moyen de dix petites équations, la quantité qu'il faut ajouter ou retrancher de la longitude moyenne pour avoir la longitude corrigée pour la première fois ; qu'on doit corriger de cette manière encore trois fois le lieu trouvé de la Lune pour parvenir à la longitude vraie dans l'orbite, après avoir pris treize argumens différens pour trouver, dans autant de tables, les équations dont il faut successivement faire usage. Pour remédier à ces inconvéniens et diminuer le calcul de la formation des argumens de ces tables, Schulze chercha en quelque sorte à défaire ce que Mayer avait fait, c'est-à-dire à tirer des formules que celui-ci avait mises en tables, d'autres équations qui donnassent, par les simples mouvemens moyens du Soleil et de la Lune, la longitude vraie de la Lune dans son orbite d'une manière tout-à-fait directe. L'exécution de ce travail pénible lui donna un nombre d'équations qui surpassait celui des tables de Mayer de quatre, et où il omit cependant celles dont la valeur ne dépasse pas 10″, ce qui ne donnait pas à sa formule une exactitude suffisante. Aussi sa nouvelle méthode n'a-t-elle pas eu de succès auprès des astronomes, qui n'accueillirent pas non plus la proposition qu'il leur fit alors d'adopter l'heureuse idée de Lagrange, en exprimant les signes, degrés, minutes et secondes par des quarts de cercles et par leurs décimales.

Tables de Mason.

Le Bureau des Longitudes anglais chargea Mason de corriger les Tables de la Lune de Mayer, sous la direction de Maskeline. Il les compara à environ douze cents observations de Bradley, alors inédites ; il améliora les coefficiens de Mayer, introduisit des équations indiquées par cet astronome, qui les avait cependant trouvées trop incertaines ou trop faibles pour en alonger les tables, et publia, en 1787, ses nouvelles tables, qui sont regardées comme supérieures à celles de Mayer, et qui ne lui valurent pas cependant, au rapport de Lalande, la récompense qu'il attendait comme ayant perfectionné la méthode des longitudes, parce qu'elles n'étaient pas faites d'après la théorie.

CHAPITRE X.

Découvertes de M. Laplace dans la Théorie de la Lune.

Nous arrivons enfin à l'époque d'une des plus grandes découvertes qui aient été faites dans la théorie de la Lune. Plus elle est remarquable, plus la méthode sur laquelle elle repose est profonde et d'une exposition difficile, et plus il doit nous être permis, pour en donner une idée juste, de recourir aux expressions mêmes de son auteur.

Premières découvertes de M. Laplace sur les équations séculaires de la Lune, de ses nœuds et de son apogée.

Ce fut le 19 décembre 1787 (*Lal.*, *Bibl. Astr.*, p. 672) que M. Laplace annonça à l'Académie la vraie cause de l'équation séculaire de la Lune. « M. Delambre (dit-il, » dans un Mémoire inséré dans ceux de l'Acad. pour 1786) a déterminé, au moyen » d'un grand nombre d'observations du dernier siècle et de celui-ci, le mouvement » séculaire actuel de la Lune, avec une précision qui laisse à peine une incertitude de » quelques secondes; il ne l'a trouvé que de 25″ environ plus petit que celui de Mayer, » tandis que les observations anciennes s'accordent à donner un mouvement séculaire » moindre de 3 ou 4′. Le mouvement de la Lune s'est donc accéléré depuis les Chal- » déens; et les observations arabes faites dans l'intervalle qui nous en sépare, venant » à l'appui de ce résultat, il est impossible de le révoquer en doute..... Maintenant, quelle » est la cause de ce phénomène?..... La correspondance des mouvemens des corps » célestes avec la théorie de la pesanteur est si parfaite et si satisfaisante, que l'on » ne peut voir sans regret l'équation séculaire de la Lune se refuser à cette théorie, et » faire seule exception à une loi générale et simple, dont la découverte, par la gran- » deur et la variété des objets qu'elle embrasse, fait tant d'honneur à l'esprit humain. Cette » réflexion m'a déterminé à considérer de nouveau ce phénomène, et après quelques » tentatives je suis enfin parvenu à en découvrir la cause.

» *L'équation séculaire de la Lune est due à l'action du Soleil sur ce satellite, combinée » avec la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre*.... On sait que, tandis » que le grand axe et le moyen mouvement de cet orbe restent constans, l'attraction » des planètes fait varier son excentricité; or la force moyenne du Soleil, pour dilater » l'orbe de la Lune, dépend du carré de l'excentricité de l'orbite terrestre; elle aug- » mente et diminue avec cette excentricité : il doit donc en résulter dans le mouve- » ment de la Lune des variations contraires, analogues à l'équation annuelle, mais dont » les périodes incomparablement plus longues, embrassent un grand nombre de siècles. » Maintenant que l'excentricité de l'orbite terrestre diminue, ces inégalités accélèrent » le mouvement de la Lune; elles le ralentiront quand cette excentricité, parvenue à » son *minimum*, cessera de diminuer pour commencer à croître. — Ainsi, la diminution » de l'excentricité de l'orbite solaire est beaucoup plus sensible dans le mouvement de » la Lune que par elle-même; cette diminution qui, depuis l'éclipse la plus ancienne » dont nous ayons connaissance, n'a pas été de 4′, a produit plus de 1° $\frac{1}{2}$ d'altération dans » le mouvement de la Lune.

» Les mouvemens des nœuds et de l'apogée de la Lune sont pareillement assujétis à » des équations séculaires d'un signe opposé à celui de l'équation du moyen mouvement, » et dont le rapport avec elle est de 1 à 4 pour les nœuds, et de 7 à 4 pour l'apogée. » Quant aux variations de la moyenne distance, elles sont insensibles, et n'influent pas » d'une demi-seconde sur la parallaxe de ce satellite; il n'est donc point à craindre qu'il » se précipite un jour sur la Terre, comme cela aurait lieu si son équation séculaire » était due à la résistance de l'éther, ou à la transmission successive de la pesanteur.

» L'action moyenne du Soleil sur la Lune dépend encore de l'inclinaison de l'orbite » lunaire sur l'écliptique; et l'on pourrait croire que la position de l'écliptique étant » variable, il doit en résulter, dans le mouvement de la Lune, des inégalités semblables » à celles que produit la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre. Mais j'ai » trouvé que l'orbite lunaire est ramenée sans cesse par l'action du Soleil, à la même



» inclinaison sur celle de la Terre, en sorte que les plus grandes et les plus petites décli-
» naisons de la Lune sont assujéties, en vertu des variations de l'écliptique, aux mêmes
» changemens que celles du Soleil.

» L'inégalité séculaire du mouvement de la Lune est périodique ; mais il lui faut des
» millions d'années pour se rétablir. L'excessive lenteur avec laquelle elle varie l'aurait
» rendue imperceptible depuis les observations anciennes, si sa valeur, en s'élevant à
» un grand nombre de degrés, ne produisait pas des différences considérables entre les
» mouvemens séculaires de la Lune, observés à diverses époques. Les siècles suivans dé-
» velopperont la loi de sa variation ; on pourrait même, dès à présent, la connaître et
» devancer les observations, si les masses des planètes étaient bien déterminées ; mais
» cette détermination si désirable pour la perfection des théories astronomiques, nous
» manque encore. La postérité, à qui elle est réservée, aura l'avantage de juger des états
» passés et à venir du système du monde, avec la même évidence que de son état pré-
» sent ; elle verra sans doute avec reconnaissance, que les géomètres de ce siècle ont
» indiqué les causes de tous les phénomènes célestes, et qu'ils en ont donné les expres-
» sions analytiques, dans lesquelles il n'y a plus qu'à substituer les valeurs de quantités
» que l'observation seule peut faire connaître. »

Analyse rapide de son Mémoire sur cet objet.

Il serait très difficile de pouvoir faire comprendre comment M. Laplace est parvenu à de si beaux résultats, sans entrer dans tous les détails des calculs. Cependant, pour donner un léger aperçu de la méthode qui l'a conduit aux principaux, désignons avec lui par x, y, z, x', y', z' les coordonnées rectangulaires de la Lune et du Soleil au bout du temps t, rapportées au centre de la Terre ; par r et r' leurs rayons vecteurs, par v et v' leurs longitudes comptées dans le plan de leurs orbites, par ϖ et ϖ' celles de leurs aphélies, par $a, a'; e, e'; n, n'$ leurs demi-grands axes, leurs excentricités et leurs moyens mouvemens ; représentons enfin par δr et δv les parties de r et de v dues à l'action du Soleil. M. Laplace reprend l'expression différentielle de δv, qu'il avait déjà donnée en 1786, et où il avait introduit, à l'exemple de Lagrange, la considération de la fonction R, et de ses différentielles partielles par rapport aux coordonnées, pour représenter les composantes des forces perturbatrices parallèles aux trois axes (*). Il substitue dans le dernier terme de cette expression, qui reste sous le signe $\int$ et qui dépend des forces perturbatrices, les valeurs elliptiques de r et de r' ; l'introduction de celle-ci y amène le terme $-\frac{3}{2}e'^2dt$ sous le signe intégral ; or, tandis que l'excentricité e doit être considérée comme constante, e' est variable, et sa valeur peut être développée suivant les puissances du temps ; le terme $\int e'^2dt$ aura donc aussi la même forme ; et comme il produit des inégalités qui croissent avec le nombre de révolutions, il en devra résulter une équation séculaire dans le mouvement de

(*) Il obtient (voyez note 7, § 2)

$$\delta v = \frac{d(r\delta r) + rd\delta r}{a^2 ndt\sqrt{1-e^2}} + 3a\int\frac{ndt\int dR}{\sqrt{1-e^2}} + 2a\int\frac{ndt}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

et comme $R = -S\left(\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{4r'^3} + \text{etc.}\right)$, si l'on y fait

$$r = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + e\cos(nt+\epsilon-\varpi) + \text{etc.}\right),\quad n^2 = \frac{1}{a^3},$$

$$r' = a'\left(1 + \frac{1}{2}e'^2 + e'\cos(n't+\epsilon'-\varpi') + \text{etc.}\right),\quad n'^2 = \frac{S}{a'^3};$$

le terme $2a\int\frac{ndt}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{dR}{dr}\right)$ donnera celui-ci, $-\int\frac{n'^2dt}{n}\left(1 + 2e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \text{etc.}\right)$.

la Lune. Une fois qu'on est arrivé à ce résultat, la découverte est faite; mais il reste à prouver encore que tous les autres termes de la valeur de δv ne produisent rien, et c'est leur discussion qui compose une partie importante du Mémoire cité. L'auteur intègre l'équation différentielle du second ordre, qui donne la latitude de la Lune s, au-dessus du plan des x, y, en fonction du temps; et, comparant ensuite l'expression qu'il obtient ainsi, mise sous une certaine forme, avec une autre valeur très approchée, il en conclut la constance de l'inclinaison respective des orbites du Soleil et de la Lune (*). Il fait voir ensuite, par l'examen du terme $3a\int\frac{ndt\int dR}{\sqrt{1-e^2}}$, que quoiqu'il ait un double signe intégral, il ne produit pas d'inégalités séculaires, parce que les termes qui en résultent sont insensibles; il montre que ceux qui proviennent de l'action directe des planètes sur la Lune sont dans le même cas. Nous reviendrons sur ces différens points dans notre troisième partie.

L'auteur reprend ensuite l'équation différentielle du second ordre en r^2; il y met pour R sa valeur; supposant ensuite que la distance moyenne a devienne $a + \delta a$, il égale séparément à zéro les termes constans et les termes variables. La première équation lui prouve que l'équation séculaire de la moyenne distance est insensible; l'intégration de la seconde lui montre que l'équation du centre de la Lune est à très peu de chose près constante, et enfin que le mouvement de l'apogée est soumis à une équation séculaire sensible. La valeur de s lui prouve la même chose pour le mouvement des nœuds.

Il ne lui reste plus qu'à voir jusqu'à quel point les résultats précédens s'accordent avec les observations : ce qui exige qu'on détermine la valeur de e'^2, qui est une quantité périodique dépendant des masses des planètes, et principalement de celles de Jupiter, de Vénus et de Mars. La première est la mieux connue; l'auteur adopte, pour les deux autres, l'hypothèse de Lagrange, en supposant les densités des planètes réciproques à leurs moyennes distances. Il détermine la différentielle de e'^2, par rapport au temps, pour deux époques différentes (savoir, 1700 et l'an 700 avant J.-C.), en substituant, dans l'expression analytique de cette quantité, les valeurs des élémens des planètes qui avaient lieu à cette époque; il en tire les coefficiens numériques des deux premières puissances du temps dans la valeur de e'^2; il substitue cette valeur sous le signe $\int$; il intègre,

(*) Soient γ, γ' les tangentes des inclinaisons des orbites de la Lune et du Soleil au plan des x, y; Π et Π' la longitude des nœuds ascendans de ces orbites, et soit fait

$$\gamma \sin \Pi = p, \quad \gamma \cos \Pi = q, \quad \gamma' \sin \Pi' = p', \quad \gamma' \cos \Pi' = q',$$

on a

$$s = \gamma \sin (v - \Pi) = q \sin (nt + \varepsilon) - p \cos (nt + \varepsilon);$$

et la tangente de l'inclinaison mutuelle des orbites a pour expression (note 1, § 4)

$$\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma\gamma' \cos (\Pi - \Pi') + \gamma'^2} = \sqrt{(p - p')^2 + (q - q')^2}.$$

Or l'équation

$$0 = \frac{d^2s}{dt^2} + n^2 s \left(1 + \frac{3n'^2}{2n^2}\right) - \frac{3\gamma'}{2} n'^2 \sin (nt + \varepsilon - \Pi')$$

donne, en l'intégrant et la transformant,

$$s = \left\{q' + C \cos\left(Q - \frac{3n'^2 t}{4n}\right)\right\} \sin (nt + \varepsilon) - \left\{p' + C \sin\left(Q - \frac{3n'^2 t}{4n}\right)\right\} \cos (nt + \varepsilon),$$

C et Q étant deux constantes arbitraires.

On tire de là, en comparant cette valeur avec la précédente, la relation $(p - p'^2) + (q - q'^2) = C^2$, qui prouve la constance du carré de l'inclinaison mutuelle.

et négligeant le terme multiplié par la première puissance du temps, parce qu'il se confond avec le moyen mouvement, il obtient, pour l'équation séculaire de la Lune, la formule $+ 11'',135i^2 + 0'',04398i^3$, i étant le nombre des siècles écoulés depuis 1700 (*). Il fait voir enfin, que cette formule rapproche sensiblement nos tables des observations anciennes.

L'auteur de ce beau travail dit, dans les *Mém. de l'Inst.*, tom. II, p. 128 : « On » aurait lieu d'être étonné que la cause de l'équation séculaire de la Lune ait échappé si » long-temps aux efforts des géomètres, si l'on ne savait pas que les idées les plus simples » sont presque toujours celles qui s'offrent les dernières à l'esprit humain. » Il a montré, dans son *Exposition du système du Monde* (dont la première édition a paru en 1795), que l'on peut aussi parvenir à l'expression de la variation séculaire du moyen mouvement de la Lune sans le secours de l'analyse. Cette formule fut employée dans les Tables de la Lune que Lalande inséra dans la troisième édition de son *Astronomie*. M. Delambre avait déjà perfectionné, vers 1789, celles du mouvement horaire, en y considérant le premier les termes du second ordre que l'on avait négligés jusqu'alors.

Nouvelle découverte de M. Laplace, relative aux équations séculaires de l'apogée et des nœuds.

Dans le Mémoire dont nous venons de parler, M. Laplace n'avait eu égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, ce qui était d'une grande précision relativement à l'équation séculaire de ce mouvement. Il annonça, dès le mois de mars 1797 (*Lal., Bibl. Astr.*, p. 782), qu'il ne suffisait pas de s'en tenir là dans le calcul des équations séculaires des mouvemens de l'apogée et des nœuds. Nous avons vu, chap. 2, que cette première puissance ne donne que la moitié du mouvement de l'apogée de la Lune, l'autre moitié étant due principalement aux termes qui dépendent de la seconde puissance de la force perturbatrice, et résultant de la combinaison des deux grandes inégalités, la *variation* et l'*évection*. Cette remarque de Clairaut fit voir à M. Laplace la nécessité d'avoir égard au carré de la force perturbatrice dans le calcul de l'équation séculaire du mouvement de l'apogée. Il fut conduit par l'analyse épineuse de tous les termes dont les intégrations augmentent considérablement la valeur, à une équation séculaire soustractive de la longitude moyenne de l'apogée, et qui est à l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune dans le rapport très approché de 33 à 10, au lieu de celui de 3 à 4 que donne la première puissance des forces. Il vérifia par là que les termes dépendant du carré de la force perturbatrice, qui doublent le mouvement de l'apogée dû à la première puissance de cette force, augmentent dans une raison plus grande encore l'équation séculaire de ce mouvement; il considéra de la même manière celle du mouvement des nœuds; et de même que l'inégalité principale de la latitude, en se combinant avec celle de la variation, produit dans ce mouvement un terme dépendant du carré de la force pertur-

(*) En effet, soit $e'^2 = A + Bi + Ci^2$, on a $\frac{2e'de'}{di} = B + 2Ci$;

M. Laplace trouve $\frac{2e'de'}{di}$, égal à $-0'',31588$ en 1700, et à $-0'',27845$ en 700 avant J.-C.; or l'expression analytique de cette quantité se réduit à son premier terme à la première époque où $i=0$, ce qui donne $B = -0'',31588$; elle devient, à la seconde époque, où l'on a $i=-10$: $B-20C = -0'',27845$, d'où l'on tire $C = -0'',0018715$. L'auteur réduit ces valeurs de B et de C en parties du rayon (en les divisant par 57° 17′ 44″), il substitue celle qui en résulte pour e'^2 dans la formule $-\frac{3n'}{2n}\int n'dt.e'^2$, où il fait aussi $n'dt = 100.360°.di$, et prend pour $\frac{n'}{n}$ le rapport connu des moyens mouvemens; ce qui lui donne la formule du texte.

batrice, et qui, en le diminuant, le fait coïncider à fort peu de chose près avec l'observation, il vit qu'en ayant égard au carré de cette force, l'équation séculaire des nœuds est à celle du moyen mouvement dans le rapport de 7 à 10, au lieu de celui de 3 à 4, et qu'elle est additive à leur longitude moyenne; en sorte que le mouvement des nœuds se ralentit comme celui de l'apogée lorsque le moyen mouvement de la Lune s'accélère.

Confirmation de ce résultat, tirée des observations.

Ces découvertes, qui sont si remarquables, comme étant dues uniquement à la théorie, sans que rien les fît encore prévoir dans les observations, furent ensuite confirmées par celles-ci. En effet, l'équation séculaire de l'anomalie étant la somme de celles du moyen mouvement et de l'apogée, et étant égale à plus de quatre fois la première, devait influer très sensiblement sur les observations anciennes. Il était important, pour le vérifier, de connaître toutes les observations faites par l'astronome Ibn-Junis. M. Caussin entreprit la traduction du manuscrit arabe qui les renfermait; M. Bouvard se chargea ensuite d'un travail bien plus laborieux encore, celui de comparer aux tables modernes toutes les éclipses que Ptolémée nous a transmises et celles que les Arabes ont observées; cette comparaison, opérée pour cinquante-deux éclipses, lui donna environ 8′ $\frac{1}{2}$ pour la correction additive du mouvement séculaire de l'anomalie de la Lune. Cette correction, confirmée par les époques et les moyens mouvemens des Tables de Ptolémée et des Arabes, dépendait à la vérité de l'équation séculaire donnée par la théorie, et dont il avait fait usage; mais il la trouva, à fort peu de chose près, la même par la comparaison d'un très grand nombre d'observations de Lahire, Flamsteed, Bradley et Maskeline. Cet accord de la théorie avec les observations suffit pour prouver que l'équation séculaire de la Lune n'est due ni à la résistance de l'éther, ni à la transmission successive de la gravité, puisque ces deux causes accélèrent le moyen mouvement de la Lune sans altérer ceux de son nœud et de son apogée; et que si elles avaient sur elle quelque influence, elles la rapprocheraient de l'équation séculaire du mouvement de son apogée et l'éloigneraient de celle du mouvement des nœuds, en sorte que les trois équations ne seraient point dans le rapport constant des nombres 10, 33 et 7.

Méthode suivie par M. Laplace dans ses nouvelles recherches.

C'est dans un Mémoire qui se trouve dans le t. II de ceux de l'Institut, que M. Laplace a rassemblé tous ces importans résultats, et qu'il a donné l'analyse qui l'y a conduit. Il y adopte la méthode dans laquelle on exprime les coordonnées du mouvement lunaire en séries de sinus et de cosinus d'angles dépendans du mouvement vrai de la Lune, en reconnaissant qu'on a alors moins de développemens à faire que dans celle où l'on emploie le mouvement moyen. Il transforme en conséquence les équations du mouvement en coordonnées rectangulaires où le temps est la variable indépendante, en trois autres plus compliquées, mais qui, lorsqu'on y transforme les coordonnées rectangulaires en polaires, sont propres à déterminer celles-ci. La première donne l'élément dt du temps en fonction de celui de la longitude vraie v comptée sur le plan fixe des x, y, multipliée par le carré $\frac{1}{u^2}$ de la projection du rayon vecteur sur le même plan, et divisé par un radical dont le second terme contient, sous le signe $\int$, la différentielle partielle par rapport à v de la fonction perturbatrice R. La seconde équation est différentielle du second ordre par rapport à u, et sert à le déterminer en fonction des différentielles partielles de R par rapport à u, à v, et à la tangente s de la latitude de la Lune. Enfin la troisième est aussi du second ordre

Équations dont il fait usage.

et sert à déterminer s de la même manière que la seconde détermine u (*); ce sont les équations dont l'auteur s'est aussi servi dans la Théorie de la Lune, qui forme le liv. VII de son *Traité de Mécanique céleste*, en y changeant seulement la fonction R en une autre Q, qui comprend, de plus que la première, la force principale de la Terre sur la Lune.

Après être parvenu à ces équations, dans le Mémoire cité, il développe la valeur de R, où la masse S du Soleil multiplie des fonctions des coordonnées rectangulaires des deux astres; il réduit celles-ci en coordonnées polaires en désignant par u', v', et s' les variables qui correspondent, pour le Soleil, aux lettres u, v et s pour la Lune.

1re Approximation nécessaire pour les substitutions.

Pour obtenir l'expression de R et de ses différentielles partielles en sinus et cosinus d'angles proportionnels à v, il faut déterminer u, u', v', s et s' en fonctions semblables; il y parvient en supposant R nulle dans les équations différentielles, et en intégrant les deux dernières avec quatre constantes arbitraires e, ϖ, λ et θ, qui expriment l'excentricité de l'orbite, la longitude de l'apogée, la tangente de l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant (**). Il substitue la valeur obtenue pour u dans l'expression de dt qui lui donne, par l'intégration, la valeur de $nt+\varepsilon$; celle-ci suppose l'ellipse lunaire immobile; mais on sait qu'en vertu de la force perturbatrice, ses nœuds et son apogée sont en mouvement; il désigne alors par $(1-c)v$ le mouvement de l'apogée, par $(g-1)v$ le mouvement rétrograde des nœuds; il conclut des valeurs relatives à la Lune, en les marquant d'un trait, celles qui se rapportent au Soleil; et la comparaison des valeurs de nt et de $n't$ lui donne celle de v' en fonction de mv et d'une série des sinus des multiples de v, que la petitesse de m et de l'excentricité de l'orbe terrestre rend très convergente, ainsi que celle de u'.

Il ne s'agit plus que de substituer ces valeurs dans les expressions de R et de ses différentielles partielles, afin de les développer en ne conservant, parmi les quantités de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, que celles qui sont constantes et celles qui sont multipliées par les sin. ou cos. d'angles dans lesquels le coefficient de v diffère peu de l'unité. Les termes du même ordre, dans lesquels le coefficient de v est très petit, croissent beaucoup par l'intégration de l'expression différentielle du temps; mais ils n'entrent dans le développement de R qu'autant qu'ils affectent l'angle v', et alors il sont multipliés par m, ce qui les rend fort petits, en sorte que l'on peut les né-

---

(*) Les équations sont (voyez note 7, § 3)

$$dt=\frac{dv}{u^2\sqrt{h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}}},\quad \text{où}\quad R=\frac{S}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}-\frac{S(xx'+yy'+zz')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$0=\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)\left\{h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}\right\}-(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}-\left(\frac{dR}{du}\right)-\frac{s}{u}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\left(\frac{dR}{dv}\right)\cdot\frac{du}{u^2dv},$$

$$0=\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)\left\{h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}\right\}-\frac{s}{u}\cdot\left(\frac{dR}{du}\right)-\frac{(1+s^2)}{u^2}\cdot\left(\frac{dR}{ds}\right)+\left(\frac{dR}{dv}\right)\cdot\frac{ds}{u^2dv}.$$

(**) Cette intégration donne (note 7, § 3)

$$u=\frac{1}{h^2(1+\lambda^2)}\left\{\sqrt{1+s^2}-e\cos(v-\varpi)\right\},\quad s=\lambda\sin(v-\theta),$$

équations qui, étant jointes à celle-ci, $dt=\frac{dv}{hu^2}$, déterminent complètement le mouvement elliptique.

gliger sans erreur sensible; enfin, il faut conserver les termes multipliés par $e'^2 e \cos(cv - \varpi)$, parce que c'est de là que dépend l'équation séculaire du mouvement de l'apogée.

Moyen d'avoir égard au carré de la force perturbatrice.

Pour porter l'approximation jusqu'au carré de la force perturbatrice, l'auteur, après avoir développé à part les termes de l'équation en u, et reconnu ainsi ceux qu'ils devaient introduire dans la valeur approchée de u, désigne leur somme par δu, en prenant pour δu une suite de ces termes affectés chacun d'un coefficient indéterminé, et il a égard à l'accroissement qui a lieu dans chaque terme de l'équation lorsqu'on augmente u de δu, ou qu'on le fait varier par rapport à u. Le développement de tous ces calculs est très long, et il est rendu très difficile par l'attention scrupuleuse et délicate qu'il faut mettre dans le choix des termes sensibles.

Équation séculaire de l'apogée.

Après avoir réduit ainsi les termes de la seconde équation, qui suivent les deux premiers, à une suite de termes non périodiques, de cos. des angles $cv - \varpi$, $c'mv - \varpi'$, et de quelques-uns de leurs multiples, M. Laplace substitue, dans ces deux premiers termes, pour u, la valeur qu'il a supposée à $u + \delta u$, et déduit de la comparaison des coefficiens des termes semblables, des équations pour déterminer les coefficiens inconnus. Il substitue alors, au lieu de u, sa valeur dans la première équation, qui lui donne, par l'intégration, une valeur de v en fonction de t, dont le second terme est l'équation séculaire du moyen mouvement. Il reprend ensuite l'équation différentielle en u, et y substitue la valeur de u, en regardant e et ϖ comme variables; égalant ensuite séparément à zéro les coefficiens de $\sin(cv - \varpi)$ et $\cos(cv - \varpi)$, il obtient deux équations où entrent les variations de e et de ϖ, et qui lui donnent les équations séculaires de ces élémens (*).

Équation séculaire des nœuds.

L'auteur considérant enfin le mouvement des nœuds, reprend l'équation différentielle qui donne la tangente s de la latitude, en y négligeant les carrés et les produits de s et de s'; il suppose $s = \lambda' \sin(v - \theta') + s_{,}$; et comme le premier terme de cette valeur est à peu près la latitude au-dessus du plan fixe des xy ou de l'écliptique fixe, de la projection de la Lune faite sur le plan de l'écliptique vraie, $s_{,}$ désigne alors, à très peu de chose près, la latitude de cet astre au-dessus du plan de l'écliptique vraie, et on

(*) Supposant dans les deux premiers termes de l'équation différentielle en u déjà développée

$$u = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda^2\right) - \frac{e}{a}\cos(cv - \varpi) + \text{etc.};$$

le coefficient de $\sin(cv - \varpi)$ lui donne l'équation $\frac{2de}{e} = \frac{d^2\varpi}{cdv - d\varpi}$; et en l'intégrant par les logarithmes, il en tire $e^2 = \frac{A}{c - \frac{d\varpi}{dv}}$, A étant une constante arbitraire; équation qui prouve que la variation de l'excentricité de l'orbite lunaire n'influe point sensiblement sur les équations séculaires de la Lune, puisque e^2 s'y trouve multiplié par la quantité $\frac{Sa^3}{a'^3} = m^2 = \frac{1}{179}$, et qu'on peut négliger le produit de $\frac{d\varpi}{dv}$ par cette fraction.

Le coefficient de $\cos(cv - \varpi)$ lui fournit l'équation $c - \frac{d\varpi}{dv} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{d^2e}{2edv^2}$, α étant le coefficient de $\frac{e}{a}\cos(cv - \varpi)$, dans l'équation différentielle. Il désigne alors par $\frac{3}{2}\zeta m^2$ le coefficient de e'^2 dans la fonction $\frac{1}{2}\alpha$; il intègre la relation précédente, en négligeant son dernier terme comme étant insensible par rapport à $\frac{d\varpi}{dv}$, et obtient, en remplaçant dv par dt,

$$\varpi = \text{const.} + \frac{3}{2}\zeta m^2 \int e'^2 dt, \quad \zeta = 3{,}3024.$$

peut la supposer égale à $\lambda \sin (gv - \theta)$ dans les termes qui dépendent des forces perturbatrices. Il développe alors les principaux de ces termes. Pour avoir leur variation due à la force perturbatrice, il suppose $s_{,} = \lambda$ sinus $(gv - \theta) + \delta s_{,}$, et il prend pour $\delta s_{,}$ un développement composé d'un certain nombre de sin. d'angles qui entrent déjà dans l'équation différentielle, multipliés par des coefficiens indéterminés. Il obtient ainsi la seconde partie de la troisième équation; et supposant ensuite, dans ces deux premiers termes, $s_{,} = \lambda \sin (gv - \theta)$ en regardant λ et θ comme variables, la comparaison des coefficiens de $\sin (gv - \theta)$ et $\cos (gv - \theta)$ lui donne deux équations entre les différentielles de λ et de θ (*). L'intégration de la première lui prouve que l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique vraie n'est pas rigoureusement constante, mais que sa variation est insensible, et n'influe point d'une manière notable sur les équations séculaires de la Lune. La seconde équation étant intégrée aussi, lui donne l'expression complète de l'équation séculaire du nœud ascendant.

Résistance de l'éther.

C'est par la détermination des altérations produites par la résistance de l'éther, que M. Laplace termine son Mémoire. Il prouve, en supposant cette résistance proportionnelle au carré de la vitesse, en l'introduisant seule dans les valeurs de $\left(\frac{dR}{du}\right)$, $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, $\left(\frac{dR}{ds}\right)$, et en intégrant les équations dans cette hypothèse, que cette action, si elle avait lieu, n'aurait d'influence que sur le seul mouvement de la Lune, où elle produirait une équation séculaire proportionnelle au carré du temps; et comme les observations n'indiquent aucun effet qui exige cette considération pour être expliqué, il en conclut que l'accélération produite par la résistance d'un fluide éthéré dans le moyen mouvement de la Lune, est jusqu'à présent insensible.

Prix sur les époques et les tables de la Lune.

Pendant qu'on perfectionnait ainsi à Paris la théorie de la Lune avec tant de succès, l'astronome Bürg s'occupait, à Vienne, à calculer les observations de cet astre faites à Greenwich. L'Institut national de France proposa, le 19 mars 1798, le sujet suivant d'un prix de mathématiques : *Déterminer par un grand nombre d'observations* (environ cinq cents), *les meilleures et les plus modernes qu'on pourra se procurer, les époques de la longitude moyenne de l'apogée et du nœud ascendant de la Lune.* Deux pièces seulement furent envoyées au concours, l'une était de M. Bouvard, l'autre de M. Bürg. (Voyez le Rapport de M. Delambre, *Conn. des Tems* pour 1803, p. 489.) Ces auteurs, non contens de satisfaire aux questions du programme d'une manière complète, s'étaient livrés, sur les

---

(*) Ces deux équations sont, en désignant par α' le coefficient de $\lambda \sin (gv - \theta)$ dans l'équation différentielle en s développée,

$$o = \frac{2d\lambda}{dv} \cdot \left(g - \frac{d\theta}{dv}\right) - \lambda \frac{d^2\theta}{dv^2}, \qquad o = \frac{d^2\lambda}{dv^2} - \lambda \left(g - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 + \lambda (1 + \alpha').$$

La première donne, en l'intégrant, $\lambda^2 = \frac{B}{g - \frac{d\theta}{dv}}$, B étant une constante arbitraire.

La seconde donne, en négligeant son premier terme par rapport à $\lambda \frac{d\theta}{dv}$, en supposant que g exprime la partie constante de $1 + \frac{1}{2}\alpha'$, et que $\frac{3}{2} C' m^2$ soit le coefficient de e'^2 dans α',

$$\theta = \text{const.} - \frac{3}{2} C m^2 \int e'^2 dt, \quad C = 0{,}699598.$$

mouvemens de la Lune, à des recherches si pénibles et si intéressantes, que l'Institut (ce sont les expressions mêmes du Rapport) considérant d'ailleurs l'importance du sujet pour l'Astronomie et la Navigation, crut devoir doubler le prix annoncé, et le partager également entre les deux pièces : c'est ce qu'il fit le 5 avril 1800. Mais le Bureau des Longitudes ayant trouvé ensuite cette récompense trop petite pour un travail aussi énorme que celui de M. Bürg, qui pouvait tirer de ses calculs toutes les équations de la Lune avec une grande précision, proposa encore, le 20 juin 1800, sur la demande de M. Laplace, *de discuter et d'établir, par la comparaison avec un grand nombre de bonnes observations, la valeur des coefficiens des inégalités de la Lune, et de donner pour la longitude, la latitude et la parallaxe de cet astre, des formules plus exactes encore et plus complètes que celles qui servent de fondement aux Tables actuellement en usage; et, enfin, de construire, sur ces formules, des tables d'une étendue suffisante pour la commodité et la sûreté des calculs.* Le Bureau ne fixa aucun terme pour le concours, et promit d'adjuger un prix de 6000 francs à la première pièce qui aurait rempli les conditions du programme.

Découverte de la nutation lunaire, due à M. Laplace.

M. Laplace avait lu à la première classe de l'Institut, peu de jours auparavant, un petit Mémoire (inséré depuis dans le t. III des *Mém. de l'Inst.*) relatif à une nouvelle inégalité périodique dans le mouvement des nœuds de la Lune, que la comparaison d'un grand nombre d'observations avait indiquée à M. Bürg, sans qu'il pût en découvrir la loi. M. Laplace prouva que cette inégalité tenait à ce qu'il existe dans l'orbite lunaire un mouvement de nutation analogue à celui de l'équateur terrestre, et dont la période est celle du mouvement des nœuds de la Lune. « Le sphéroïde terrestre (dit-il, Mém. cité, p. 198), par son attraction sur ce satellite, fait osciller » l'orbite lunaire, comme l'attraction de la Lune sur le sphéroïde terrestre fait osciller » notre équateur. L'étendue de cette nutation dépend de l'aplatissement de la Terre, » et peut ainsi répandre un grand jour sur cet élément important. Il en résulte, dans » la latitude de la Lune, une inégalité proportionnelle à sa longitude moyenne, et » dont le coefficient est — 6",5 *centès.* si l'aplatissement de la Terre est $\frac{1}{334}$. Ce coefficient augmente et s'élève à — 13",5 si cet aplatissement est $\frac{1}{230}$. Cette inégalité » revient à supposer que l'orbite lunaire, au lieu de se mouvoir sur l'écliptique, en » conservant sur elle une inclinaison constante, se meut, avec la même condition, sur » un plan passant par les équinoxes, entre l'équateur et l'écliptique, et incliné à ce » dernier plan de 6",5.... M. Bouvard vient d'en comparer le résultat aux observations. » Deux cent vingt observations de Maskeline, dans lesquelles l'inégalité précédente était » à son *maximum* positif, combinées avec deux cent vingt observations dans lesquelles » elle était à son *maximum* négatif, lui ont donné — 7",5 à très peu près pour son » coefficient; ce qui répond à $\frac{1}{314}$ d'aplatissement pour la Terre. Ce coefficient s'élèverait » à — 13",5, si la Terre était homogène; son homogénéité est donc exclue par les observations mêmes du mouvement de la Lune.

» Les considérations précédentes m'ont fourni une nouvelle détermination de l'inégalité » de la Lune dépendante de la longitude du nœud. Les observations avaient porté » Mayer à l'admettre, quoiqu'elle ne fût indiquée par aucune des théories de la Lune; » il l'avait fixée à 4" dans son *maximum*. Mason, par la comparaison d'un très grand » nombre d'observations de Bradley, l'a trouvée de 7"; enfin M. Bürg, par celles de



» Maskeline, vient de la fixer à 6″,8. Je ne l'avais d'abord trouvée, par la théorie de » la pesanteur, que de 2″ au plus; mais ayant reconnu depuis la nutation de l'orbite » lunaire, j'ai trouvé que le coefficient de cette inégalité est à celui de l'inégalité pré» cédente du mouvement en latitude, comme neuf fois et demie la tangente de l'inclinaison » moyenne de l'orbite lunaire est à l'unité. Cela donne 5″,6 pour ce coefficient dans l'hy» pothèse de $\frac{1}{334}$ d'aplatissement pour la Terre; celui de Bürg répond à $\frac{1}{306}$ d'aplatisse» ment... Ainsi la Lune, par l'observation suivie de ses mouvemens, nous découvre la » figure de la Terre dont elle fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses » éclipses. »

Tables de Bürg.

Cependant Bürg travaillait à ses Tables de la Lune, en profitant des secours précieux que lui offraient ses communications avec M. Laplace. Un concours mutuel s'était établi entre le géomètre et l'astronome, et devait, par l'étendue et la variété de leurs connaissances et de leurs lumières, faire faire de grands progrès à la théorie qui en était l'objet. Chacun d'eux arrivant par différentes voies à soupçonner de nouvelles inégalités, avait besoin de l'autre; d'une part pour en déterminer la cause et la loi, de l'autre pour en fixer la valeur avec précision, et en déduire, par la comparaison des résultats, certains élémens importans.

L'Institut reçut, dès le mois de novembre 1801, les Tables de Bürg, qui lui envoya ensuite plusieurs supplémens. On se décida, sur le rapport d'une Commission (voyez *Conn. des Tems* pour 1805), à doubler encore le prix proposé, en l'accordant à l'infatigable astronome qui, après avoir calculé plus de trois mille observations de Maskeline, corrigé les coefficiens de Mason, et introduit neuf équations nouvelles, déterminées aussi par la méthode des équations de condition, était parvenu à réduire le *maximum* des erreurs de ses tables à moins de 40″ *centès.*, et leur quantité moyenne à environ 10″ pour la longitude et 6″ pour la latitude. Ces tables ont été depuis publiées par le Bureau des Longitudes, et M. Delambre, qui en fut l'éditeur, rendit leur usage plus commode, en ne donnant au calculateur que des additions à faire, sans qu'aucune époque fut altérée.

Découverte d'une inégalité de la Lune à longue période.

A l'époque du premier envoi de Bürg, il restait encore une source d'erreurs qui commençait à se manifester, dont Bürg n'avait pu signaler que les effets, et dont la découverte était réservée à M. Laplace qui l'annonça le 26 janvier 1802. « Les observations » de Lahire et de Flamsteed (dit-il, *Méc. cél.*, t. III, p. 177), comparées à celles de » Bradley, indiquent un mouvement séculaire plus grand de 15 à 20″ *centès.* que celui » des Tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande; » les observations de Bradley, comparées aux dernières observations de Maskeline, » donnent au contraire un mouvement séculaire plus petit de 150″ au moins; enfin les » observations faites depuis quinze à vingt ans prouvent que cette diminution du » mouvement de la Lune est maintenant croissante. De là résulte la nécessité de retou» cher sans cesse aux époques des tables, imperfection qu'il importe de faire dispa» raître. Elle indique évidemment l'existence d'une ou de plusieurs inégalités inconnues, à » longues périodes, que la théorie seule peut faire connaître. En l'examinant avec soin, » je n'ai remarqué aucune inégalité semblable dépendante de l'action des planètes; s'il » en existait une dans la rotation de la Terre, elle se manifesterait dans le moyen mou» vement de la Lune, et pourrait y produire les anomalies observées; mais l'examen » attentif de toutes les causes qui peuvent altérer la rotation de la Terre, m'a convaincu

» de plus en plus, que ses variations sont insensibles. Revenant donc à l'action du Soleil » sur la Lune, j'ai reconnu que cette action produit une inégalité dont l'argument est » le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son » périgée, moins trois fois la longitude du périgée du Soleil (*). Cette inégalité, » dont la période est de 184 ans, dépend du produit de ces quatre quantités : le carré » de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, l'excentricité de cet orbe, le cube » de l'excentricité de l'orbe solaire, et le rapport de la parallaxe du Soleil à celle de la » Lune; elle paraît ainsi devoir être insensible; mais les grands diviseurs qu'elle acquiert » par les intégrations peuvent la rendre sensible, sur-tout si les termes les plus considé- » rables dont elle se compose, sont affectés du même signe. Il est très difficile d'obtenir » son coefficient par la théorie, à cause du grand nombre de ses termes, et de l'ex- » trême difficulté de les apprécier, difficulté beaucoup plus grande encore qu'à l'égard » des autres inégalités de la Lune; j'ai donc déterminé ce coefficient au moyen des » observations faites depuis un siècle, et j'ai reconnu qu'il est à peu près égal à 47",51. » Son introduction dans les tables doit en changer les époques et les moyens mouve- » mens. J'ai trouvé ainsi qu'il faut diminuer de 98",654 le moyen mouvement séculaire » des tables de la troisième édition de l'*Astr.* de Lalande. Comme ma formule représente, » avec une précision remarquable, les corrections des époques de ces tables déterminées » par un très grand nombre d'observations, pour six époques différentes, de 1691 à 1801, » et que la théorie ne m'a point indiqué d'autres inégalités lunaires à longues périodes, » il me paraît certain que les anomalies observées dans le moyen mouvement de la » Lune dépendent de l'inégalité précédente. »

Il ne restait plus à M. Laplace, après qu'il eût montré, par la suite de découvertes brillantes dont nous venons d'indiquer les traits principaux, tout le parti qu'on pouvait tirer de l'analyse pour le perfectionnement même des tables, qu'à rassembler tous ses travaux sur ce sujet, à profiter aussi des idées heureuses dont on avait précédemment fait usage, en adoptant cependant une marche uniforme, et à présenter pour la première fois au monde savant, une théorie de la Lune complète. C'est à ce grand résultat qu'il parvint avec une étonnante rapidité dans le troisième vol. de la *Mécanique céleste*, qui parut le 29 décembre 1802 (*Bibl. Astr.*, p. 874). « Mon objet, dans ce livre (dit-il » p. 170, en parlant du livre VII), est de montrer dans la seule loi de la pesanteur uni- » verselle, la source de toutes les inégalités du mouvement lunaire, et de me servir ensuite » de cette loi, comme moyen de découvertes, pour perfectionner la théorie de ce mouve- » ment, et pour en conclure plusieurs élémens importans du système du Monde..... » On peut aisément imaginer un grand nombre de moyens différens et nouveaux de » mettre le problème en équation; mais la discussion de tous les termes qui, très petits » en eux-mêmes, acquièrent une valeur sensible par les intégrations successives, est » ce qu'il offre de plus difficile et de plus important. Ayant considéré comme quantités » du premier ordre, le rapport des moyens mouvemens du Soleil à celui de la Lune,

Théorie de la Lune, de la Mécanique céleste.

(*) Cette inégalité introduite dans l'expression de $nt + \varepsilon$ est de la forme

$$H.\sin(3v - 3mv + 3c'mv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi - 3\varpi').$$

Or, comme quelques-uns des termes qui la composent, et qui sont tous de l'ordre du carré des masses, ont acquis par la double intégration le carré du coefficient de v en diviseur, et que l'on a (*Méc. cél.*, t. III, p. 289) $3 - 3m + 3c'm - 2g - c = 0,00040652$, l'extrême petitesse de ce diviseur rend les termes correspondans sensibles.

» les excentricités des orbes de la Lune et de la Terre, et l'inclinaison de l'orbe lunaire » à l'écliptique, j'ai déterminé toutes les inégalités du premier, du second et du troi- » sième ordre, et les inégalités les plus considérables du quatrième, en portant la pré- » cision jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, et en conservant celles du » cinquième ordre qui se sont présentées d'elles-mêmes... En comparant les coefficiens » de mes formules à ceux des meilleures tables réduites en sin. et cos. d'angles crois- » sant proportionnellement à la longitude vraie, j'ai eu la satisfaction de voir que la » plus grande différence qui, dans la théorie de Mayer, l'une des plus exactes qui » aient paru jusqu'à ce jour, s'élève à près de 100″, est ici réduite à 30″ relativement » aux Tables de Mason, et au-dessous de 26″ relativement aux Tables de Bürg, qui » sont encore plus exactes. Ma théorie se rapproche encore plus des tables, à l'égard du » mouvement en latitude dont les approximations sont plus simples et plus convergentes, » et la plus grande différence n'est que de 6″; quant à la parallaxe de la Lune, on a » préféré, avec raison, d'en former les tables uniquement par la théorie qui, vu la peti- » tesse des inégalités de la parallaxe, doit les donner plus exactement que les observa- » tions. »

Il serait intéressant d'entrer dans quelques détails sur la méthode suivie par l'auteur de cet immense travail; de montrer avec quelle précision elle lui permet d'apprécier successivement toutes les inégalités; d'admirer sa sagacité à ne choisir, parmi un nombre infini de termes, que ceux qu'il croit pouvoir être sensibles, et à deviner en quelque sorte leur ordre et leur grandeur; la manière dont il a égard à la non sphéricité de la Terre et de la Lune, dans l'expression de la fonction des forces Q; le procédé par lequel il passe d'un ordre inférieur à un ordre plus élevé en faisant varier chaque terme; l'idée simple et si utile pour la pratique, d'indiquer l'ordre des coefficiens indéterminés par des nombres placés au bas de chaque lettre, etc.; mais nous devons, à regret, nous borner à renvoyer à l'ouvrage lui-même.

Nous ne ferons non plus que citer la partie du Traité d'Astronomie de M. Delambre relative à la Lune, et dans laquelle il a montré comment on pouvait déterminer les inégalités par les observations; ainsi que les nouvelles Tables de la Lune de M. Burckhardt, qui avait fait une partie considérable de son travail avant que celui de M. Bürg eût été couronné, et qui a réussi tant à simplifier la forme des tables qu'à diminuer encore un peu leurs erreurs (voyez le *Rapport* à ce sujet, *Conn. des Tems* pour 1816). Nous ajouterons seulement que l'astronome Bürg travaille à perfectionner les siennes, et ne trouve pas, dit-on, de changemens notables à y faire. Ainsi tout semble annoncer qu'on est arrivé, sur ce point, à un degré d'exactitude qu'il sera bien difficile de dépasser.

Conclusion. Après avoir suivi la marche intéressante des travaux sur la théorie de la Lune depuis Newton, qui en attaqua le premier les difficultés, jusqu'à M. Laplace, qui a surmonté les dernières, nous devons laisser à de meilleurs juges le soin de faire les réflexions que ce sujet peut faire naître, et nous terminerons cette partie par un passage tiré de la Mécanique céleste, qui peut lui servir de conclusion : *Si l'on considère le grand nombre et l'étendue des inégalités de la Lune, et la proximité de ce satellite à la Terre; on jugera qu'il est, de tous les corps célestes, le plus propre à établir la grande loi de la gravitation universelle, et la puissance de l'analyse, de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible à l'esprit humain de pénétrer dans une théorie aussi compliquée, et qui peut être employé comme un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même.*

NOTES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

NOTE PREMIÈRE.

Déterminer géométriquement les équations du mouvement elliptique des Planètes, et la position de leurs orbites, en partant des deux premières lois de Kepler.

§ 1er. *Trouver l'équation polaire de l'ellipse, et celle de l'ellipse* mobile *en particulier.*

Soit M un point situé sur l'ellipse AMB, dont C est le centre; soient F et F′ les deux foyers; x et y les coordonnées rectangulaires Fq, Mq de ce point, rapportées au foyer F; r et r' les distances MF, MF′ du même point aux deux foyers; a le demi-grand axe CB; ae l'excentricité CF; Fig. 1.

Soit menée la droite fixe FK, d'où l'on compte les angles $v=$ MFK et $\varpi=$ BFK, l'on aura MFB$=v-\varpi$;

Les triangles rectangles MF′q, MFq donnent pour y^2 les deux valeurs égales

$$r'^2-(2ae+x)^2=r^2-x^2, \quad \text{d'où l'on tire} \quad r'^2-r^2=4a\,(ex+ae^2):$$

Mais on a, par la propriété de l'ellipse, $r+r'=2a$, ce qui donne $r'^2-r^2=4a\,(a-r)$; et de là en comparant, $a-r=ex+ae^2$; et comme l'on a dans le triangle MFq la relation $x=r\cos(v-\varpi)$, on obtient, en éliminant x, l'équation cherchée

$$(1)\ldots\ldots\; r=\frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)};$$

elle se réduit à $r=a\,(1-e^2)$ quand $(v-\varpi)$ est un angle droit, et donne ainsi la valeur du *demi-paramètre* ou de l'ordonnée du foyer.

Supposons pour un moment que ϖ soit nul et que la ligne FK vienne se confondre avec la ligne AB; supposons encore que celle-ci, au lieu d'être fixe, décrive autour de F, pendant que M décrit l'angle v, un angle qui soit à l'angle v comme $1-m$ est à 1:

La distance angulaire des points mobiles M et B deviendra $v-(1-m)v$ ou mv. Ainsi l'équation de l'ellipse *mobile* sera

$$r=\frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos mv},$$

ou, en désignant par p le demi-paramètre de l'ellipse,

$$\frac{p}{r}=1+e\cos mv.$$

§ 2. *Problème de Kepler.*

Fig. 2. Supposons que M désigne une planète qui décrit une ellipse dont le Soleil occupe le foyer F, et conservons les dénominations précédentes; la ligne AB sera la ligne des *apsides*, l'angle $(v - \varpi)$ sera l'*anomalie vraie* comptée du périhélie B, et l'équation (1) sera l'*équation de l'orbite;* mais si l'on compte l'angle $v - \varpi$ à partir de l'aphélie A, ainsi que le faisaient les géomètres du siècle dernier, il faut substituer, dans la valeur précédente de r, à l'angle $v - \varpi$, son supplément, ce qui donne le signe — au terme en *cosinus*.

Décrivons du point C comme centre, avec le rayon a, le cercle ANB, et supposons un astre X sur ce cercle, partant de B et arrivant en A en même temps que la planète M, en se mouvant uniformément.

Soit XCB $= nt$ l'angle qu'il a décrit au bout du temps t, ou l'*anomalie moyenne;* celle-ci étant donnée, le problème consiste à trouver l'anomalie vraie. Kepler employa, pour y parvenir, un angle auxiliaire $u =$ NCB, appelé *anomalie excentrique*, et qui est la distance angulaire du point N où la ligne qM coupe le cercle, au point B du périhélie. Nous allons chercher d'après cela à exprimer le rayon vecteur, l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie en fonction de u.

La loi des aires proportionnelles au temps indique que le secteur MFB est à la surface de l'ellipse comme le temps que la planète met à le parcourir est à sa révolution périodique; le secteur XCB est à la surface du cercle dans le même rapport; les secteurs MFB, XCB sont donc entre eux comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle, ou comme l'ordonnée Mq est à Nq. Les secteurs MFB, NFB ayant même base sont aussi entre eux comme Mq est à Nq; ainsi les secteurs NFB, XCB sont égaux.

Or, le secteur NCB est égal à la somme des aires NFB, NFC, c'est-à-dire au secteur XCB, plus la surface du triangle NFC; ce qui donne, en égalant leurs valeurs, l'équation $\frac{1}{2}\overline{CB}^2 \times u = \frac{1}{2}\overline{CB}^2 \times nt + \frac{1}{2}\,CF \times qN$, d'où l'on tire, en remarquant que $CB = a$, $CF = ae$, $qN = a \sin u$, et en divisant par a^2,

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = nt + e \sin u\text{; équation due à Kepler.}$$

Le triangle rectangle MFq donne $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, mais on a $x = a \cos u - ae$; et d'après la nature de l'ellipse, $y = qN\sqrt{1 - e^2} = a \sin u \sqrt{1 - e^2}$.

On aura donc, en substituant ces valeurs,

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = a\,(1 - e \cos u)\text{; équation due à Kepler.}$$

Si l'on compare les valeurs de r données par les équations (1) et (3), on aura

$$\cos u = \frac{\cos(v - \varpi) + e}{1 + e \cos(v - \varpi)}; \text{ d'où l'on tire } \frac{1 - \cos(v - \varpi)}{1 + \cos(v - \varpi)} = \frac{1 + e}{1 - e} \cdot \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u},$$

ou ce qui revient au même,

$$(4) \ldots\ldots \quad \tan\!g \tfrac{1}{2}(v - \varpi) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\, \tan\!g \tfrac{1}{2} u\text{; équation due à Lacaille.}$$

Les équations (2), (3), (4) suffisent pour déterminer la position de la planète dans son orbite.

§ 3. *Détermination du plan de l'orbite.*

On a coutume de rapporter au plan de l'écliptique, regardé comme fixe, la position du plan de l'orbite de chaque planète, ce qui complète la détermination de sa position dans l'espace.

Soit pour cet effet, M′ la projection de M sur le plan de l'écliptique ; Fig. 3.

FΩ l'intersection des deux plans, ou la *ligne des nœuds ;*

abaissons de M et de M′ les perpendiculaires Mp, $M'p$ sur cette ligne ; menons du point F la ligne fixe quelconque F K′ située dans l'écliptique ;

enfin désignons par γ l'angle MpM' qui représente l'*inclinaison* de l'orbite,

ψ...... MFM′ ou la *latitude* de la planète,

φ...... K′FM′ la *longitude* de la planète comptée sur l'écliptique,

α...... K′FΩ la *longitude du nœud ascendant* sur l'écliptique,

ζ...... KFΩ la longitude du nœud comptée sur l'orbite,

on pourra, au moyen des angles ν, ζ et γ, fixer la position du plan de l'orbite, et déterminer par là la latitude et la longitude proprement dites.

En effet, on a d'abord $pM' = pM \cos\gamma$; et comme on a d'ailleurs $pM' = pF \operatorname{tang}(\varphi - \alpha)$, $pM = pF \operatorname{tang}(\nu - \zeta)$, on obtient, par la substitution :

(5)................ $\operatorname{tang}(\varphi - \alpha) = \operatorname{tang}(\nu - \zeta) \cos\gamma$;

le triangle MFM′ donne $\sin\psi = \frac{MM'}{MF} = \frac{Mp}{MF} \sin\gamma$, d'où l'on tire

(6).................... $\sin\psi = \sin(\nu - \zeta) \sin\gamma$;

enfin si, connaissant les angles $(\varphi - \alpha)$ et γ l'on veut déterminer la latitude ψ, on a la relation $\operatorname{tang}\psi = \frac{MM'}{M'F} = \frac{M'p}{M'F} \operatorname{tang}\gamma$; d'où l'on tire

(7)..................... $\operatorname{tang}\psi = \sin(\varphi - \alpha) \operatorname{tang}\gamma$.

Les équations précédentes déterminent complètement la position du plan de l'orbite dans le mouvement elliptique.

§ 4. *Intersection et inclinaison mutuelle des plans des orbites de deux planètes.*

Supposons enfin, avec Lagrange (*Mém. de Par.*, 1774, p. 114), une seconde planète dont la longitude soit φ, comme celle de la première, mais dont l'inclinaison de l'orbite soit γ', la longitude du nœud ζ', et dont par conséquent la tangente de la latitude ait pour expression $\operatorname{tang}\gamma' \sin(\varphi - \alpha')$.

Désignons de plus par η l'inclinaison mutuelle des deux orbites,

par ϖ la longitude du nœud de la première de ces orbites sur la seconde ; la tangente de la latitude correspondante à la longitude φ, comptée sur la seconde orbite, sera exprimée par $\operatorname{tang}\eta \sin(\varphi - \varpi)$.

Si l'on suppose les deux orbites très peu inclinées à l'écliptique, il est clair que les tangentes des latitudes doivent être à très peu de chose près égales aux latitudes elles-mêmes ; de plus, le cercle de latitude correspondant à la longitude φ, comptée sur l'écliptique, se confondra aussi, à peu près, avec le cercle de latitude correspondant à la même longitude φ, comptée sur l'une des orbites ; ainsi la dernière expression sera à très peu de chose près égale à la différence des deux premières, de sorte qu'on aura cette équation :

$$\operatorname{tang}\eta \sin(\varphi - \varpi) = \operatorname{tang}\gamma \sin(\varphi - \alpha) - \operatorname{tang}\gamma' \sin(\varphi - \alpha'),$$

qui devra avoir lieu en général, quelle que soit la longitude φ; on aura donc nécessairement, en égalant séparément de part et d'autre les coefficiens de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, les deux équations particulières :

$$(a) \ldots\ldots \operatorname{tang}\eta \cos\varpi = \operatorname{tang}\gamma \cos\alpha - \operatorname{tang}\gamma' \cos\alpha',$$
$$(b) \ldots\ldots \operatorname{tang}\eta \sin\varpi = \operatorname{tang}\gamma \sin\alpha - \operatorname{tang}\gamma' \sin\alpha',$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{\operatorname{tang}\gamma \sin\alpha - \operatorname{tang}\gamma' \sin\alpha'}{\operatorname{tang}\gamma \cos\alpha - \operatorname{tang}\gamma' \cos\alpha'}; \quad \operatorname{tang}\eta = \sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma - 2\operatorname{tang}\gamma' \operatorname{tang}\gamma \cos(\alpha-\alpha') + \operatorname{tang}^2\gamma'};$$

formules qui servent à déterminer le lieu du nœud commun, et la tangente de l'inclinaison mutuelle de deux orbites dont on connaît les lieux des nœuds et les inclinaisons sur l'écliptique.

NOTE II.

Équations générales du mouvement d'un point matériel soumis à l'action de deux forces accélératrices rectangulaires, qui agissent dans le même plan, et dont l'une est dirigée vers un centre fixe.

Fig. 4. § 1. *Lemme de Clairaut pour trouver les équations du mouvement d'un point* M *soumis à l'action de deux forces, l'une* Σ *dirigée suivant le prolongement de la ligne menée du centre fixe* T *au point* M, *l'autre* Π *perpendiculaire à la première et dirigée dans le sens du mouvement.*

Soient $\mathrm{TM} = r$, $\mathrm{BTM} = v$, $\mathrm{M}m$ l'élément de la courbe décrit dans l'instant dt; on a $\mathrm{T}m = r + dr$, $\mathrm{BT}m = v + dv$, $m\mathrm{T} - \mathrm{MT} = dr$, $\mathrm{MT}m' = dv$.

Supposons que l'action des forces accélératrices vînt à cesser au point m, le mobile décrirait dans l'instant suivant, en vertu de sa vitesse acquise, l'espace mn égal à $\mathrm{M}m$ et dirigé sur son prolongement; si au contraire les forces continuent d'agir, leur action infléchissant la route que suit le mobile, l'amènera en μ au bout du second instant, et l'on aura $\mathrm{T}\mu = r + 2dr + d^2r$, $\mathrm{MT}\mu = dv + d^2v$. Du centre T avec le rayon $\mathrm{T}\mu$ soit décrit l'arc infiniment petit μo; on et $o\mu$ seront les espaces respectivement parcourus en vertu de la force centrale et de la force perpendiculaire; et comme les espaces parcourus ont pour expression le produit des forces par le carré du temps, les équations du mouvement seront, en supposant que les forces Σ et Π tendent à accélérer le mouvement et à augmenter les coordonnées r et v,

$$on = \Sigma dt^2, \quad o\mu = \Pi dt^2;$$

et il ne s'agit plus que de déterminer on et $o\mu$ en fonction de r et de v.

Décrivons pour cet effet les petits arcs $\mathrm{M}m'$, mn', et faisons $nn' = \delta r$, $m\mathrm{T}n = \delta v$: on aura $o\mu = \mathrm{T}\mu . n\mathrm{T}\mu = (r + 2dr + d^2r)(dv + d^2v - \delta v)$, $on = \delta r - dr - d^2r$.

Or, les secteurs $\mathrm{MT}m$, $m\mathrm{T}n$ sont égaux comme ayant même base et même hauteur, ce qui donne l'équation $r^2dv = (r + dr)^2\delta v$; d'où l'on tire, $\delta v = \frac{r^2dv}{(r + dr)^2}$, et en se bornant aux quantités du second ordre .... $\delta v = dv - \frac{2drdv}{r}$.

Les triangles rectangles $\mathrm{M}mm'$, mnn', où l'on peut supposer les élémens $\mathrm{M}n'$, mn' rectilignes, donnent aussi, en égalant les valeurs de $\overline{\mathrm{M}m}^2$ et $\overline{mn}^2$,



$$r^2dv^2 + dr^2 = (r+dr)^2\delta v^2 + \delta r^2 = \frac{r^4dv^2}{(r+dr)^2} + \delta r^2;$$

d'où l'on tire, en se bornant toujours aux quantités du second ordre.... $\delta r = dr + rdv^2$. Enfin, substituant ces valeurs de δv et δr dans celles de $o\mu$ et on, on obtient

$$o\mu = rd^2v - 2drdv, \quad on = rdv^2 - d^2r,$$

et les équations du mouvement deviennent

$$rdv^2 - d^2r = \Sigma dt^2, \quad rd^2v + 2drdv = \Pi dt^2.$$

Clairaut avait déjà obtenu (*Mém. de Par.*, 1742, p. 24) les valeurs précédentes de δv et δr à l'aide des triangles semblables, en y appliquant les principes du calcul des infinimens petits; il montra ensuite comment on parvenait de là aux équations du mouvement, dans les *Mém. de Par.* pour 1748, p. 434, et dans sa *Théorie de la Lune*, p. 2.

§ 2. *Équation différentielle de l'orbite, employée par d'Alembert.*

Cherchons d'abord l'équation de l'orbite Al décrite en vertu de la force centrale Q dirigée vers T. Soit A le point de départ du mobile, g sa vitesse en ce point, et soit pris pour unité le rayon vecteur initial AT, supposé perpendiculaire à l'élément de la courbe; soient s l'arc Al décrit dans le temps t, z l'angle ATl correspondant, x le rayon vecteur Tl, v la vitesse au point l; Fig. 5.

L'équation des aires donne $x^2dz = gdt$, et celle des forces vives $v^2 = g^2 - 2\int Qdx$; et comme $v = \frac{ds}{dt}$, $ds = \sqrt{dx^2 + x^2dz^2}$; on tire de là $dt = \sqrt{\frac{dx^2 + x^2dz^2}{g^2 - 2\int Q\,dx}}$; et en substituant cette valeur de dt dans la première équation,

$$dz = \pm \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - 2\int\frac{Qdx}{g^2} - \frac{1}{x^2}}}:$$

la force Q tendant à diminuer le rayon vecteur, il faut prendre le signe —.

Soit $\frac{1}{x} = u$: on a $du^2 = dz^2\left(1 + 2\int\frac{Qdu}{u^2g^2} - u^2\right)$; équation qui devient, en la différenciant et en regardant dz comme variable indépendante,

$$d^2u + udz^2 = \frac{Qdz^2}{u^2g^2}.$$

Considérons maintenant l'orbite comme engendrée par l'action des forces ψ et π, la première dirigée suivant le rayon vecteur, la seconde perpendiculaire à ce rayon; les aires deviendront variables en vertu de la dernière; et comme l'espace qu'elle fait parcourir est d^2s ou πdt^2, dans l'élément dt du temps, la variation de l'aire sera le petit secteur $\frac{x}{2}\,.\,\pi dt^2$, et l'on aura $d.x^2dz = \pi x dt^2$; équation qui, étant développée, revient au même que la seconde du § précédent. Elle donne, en la multipliant par $2x^2dz$,

$$\frac{d\,(x^2dz)^2}{dt^2} = 2\pi x^3dz, \quad \text{et en intégrant,} \quad \left(\frac{x^2dz}{dt}\right)^2 = c + 2\int\pi x^3dz;$$

et comme quand $\pi = 0$, on a $\frac{x^2 dz}{dt} = g$, il s'ensuit $c = g^2$, d'où l'on tire

$$dt = \frac{x^2 dz}{\sqrt{g^2 + 2\int \pi x^3 dz}}.$$

Décomposons la force π qui agit suivant $l\lambda'$ dans les deux directions lo', $l\lambda$; la composante suivante lo', qui agit en sens contraire de la force centrale, sera $-\frac{lo}{l\lambda}\pi = -\frac{\pi dx}{x dz}$; et si on la retranche de la force ψ, on aura la composante suivant le rayon vecteur, ou la force centrale dans ce second cas.

Pour exprimer qu'elle fera parcourir le même espace que la force Q, il faut égaler entre eux les produits des forces respectives par le carré des temps correspondans dans les deux cas. La valeur de l'élément du temps est $\frac{x^2 dz}{g}$ dans la supposition de la force unique. Nous venons de trouver son expression dans le cas des deux forces, et on obtiendra, par la comparaison,

$$Q = \left(\psi + \frac{\pi dx}{x dz}\right)\left(1 + 2\int \frac{\pi x^3 dz}{g^2}\right)^{-1};$$

valeur dont la substitution dans l'équation primitive de l'orbite donne, en y faisant $\frac{1}{x} = u$,

$$d^2u + u dz^2 - \frac{dz^2}{u^2 g^2}\left(\psi - \frac{\pi du}{u dz}\right)\left(1 + 2\int \frac{\pi dz}{u^3 g^2}\right)^{-1} = 0.$$ (Voy. *Rech.*, t. I, p. 16.)

§ 3. *Équations du mouvement trouvées par Euler et Mayer, d'après la considération des coordonnées rectangulaires.*

Fig. 6. Soit, comme dans le § 1er, M le mobile, T le centre fixe auquel on le rapporte, v l'angle MTB décrit au bout du temps t, TM $= r$; désignons de plus par x et y les coordonnées rectangulaires Tp et Mp du mobile rapportées au centre T, on aura $x = r\cos v$, $y = r\sin v$, d'où l'on tire,

$$\left\{\begin{aligned} d^2x &= d^2r\cos v - 2drdv\sin v - rdv^2\cos v - rd^2v\sin v \\ d^2y &= d^2r\sin v + 2drdv\cos v - rdv^2\sin v + rd^2v\cos v \end{aligned}\right\}.$$

Décomposons chacune des deux forces Σ et Π, qui agissent sur le mobile, la première suivant MT, la seconde suivant SS', en deux autres dirigées suivant les axes des x et des y, en prenant avec le signe $-$ les composantes qui tendent à diminuer les coordonnées; puis égalons la somme des composantes parallèles à chaque axe aux expressions générales des forces accélératrices correspondantes.

Nous aurons, quand la force Π sera dirigée suivant MS, ou dans le sens du mouvement, les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\Sigma\cos v - \Pi\sin v \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\Sigma\sin v + \Pi\cos v \end{aligned}\right\} \text{ qui donnent par l'élimination } \left\{\begin{aligned} -\Sigma &= \frac{d^2x}{dt^2}\cos v + \frac{d^2y}{dt^2}\sin v; \\ \Pi &= \frac{d^2y}{dt^2}\cos v - \frac{d^2x}{dt^2}\sin v; \end{aligned}\right.$$

et en mettant à la place de d^2x, d^2y, leurs valeurs en coordonnées polaires,

$$rdv^2 - d^2r = \Sigma dt^2, \quad rd^2v + 2drdv = \Pi dt^2;$$ équations employées par Clairaut.

Quand la force Π est dirigée suivant MS', ou en sens contraire du mouvement, l'on doit la faire précéder du signe —, ce qui donne

$$d^2r - rdv^2 = -\Sigma dt^2, \quad 2drdv + rd^2v = -\Pi dt^2;$$

équations de même forme que celles employées par Euler et Mayer.

Lorsque l'angle v est obtus, et que les forces Σ et Π ne changent pas de direction par rapport à celle du mouvement de M, les équations ne changent pas non plus.

Ainsi dans le cas de la figure 7, par exemple, où la force Π tend à accélérer le mouvement, les équations primitives seront: Fig. 7.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\Sigma\cos(180^\circ - v) + \Pi\cos(v - 90^\circ) = \quad \Sigma\cos v + \Pi\sin v;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\Sigma\sin(180^\circ - v) - \Pi\sin(v - 90^\circ) = -\Sigma\sin v + \Pi\cos v;$$

on aura $\quad x = r\cos(180^\circ - v) = -r\cos v, \quad y = r\sin(180^\circ - v) = r\sin v,$

et les équations définitives seront les mêmes que celles que nous avons trouvées dans le même cas, l'angle v étant aigu.

Lagrange indique, dans sa pièce sur les *Inégalités de Jupiter*, p. 7, une manière bien simple d'arriver à la première des équations du mouvement. Pour avoir (dit-il) la véritable force qui fait parcourir l'espace $-\frac{d^2r}{dt^2}$, il faut retrancher de la force Σ la force centrifuge produite par la vitesse circulatoire du corps. Cette dernière force étant $= \frac{rdv^2}{dt^2}$, cela donne immédiatement l'équation $\quad rdv^2 - d^2r = \Sigma dt^2$.

Enfin M. Laplace parvient directement à ces équations (*Mém. de Par.*, 1772, 2e part., pag. 319), au moyen de celles en coordonnées rectangulaires, en supposant que la direction de l'axe des x coïncide avec celle du rayon vecteur r, et en faisant $v = 0$ dans les valeurs de d^2x et d^2y.

NOTE III.

Intégration de l'équation différentielle de l'orbite troublée, donnée par Clairaut (Th. L., p. 5).

Les deux équations fondamentales du mouvement, données par Clairaut, sont, d'après la note II, § 1,

$$\frac{rdv^2 - d^2r}{dt^2} = \Sigma, \quad \frac{rd^2v + 2drdv}{dt^2} = \Pi.$$

La seconde donne, en la multipliant par $2r^3dv$ et en intégrant, $\frac{r^4dv^2}{dt^2} = f^2 + 2\int\Pi r^3dv$, f étant une constante arbitraire; d'où l'on tire $dt = \frac{r^2dv}{\sqrt{f^2 + 2\int\Pi r^3dv}}$, et en différenciant la valeur qui en résulte pour $\left(\frac{1}{dt}\right)^2$, dans la supposition de dv constant et de dt variable,

$$\frac{1}{dt}d \cdot \frac{1}{dt} = \frac{\Pi}{rdv} - \frac{2dr}{r^5dv^2}(f^2 + 2\int\Pi r^3dv);$$

or, la 1re équation du mouvement devient, lorsqu'on y substitue $\frac{1}{dt}d \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr}{dt}d \cdot \frac{1}{dt}$ au lieu de $\frac{d^2r}{dt^2}$, pour la dégager de la supposition de dt constant, et qu'on y met pour

dt et $d.\frac{1}{dt}$ les valeurs précédentes, en la multipliant de plus par r^4 :

$$\left\{\frac{1}{r}-\frac{d^2r}{r^2dv^2}+\frac{2dr^2}{r^3dv^2}\right\}(f^2+2\int \Pi r^3dv)-\frac{\Pi rdr}{dv}=\Sigma r^2;$$

elle se réduit, en y faisant $\int\frac{\Pi r^3dv}{f^2}=\rho$, $\Sigma=\frac{M}{r^2}+\Phi$, à la suivante:

$$\left\{\frac{1}{r}+\frac{d^2.\frac{1}{r}}{dv^2}\right\}\frac{f^2}{M}=\frac{1}{1+2\rho}\left(1+\frac{\Phi r^2}{M}+\frac{\Pi rdr}{Mdv}\right);$$

et le second membre devenant $1+\Omega$ lorsqu'on suppose $\Omega=\frac{1}{1+2\rho}\left(\frac{\Phi r^2}{M}+\frac{\Pi rdr}{Mdv}-2\rho\right)$, si l'on fait encore, dans le premier membre, $1-\frac{f^2}{Mr}=s$, l'équation prendra la forme très simple............ $s+\frac{d^2s}{dv^2}+\Omega=0.$

Il ne s'agit plus maintenant que d'intégrer. Pour y parvenir, Clairaut multiplie l'équation par $dv\cos v$, ce qui rend intégrables ses deux premiers termes. Il multiplie cette première intégrale par $\frac{dv}{\cos^2 v}$, et l'intègre de nouveau, ce qui lui donne l'équation cherchée. On peut y parvenir facilement aussi en suivant la méthode de la variation des constantes arbitraires. On voit en effet qu'en mettant pour s les valeurs $\sin v$ et $\cos v$, on satisfait aux deux premiers termes. Soit donc $s=p\sin v+q\cos v$; p et q étant des indéterminées, on a

$$ds=pdv\cos v-qdv\sin v+dp\sin v+dq\cos v.$$

Mais comme on peut disposer de l'une des deux indéterminées, soit

$$(1).....dp\sin v+dq\cos v=0;$$

on aura

$$\frac{d^2s}{dv^2}=\frac{dp}{dv}\cos v-\frac{dq}{dv}\sin v-(p\sin v+q\cos v);$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation différentielle, elle se réduira à

$$(2).....dp\cos v-dq\sin v+\Omega dv=0.$$

On tire ensuite des deux équations (1) et (2), par l'élimination, $\left\{\begin{array}{l}dp+\Omega dv\cos v=0\\ dq-\Omega dv\sin v=0\end{array}\right\}$; ce qui donne, en intégrant, $p=g-\int\Omega dv\cos v$, $q=c+\int\Omega dv\sin v$, c et g étant deux constantes arbitraires; et de là,

$$s=g\sin v+c\cos v-\sin v\int\Omega dv\cos v+\cos v\int\Omega dv\sin v,$$

ou en remettant pour s sa valeur, et en faisant $\frac{f^2}{M}=p$,

$$\frac{p}{r}=1-g\sin v-c\cos v+\sin v\int\Omega dv\cos v-\cos v\int\Omega dv\sin v.$$

Désignons la somme des deux derniers termes par Δ; lorsque $\Omega=\cos mv$, on aura

$$\Delta=\sin v\int\cos mv\cos v.dv-\cos v\int\cos mv\sin v.dv;$$



et il s'agit d'intégrer de manière que les deux termes s'évanouissent avec v. Or, on a

$$\begin{aligned}\int \cos mv \cos v.dv &= \tfrac{1}{2}\int[\cos(m+1)v+\cos(m-1)v]\,dv \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sin(m+1)v}{m+1}+\frac{\sin(m-1)v}{m-1}\right\}, \\ \int \cos mv \sin v.dv &= \tfrac{1}{2}\int[\sin(m+1)v-\sin(m-1)v]\,dv \\ &= -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos(m+1)v}{m+1}-\frac{\cos(m-1)v}{m-1}\right\}+k.\end{aligned}$$

La première intégrale se détruisant quand $v=0$, n'a pas besoin de constante ; la seconde donne, lorsque $v=0$, $0=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m-1}\right\}+k$; d'où l'on tire $k=-\frac{1}{m^2-1}$. Si l'on rassemble ensuite ces deux termes, on obtient

$$\Delta=\frac{\sin v\sin(m+1)v+\cos v\cos(m+1)v}{2(m+1)}+\frac{\sin v\sin(m-1)v-\cos v\cos(m-1)v}{2(m-1)}+\frac{\cos v}{m^2-1}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cos mv\left\{\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m-1}\right\}+\frac{\cos v}{m^2-1}=\frac{\cos v-\cos mv}{m^2-1}.$$

Quand $m=1$, $\Delta=\frac{0}{0}$; mais pour avoir sa vraie valeur, prenons au numérateur et au dénominateur, les fonctions dérivées par rapport à m, et faisons ensuite $m=1$; nous aurons alors $\Delta=\frac{1}{2}v\sin v$, ce qui produira, dans l'équation de l'orbite, des arcs de cercle hors des signes périodiques.

Soit $\Omega=A\cos mv+B\cos nv+$ etc. Chaque terme en fera naître dans l'intégrale d'autres de la même forme que ceux que nous avons trouvés pour le cas d'un seul considéré isolément; l'équation générale de l'orbite troublée sera par conséquent, en faisant $g=0$, parce qu'il suffit d'avoir pris en considération deux constantes c et k,

$$\frac{p}{r}=1-\left\{c-\frac{A}{m^2-1}-\frac{B}{n^2-1}-\text{etc.}\right\}\cos v-\frac{A\cos mv}{m^2-1}-\frac{B\cos nv}{n^2-1}-\text{etc.}$$

NOTE IV.

Recherche des forces que produit l'attraction d'un corps sur le système de deux autres corps dont l'un tourne autour de l'autre.

§ 1. *Construction de Newton pour déterminer les forces perturbatrices du Soleil sur la Lune* (Princ., liv. 3, prop. 25 et 26).

Soit S le Soleil, P la Lune, T la Terre. Si l'on représente par les lignes ST et SL l'attraction du Soleil sur la Terre et sur la Lune, ces deux lignes seront entre elles en raison inverse du carré des distances de la Terre et de la Lune au Soleil; on aura donc, en faisant SK = ST, la proportion Fig. 8.

$$SK : SL = \frac{1}{SK^2} : \frac{1}{SP^2},\quad \text{d'où l'on tire}\quad SK^3 = SL \times SP^2;$$

ou, en mettant $\begin{cases}SP+PL\\SP+PK\end{cases}$ au lieu de $\begin{cases}SL\\SK\end{cases}$, et en négligeant les puissances de PK supérieures à la première, PL = 3PK.

Or, la force SL se décompose suivant les lignes SM et LM, celle-ci parallèle à PT, en deux autres forces, dont la première donne, lorsqu'on en retranche la force ST du Soleil sur la Terre, TM pour la force perturbatrice de la Lune dans son mouvement relatif suivant cette direction; et comme dans la nature, les lignes SP, ST sont fort près d'être parallèles, à cause de la grande distance du Soleil, la force TM est, à très peu de chose près, égale à PL ou à 3PK. Dans les syzygies, PK étant égal à PT, qui représente la force ML dans sa valeur moyenne, on voit que la force TM est alors triple de la force centrale PT produite par l'action du Soleil, et que l'on a TM — ML = 2PK pour l'expression de la force perturbatrice qui tend à éloigner la Lune de la Terre.

Fig. 9. Si l'on suppose les deux lignes PL, TM parallèles, et qu'on mène la résultante TL des deux forces TM et ML, puis qu'on décompose TL suivant le prolongement TE du rayon vecteur et sa perpendiculaire EL; EL représentera la force qui est dirigée suivant la tangente à la trajectoire au point P, et qui tend à accélérer la vitesse du mobile.

Or, on a $EL = PL \sin P$; ou, en observant que $\sin P = \frac{TK}{TP}$ et que $PL = 3PK$,

$$EL = \frac{3PK \cdot TK}{TP}.$$

Dans les octans, où l'angle PTK est de 45°, si l'on abaisse la perpendiculaire Kd sur PT, on aura $Kd = Pd = \frac{1}{2} PT$; les triangles semblables PKd, PLE donneront $Kd = \frac{1}{3} EL$; d'où l'on tire $EL = \frac{3}{2} PT$ pour l'expression de la force tangentielle dans les octans, en fonction de la force centrale moyenne produite par l'action du Soleil.

§ 2. *Recherche des forces perturbatrices* Φ *et* Π *qui agissent sur la Lune dans le plan de son orbite, d'après Clairaut* (Th. L., p. 17 et 38).

Fig. 10. Soit N la masse du Soleil situé en S; soient T la Terre, L la Lune, et M la somme de leurs masses. Faisons $LT = r$, $ST = l$, $SL = s$, $STL = T$.

D'après la théorie de l'attraction,

le Soleil attire la Lune avec une force $\frac{N}{s^2}$, dirigée suivant LS,

Terre............ $\frac{N}{l^2}$ .... TS;

et comme l'on peut décomposer une force en deux autres, proportionnelles aux côtés du parallélogramme dont la diagonale est sur sa direction,

la force $\frac{N}{s^2}$ pourra être remplacée par les deux forces $\left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{s^2} \cdot \frac{r}{s}, \text{ suivant LT} \\ \frac{N}{s^2} \cdot \frac{l}{s}, \text{ suivant } Lq, \text{ parallèle à TS} \end{array} \right\}$;

la force $\frac{N}{l^2}$ devra, lorsqu'on suppose la Terre immobile, être appliquée à la Lune en sens contraire de sa direction.

Les forces perturbatrices seront donc $\frac{Nr}{s^3}$, suivant LT; $N\left(\frac{l}{s^3} - \frac{1}{l^2}\right)$, suivant Lq.

Première approximation.

Supposons d'abord les trois corps dans le même plan, et abaissons la perpendiculaire

Lp sur ST; on peut, vu la petitesse du rapport $\frac{r}{l}$, qui est environ $\frac{1}{400}$, en négliger le carré; et comme l'angle LST n'est que d'environ $8' \frac{1}{2}$ dans son *maximum* aux quadratures (puisque la parallaxe du Soleil, ou le rayon de la Terre vu du Soleil, est de $8'' \frac{1}{2}$, et que le rayon de l'orbite lunaire est environ 60 fois plus grand), supposons son cosinus égal à 1, et par conséquent $SL = Sp$.

Nous aurons $SL = s = l - r \cos T$, $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{l^3} + \frac{3r \cos T}{l^4}$ — etc., ce qui réduit la force suivant LT, à $\frac{Nr}{l^3}$, et celle suivant Lq, à $\frac{3Nr \cos T}{l^3}$.

Pour avoir la force totale Φ, que le Soleil produit dans la direction de LT, il faut retrancher de la première, la composante de la seconde, dirigée suivant le prolongement Lt de ce rayon; celle-ci ayant pour expression $\frac{3Nr \cos T}{l^3} \cos T = \frac{3}{2} \frac{Nr}{l^3}(1 + \cos 2T)$, on a

$$\Phi = \frac{Nr}{l^3}(1 - 3\cos^2 T) = -\frac{Nr}{2l^3}(1 + 3\cos 2T).$$

On obtiendra aussi la force Π qui agit dans le sens Lh du mouvement de la Lune, perpendiculairement à LT, en décomposant la force qui agit dans la direction de Lq, suivant le prolongement Lh' de Lh, ou en la multipliant par sin T, et en prenant cette composante avec un signe contraire; ce qui donnera $\Pi = -\frac{3Nr}{2l^3} \sin 2T$.

La force Φ est celle dont l'effet tend à augmenter ou à diminuer la force centrale de la Terre sur la Lune.

Dans les $\begin{cases}\text{syzygies} \\ \text{quadratures}\end{cases}$ on a $\begin{cases}T = 0 \text{ ou } T = 180° \\ T = 90° \text{ ou } T = 270°\end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases}\Phi = -\frac{2Nr}{l^3} \\ \Phi = \frac{Nr}{l^3}.\end{cases}$

Ainsi l'attraction de la Terre sur la Lune est augmentée, dans les quadratures, par l'action du Soleil, de la moitié de ce dont elle est diminuée dans les syzygies.

L'expression $\Phi = \frac{Nr}{l^3}(1 - 3\cos^2 T)$ montre aussi que l'action du Soleil, dans la direction du rayon vecteur qui va de la Lune à la Terre, est nulle aux points où l'on a $\cos T = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire dans les quatre positions de la Lune, situées à angle droit, où l'angle T est de 54° 44′, 360° + T, 180° + T et 180° — T, et où la Lune est par conséquent plus près des quadratures que des syzygies.

La partie $-\frac{Nr}{2l^3}$ de la valeur de Φ, qui est indépendante des fonctions périodiques de T, représente l'action moyenne du Soleil sur la Lune; car l'autre terme étant multiplié par cos 2T, qui, pendant que la Lune se meut, prend toutes les valeurs possibles, depuis 1 à — 1, a zéro pour valeur moyenne. Or, d'après la loi d'Huyghens, les forces centrales de deux corps qui décrivent des orbites circulaires sont entre elles comme les rayons de ces orbites divisés par les carrés des temps périodiques. Soit donc $n = \frac{1}{13,4}$ le rapport des temps périodiques de la Terre autour du Soleil et de la Lune autour de

la Terre, on aura la proportion

$$\frac{M}{r^2}:\frac{N}{l^2}=r:ln^2,\quad\text{qui donne}\quad\frac{Nr}{l^3}=n^2.\frac{M}{r^2};\quad\text{d'où}\quad-\frac{Nr}{2l^3}=-\frac{1}{358}\cdot\frac{M}{r^2}.$$

Ainsi l'action moyenne du Soleil diminue de $\frac{1}{358}$ l'attraction de la Terre sur la Lune.

On voit que cette diminution d'attraction doit augmenter la distance de la Lune à la Terre. Si l'on désigne donc par $r_,$ la distance à laquelle la Lune serait sans l'action du Soleil, et qu'on suppose $r=r_,(1+\delta)$, le rapport δ de l'accroissement est positif. L'équation des aires subsiste, lors même que la pesanteur diminue, puisque cette diminution s'exerce dans la direction du rayon vecteur. Si donc on désigne par $v_,$ la vitesse angulaire de la Lune sans l'action du Soleil, par v la vitesse lorsque cette action a lieu, on aura également

$$r_,^2v_,=c \text{ et } r^2v=c,\quad\text{ce qui donne, en comparant,}\quad r_,^2v_,=r_,^2(1+\delta)^2v;$$

d'où l'on tire
$$v=\frac{v_,}{(1+\delta)^2}=v_,(1-2\delta),$$

en négligeant le carré de la très petite quantité δ. Ainsi la vitesse angulaire de la Lune sera diminuée par l'action moyenne du Soleil, dans un rapport double de celui de l'augmentation du rayon vecteur.

Il nous reste à déterminer la valeur de δ. Pour y parvenir, égalons la force centrifuge de la Lune, ou le produit du rayon par le carré de la vitesse, à la pesanteur de la Lune, diminuée par l'action du Soleil; nous aurons, en faisant $\frac{1}{358}=\alpha$, l'équation

$$rv^2=\frac{M(1-\alpha)}{r^2};$$

d'où l'on tire, en remettant pour r et v leurs valeurs :

$$r_,(1+\delta)^3\frac{v_,^2}{(1+\delta)^4}=\frac{M}{r_,^2}(1-\alpha)\quad\text{ou}\quad r_,v_,^2(1-\delta)=\frac{M}{r_,^2}(1-\alpha);$$

et comme l'on a, quand le Soleil n'agit pas, $r_,v_,^2=\frac{M}{r_,^2}$, l'équation précédente donne $1-\delta=1-\alpha$ ou $\delta=\alpha$. Ainsi l'action moyenne du Soleil augmente le rayon vecteur de la Lune de sa 358ᵉ partie, et diminue d'un 179ᵉ son mouvement angulaire.

Seconde approximation.

Considérons maintenant le cas de la nature où le plan de l'orbite de la Lune est incliné d'environ 5° au plan de l'écliptique, et cherchons la valeur des forces qui agissent dans le premier de ces deux plans.

Fig. 11. Soit S' la projection du Soleil sur l'orbite de la Lune. Faisons $S'T=l'$, $S'TL=T'$.

La force $N\left(\frac{l}{s^3}-\frac{1}{l^2}\right)$, qui agit sur la Lune parallèlement à TS, devra être réduite au plan de l'orbite, en la multipliant par $\cos S'TS=\frac{l'}{l}$, puis décomposée dans ce plan suivant LT et sa perpendiculaire, ce qui revient à multiplier le produit par $\cos T'$ et $\sin T'$. Retranchant ensuite la première composante de la première force perturbatrice qui agit déjà suivant LT, et prenant la seconde composante avec un signe contraire, on aura

$$\Phi=\frac{Nr}{s^3}-N\left(\frac{l}{s^3}-\frac{1}{l^2}\right)\frac{l'}{l}\cos T',\quad \Pi=-N\left(\frac{l}{s^3}-\frac{1}{l^2}\right)\frac{l'}{l}\sin T'.$$



Soit menée la ligne des nœuds $\Omega T n$ de l'orbite lunaire, et supposons la Lune et le Soleil partis en même temps du nœud ascendant Ω. Abaissons sur cette ligne les perpendiculaires $S'\Omega$, $S\Omega$, et faisons $\cos S'\Omega S = 1 - \psi$, $LT\Omega - ST\Omega = T$, $ST\Omega = u$, $S'T\Omega = u'$.

Il s'agit maintenant d'éliminer l', s et T' des expressions de Φ et de Π, afin de les réduire à des fonctions de N, u, T, ψ, l et r.

Le triangle LTS nous donne $s^2 = l^2 + r^2 - 2lr \cos STL$; mais les triangles LTS, LTS' ayant le côté LT commun, donnent les deux valeurs égales

$$l \cos STL = l' \cos T', \quad \text{d'où l'on tire} \quad s^2 = l^2 + r^2 - 2l'r \cos T',$$

et de là, en négligeant le cube et les puissances supérieures du rapport des distances $\frac{r}{l}$:

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{l^3} - \frac{3r^2}{2l^5} + \frac{3r}{l^4} \cdot \frac{l' \cos T'}{l} + \frac{15r^2}{2l^5}\left(\frac{l' \cos T'}{l}\right)^2,$$

$$\Phi = \quad N\left\{\frac{r}{l^3} + \frac{9r^2}{2l^4} \cdot \frac{l' \cos T'}{l} - \frac{3r}{l^3}\left(\frac{l' \cos T'}{l}\right)^2 - \frac{15r^2}{2l^4}\left(\frac{l' \cos T'}{l}\right)^3\right\},$$

$$\Pi = -N\left\{\frac{3r}{l^3} \cdot \frac{l' \cos T'}{l} \cdot \frac{l' \sin T'}{l} - \frac{3r^2}{2l^4} \cdot \frac{l' \sin T'}{l} + \frac{15r^2}{2l^4}\left(\frac{l' \cos T'}{l}\right)^2 \cdot \frac{l' \sin T'}{l}\right\}.$$

Mais $T' = T + u - u'$, ce qui donne $\begin{cases} \sin T' = \sin T \cos(u - u') + \cos T \sin(u - u') \\ \cos T' = \cos T \cos(u - u') - \sin T \sin(u - u'). \end{cases}$

Les triangles $S'T\Omega$, $ST\Omega$ donnent chacun pour $T\Omega$, $l' \cos u' = l \cos u$. On a aussi

$$S'\Omega = S\Omega \cos S\Omega S' \quad \text{ou} \quad l' \sin u' = (1 - \psi)\, l \sin u.$$

On tire de là,

$$\cos(u - u') = \frac{l}{l'}\left[1 - \tfrac{1}{2}\psi(1 - \cos 2u)\right], \quad \sin(u - u') = \frac{l\psi \sin 2u}{2l'},$$

$$\frac{l' \sin T'}{l} = (1 - \tfrac{1}{2}\psi) \sin T + \frac{\psi}{2} \sin(2u + T), \quad \frac{l' \cos T'}{l} = (1 - \tfrac{1}{2}\psi) \cos T + \frac{\psi}{2} \cos(2u + T).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans celles de Φ et de Π, en négligeant les termes affectés de ψ^3, et les produits de $\frac{\psi r^2}{l^4}$ et $\frac{\psi^2 r}{l^3}$ par les sinus et cosinus des angles $2u + T$, $4u + 2T$, $2u - T$, $2u + 3T$, on aura, en faisant pour abréger,

$$h = 1 - \psi + \frac{\psi^2}{4}, \quad h' = 1 - 3\psi + \frac{3\psi^2}{2}; \quad q = 1 - \frac{11\psi}{2}, \quad q' = 1 - \frac{3\psi}{2}, \quad \psi' = \psi(1 - \tfrac{1}{2}\psi),$$

les expressions suivantes des forces perturbatrices dans le plan de l'orbite :

$$\Phi = -\frac{Nr}{2l^3}(h' + 3h \cos 2T) - \frac{3N\psi' r}{2l^3}\left[\cos(2u + 2T) + \cos 2u\right] - \frac{3Nr^2}{8l^4}(3q \cos T + 5q' \cos 3T),$$

$$\Pi = -\frac{3Nr}{2l^3} h \sin 2T - \frac{3N\psi' r}{2l^3} \sin(2u + 2T) - \frac{3Nr^2}{8l^4}(q \sin T + 5q' \sin 3T).$$

§ 3. *Estimation de toutes les forces qui agissent sur la Lune, projetées sur le plan de l'écliptique, d'après d'Alembert* (Rech., t. I, p. 7, 17 et 52).

Soit toujours S le Soleil, T la Terre, et P la Lune; la figure étant faite de manière Fig. 12 que l'angle STP soit obtus, et que le mouvement de la Lune tende à la rapprocher du Soleil.

Appelons, avec d'Alembert, S la masse du Soleil, T celle de la Terre, L celle de la Lune, B' le rayon ST de l'orbite terrestre; projetons la Lune sur l'écliptique, en abaissant la perpendiculaire Pp; menons la ligne des nœuds nN, et faisons

$$TP = r, \quad Tp = x, \quad SP = s, \quad pTn = V, \quad pTo = \theta, \quad \text{tang. inclin.} = m,$$

l'angle θ étant à peu près le supplément de l'angle T de Clairaut.

Les expressions générales des forces perturbatrices trouvées au commencement du § 2, sont alors

$$S.\frac{r}{s^3}, \text{ suivant PT}; \quad S.\left(\frac{B'}{s^3} - \frac{1}{B'^2}\right), \text{ suivant } pk \text{ parallèle à TS};$$

et il faut ajouter à la première la force principale $\frac{T+L}{r^2}$, ou l'attraction sur la Lune, de la Terre considérée comme fixe.

Si l'on prend la composante de cette somme qui agit suivant la ligne pT, en la multipliant par $\cos PTp = \frac{x}{r}$, et qu'on décompose ensuite la force qui agit parallèlement à TS (en la multipliant par $\cos\theta$ et $\sin\theta$) en deux autres, l'une suivant pT, et qui doit s'ajouter à la première somme pour exprimer la force ψ, l'autre suivant ph, perpendiculaire à pT, située dans le plan de l'écliptique, et dirigée dans le sens du mouvement de la Lune, cette dernière exprimera la force ϖ de d'Alembert, et l'on aura

$$\psi = \left(\frac{T+L}{r^3}\right)x + \frac{Sx}{s^3} + S\left(\frac{B'}{s^3} - \frac{1}{B'^2}\right)\cos\theta, \quad \varpi = S\left(\frac{B'}{s^3} - \frac{1}{B'^2}\right)\sin\theta.$$

Abaissons du point p la perpendiculaire pq sur la ligne des nœuds, nous aurons

$$pq = x\sin V, \quad Pp = m.x\sin V, \quad r = x\sqrt{1 + m^2\sin^2 V},$$
$$Sp^2 = B'^2 + 2B'x\cos\theta + x^2, \quad s^2 = B'^2 + 2B'x\cos\theta + x^2 + m^2x^2\sin^2 V.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, on obtient

$$\psi = \frac{(T+L)}{x^2(1+m^2\sin^2 V)^{\frac{3}{2}}} + \frac{S.x}{(B'^2 + 2B'x\cos\theta + x^2 + m^2x^2\sin^2 V)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ S.\left\{\frac{B'}{(B'^2 + 2B'x\cos\theta + x^2 + m^2x^2\sin^2 V)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{B'^2}\right\}\cos\theta;$$
$$\varpi = S.\left\{\frac{B'}{(B'^2 + 2B'x\cos\theta + x^2 + m^2x^2\sin^2 V)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{B'^2}\right\}\sin\theta,$$

ou en développant les dénominateurs polynomes et irrationnels, et en négligeant, ainsi que le fait d'Alembert, les termes en m^4, $\frac{x^3}{B'^3}$, $\frac{m^2x^2}{B'^4}$, $\frac{m^2x^3}{B'^5}$, etc.,

$$\psi = \frac{T+L}{x^2}\left(1 - \tfrac{3}{2}m^2\sin^2 V\right) + S\left(\frac{x}{B'^3} - \frac{3x\cos^2\theta}{B'^3} - \frac{9x^2\cos\theta}{2B'^4} + \frac{15x^2\cos^3\theta}{2B'^4}\right),$$
$$\varpi = -3S\sin\theta\left(\frac{x\cos\theta}{B'^3} + \frac{3x^2}{2B'^4}\left[1 - 5\cos^2\theta\right]\right),$$



d'où l'on tire, en faisant $x = \frac{1}{u}$, $V = z - \zeta$, $\theta = z - z'$, et en n'ayant égard qu'aux deux premiers multiples de ces angles, les expressions

$$\psi = (T+L)u^2\{1 - \tfrac{3}{4}m^2[1 - \cos 2(z-\zeta)]\} - \frac{S}{2uB'^3}[1 + 3\cos 2(z-z')] + \tfrac{9}{8}\frac{S.\cos(z-z')}{u^2B'^4},$$

$$\pi = -\frac{3S.\sin 2(z-z')}{2uB'^3} + \frac{3S.\sin(z-z')}{8u^2B'^4}.$$

§ 4. *Forces perturbatrices décomposées suivant trois axes rectangulaires, d'après Euler et Mayer.*

Supposons avec Euler, dans sa première Théorie de la Lune, que les lettres S, T, L désignent les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune placés en O, C et M, dans la même situation respective où les considère Clairaut. Fig. 13.

Abaissons de M la perpendiculaire Mm sur l'écliptique; menons les lignes MC, mC, MO, mO; hmh' perpendiculaire à mC; MO' parallèle à OC : prolongeons Cm en C'; abaissons la perpendiculaire OC' sur CmC', et faisons $m\text{CO} = \eta$, $m\text{C} = x$, $\text{OC} = y$, $\text{OM} = z$, $\text{MC}m = \psi$.

La Lune sera soumise, dans son mouvement relatif autour de la Terre regardée comme fixe, à l'action de trois forces, savoir :

$$\frac{T+L}{\overline{MC}^2}, \text{ suivant la ligne MC}; \quad \frac{S}{z^2}, \text{ suivant MO}; \quad \frac{S}{y^2}, \text{ suivant } mO'.$$

Les deux premières donnent, en les décomposant parallèlement et perpendiculairement au plan de l'écliptique,

$$\text{les composantes} \begin{cases} \dfrac{T+L}{\overline{MC}^2}\cos\psi, \text{ suivant } mC; & \dfrac{T+L}{\overline{MC}^2}\sin\psi, \text{ suivant } Mm; \\ \dfrac{S}{z^2}\cdot\dfrac{Om}{z}, \text{ suivant } mO; & \dfrac{S}{z^2}\cdot\dfrac{Mm}{z}, \text{ suivant } Mm, \end{cases}$$

dont l'avant-dernière, dirigée suivant mO, se décompose de nouveau en

$$\frac{S}{z^2}\cdot\frac{Om}{z}\cdot\frac{mC'}{Om}, \text{ suivant } mC', \quad \text{et en } \frac{S}{z^2}\cdot\frac{Om}{z}\cdot\frac{OC'}{Om}, \text{ suivant } mh.$$

Enfin la troisième force donne les deux composantes

$$\frac{S}{y^2}\cos\eta, \text{ suivant } mC; \quad \frac{S}{y^2}\sin\eta, \text{ suivant } mh'.$$

Mais on a

$$MC = \frac{x}{\cos\psi}, \quad Mm = x\tang\psi, \quad mC' = y\cos\eta - x, \quad OC' = y\sin\eta.$$

Si l'on désigne donc par P, Q, R les sommes des forces dirigées suivant mC, mh et Mm, et que l'on prenne avec le signe — celles qui sont dirigées en sens contraire, on aura

$$P = \frac{(T+L)\cos^3\psi}{x^2} + \frac{S.x}{z^3} + S\left(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{z^3}\right)\cos\eta, \quad Q = -S\left(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{z^3}\right)\sin\eta,$$

$$R = \frac{(T+L)\cos^2\psi\sin\psi}{x^2} + \frac{S.x\tang\psi}{z^3}.$$ (Voy. *Theoria motus Lunæ*, p. 20 et 21).

Si l'on remplace, dans ces expressions, les lettres x, y, z, ψ et ϖ par celles-ci : av; $\frac{ay}{\pi}$, $\frac{au}{\pi}$, l et ω, on obtient les valeurs des forces données par Mayer, pag. 4 de sa Théorie de la Lune. Si l'on désigne ensuite par X, Y, Z les produits respectifs de P, Q, R par la quantité $\frac{n^2a^2}{\pi^3(S+T)}$, qui est introduite dans les équations, par la substitution de la valeur de l'élément du temps en fonction de l'élément du moyen mouvement de la Lune, et qu'on fasse $\frac{n^2(T+L)}{\pi^3(S+T)}=g$, $u=\sqrt{y^2+\frac{v^2\pi^2}{\cos^2 l}-2yv\pi\cos\omega}$, en développant les valeurs de u et de ses puissances jusqu'à l'ordre π^4 inclusivement, on parviendra aisément aux expressions de X, Y, Z, telles que Mayer les a posées, pag. 6 de sa Théorie, et telles que nous les avons rapportées au bas de la page 67.

NOTE V.

Méthodes pour le retour des suites.

§ 1. *Démonstration du Théorème de Taylor, donnée par d'Alembert* (Rech., t. I, p. 50), *et application qu'il fait de ce théorème au développement des sinus et cosinus.*

Soit φz une fonction de la variable z, et ζ l'accroissement de cette variable.

$$\text{Supposons}\qquad \varphi(z+\zeta)=\varphi z+u.$$

Différencions cette équation en regardant z comme constante, u et ζ comme variables, et désignons par $d\zeta\varphi'(z+\zeta)$ ce qui devient alors $\varphi(z+\zeta)$.

Nous aurons $\quad d\zeta\varphi'(z+\zeta)=du$, $\quad$ et en intégrant, $u=\int d\zeta\varphi'(z+\zeta)$,
ce qui donne $\quad \varphi(z+\zeta)=\varphi z+\int d\zeta\varphi'(z+\zeta)$.
On aura de même $\quad \varphi'(z+\zeta)=\varphi' z+\int d\zeta\varphi''(z+\zeta)$,
$\quad \varphi''(z+\zeta)=\varphi'' z+\int d\zeta\varphi'''(z+\zeta)$, $\quad$ et ainsi de suite,
d'où l'on tire $\quad \varphi(z+\zeta)=\varphi z+\int d\zeta\varphi' z+\int d\zeta\int d\zeta\varphi'' z+\int d\zeta\int d\zeta\int d\zeta\varphi''' z+\text{etc.}$; puis en intégrant, par rapport à ζ seulement (de même qu'on n'a différencié que par rapport à ζ),

$$\varphi(z+\zeta)=\varphi z+\zeta\varphi' z+\frac{\zeta^2}{2}\varphi'' z+\frac{\zeta^3}{2.3}\varphi''' z+\text{etc.}$$

Lorsque φ désigne un sin. ou un cos., et que l'accroissement ζ de l'arc z est supposé très petit, la série précédente donne,

dans le premier cas, $\quad \sin(z+\zeta)=\sin z+\zeta\cos z-\frac{\zeta^2}{2}\sin z-\frac{\zeta^3}{2.3}\cos z+\text{etc.}$;

dans le second cas, $\quad \cos(z+\zeta)=\cos z-\zeta\sin z-\frac{\zeta^2}{2}\cos z+\frac{\zeta^3}{2.3}\sin z+\text{etc.}$

On peut aussi y arriver sans faire usage du calcul différentiel, en substituant dans les formules

$$\sin(z+\zeta)=\sin z\cos\zeta+\cos z\sin\zeta,\qquad \cos(z+\zeta)=\cos z\cos\zeta-\sin z\sin\zeta,$$

au lieu de $\cos\zeta$ et $\sin\zeta$, leurs développemens en fonction des puissances de ζ, que l'on trouve par la méthode des coefficiens indéterminés.

§ 2. *Démonstration des trois lemmes successifs posés par Clairaut* (Th. L., p. 59), *pour tirer de l'équation* $x = v + a \sin mv + b \sin pv + c \sin qv$ *le développement de* v *suivant les sinus des multiples de* x, *en supposant les coefficiens* b *et* c *du même ordre que* a, *et en poussant l'approximation jusqu'à leurs troisièmes dimensions.*

Premier cas. Soit d'abord l'équation $x = v + a \sin mv$, et supposons qu'on demande la valeur de v en fonction de x et des sinus de x et de ses multiples, jusqu'aux termes multipliés par a^3 inclusivement.

On a rigoureusement $v = x - a \sin mv$; quand $a = 0$, $v = x$, ce qui donne ensuite

$$v = x - a \sin mx \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Substituons cette valeur dans le terme $- a \sin mv$, elle donnera $v = x - a \sin m(x - a \sin mx)$, ou en développant, d'après le § 1, et en s'arrêtant aux a^2 .... $v = x - a \sin mx + \frac{a^2 m}{2} \sin 2mx \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$.

Substituons enfin cette seconde valeur sous le signe périodique, la première équation deviendra $v = x - a \sin m\left(x - a \sin mx + \frac{a^2 m}{2} \sin 2mx\right)$; et pour obtenir les termes en a^3, il suffira de considérer ceux en a^2 sous le signe sinus.

Or, l'on a, d'après le § précédent, $\sin m(x+h) = \sin mx + mh \cos mx - \frac{m^2 h^2}{2} \sin mx$.

Dans le cas actuel $h = -a \sin mx + \frac{a^2 m}{2} \sin 2mx$; les termes de l'ordre a^3 seront donc $-a\left(\frac{a^2 m^2}{2} \sin 2mx \cos mx - \frac{a^2 m^2 \sin^3 mx}{2}\right) = \frac{a^3 m^2}{8} (\sin mx - 3 \sin 3mx)$;
ce qui donne, en les ajoutant à la valeur précédente,

$$v = x - a\left(1 - \frac{a^2 m^2}{8}\right) \sin mx + \frac{a^2 m}{2} \sin 2mx - \frac{3a^3 m^2}{8} \sin 3mx \ldots\ldots (3)$$

pour l'expression cherchée.

Second cas. Si l'on introduit maintenant dans la valeur primitive de x le nouveau terme $b \sin pv$ de plus que les deux premiers, il est clair qu'étant de la même forme que $a \sin mv$, on obtiendra immédiatement une partie des termes qu'il produira dans v, en changeant a en b, m en p, dans la valeur définitive de v que nous venons d'obtenir. On calculera facilement ensuite les termes en ab et $a^2 b$ qu'il introduira aussi; et si l'on change, dans ces derniers, a en b, m en p, et réciproquement, on aura aussi ceux en ab^2, ce qui complétera la valeur de v dans ce second cas.

Troisième cas. Enfin, si l'on considère encore le nouveau terme $c \sin qv$, on aura immédiatement par l'expression précédente, à cause de la symétrie des lettres, les termes en c, c^2, c^3, ac, bc, $a^2 c$, ac^2, $b^2 c$, bc^2, qu'on introduira dans la valeur de v, et il ne restera plus à chercher que les termes en abc. Pour cet effet, on substituera dans $- a \sin mv$, au lieu de v, les termes de sa valeur qui sont multipliés par b, c et bc; puis développant le sinus composé, en s'arrêtant au troisième terme, on ne prendra que les termes en bc, qui, multipliés ensuite par le facteur $-a$, qui est en dehors, donneront une partie des termes en abc. On obtiendra ensuite immédiatement les deux autres parties, en changeant successivement, dans la première, les lettres m, p, q en p, q, m et q, m, p.

Il ne s'agira plus maintenant que de rassembler tous les résultats précédens pour avoir la valeur complète de v cherchée.

On voit que le principe de cette méthode est de calculer séparément les différens ordres de termes, et de profiter de la symétrie des termes pour déduire tous ceux qui ont la même forme d'un seul d'entre eux trouvé immédiatement. Sa marche est longue et compliquée, à cause des substitutions successives sur lesquelles elle s'appuie; son seul avantage est d'être indépendante du calcul différentiel.

Clairaut n'en donne pas les détails, mais il est facile d'y suppléer par ce qu'il dit ailleurs, p. 20 et 49 de sa *Théorie de la Lune*, et d'après l'exposition qu'en fait Lalande (*Mém. de Par.*, 1760, p. 325).

§ 3. *Application de la série de Lagrange à la même recherche.*

Le beau théorème de Lagrange, sur le développement des fonctions en séries, fournit un moyen plus général, plus simple et plus expéditif d'arriver immédiatement au résultat cherché, par un procédé où chacun des termes calculés contient à la fois tous ceux d'un même ordre.

On sait que lorsque $y=fx$, la série de Maclaurin donne

$$y=y_0+xy'_0+\frac{x^2}{2}y''_0+\frac{x^3}{2.3}y'''_0+\text{etc.},$$

$y_0\,y'_0\,y''_0$ étant ce que deviennent y, y', y'', etc., quand $x=0$.

Soit maintenant $y=\alpha+x\varphi y$, d'où l'on demande de tirer la valeur de y en fonction de α et de x; on a, en différenciant,

$$y'=\varphi y+xy'\varphi' y,\ y''=2y'\varphi' y+x(y''\varphi' y+y'^2\varphi'' y),\ y'''=3(y''\varphi' y+y'^2\varphi'' y)+x(\ldots),\ \text{etc.},$$

ce qui donne, quand $x=0$,

$$y_0=\alpha,\ y'_0=\varphi\alpha,\ y''_0=2\varphi\alpha\varphi'\alpha=(\varphi^2\alpha)',\ y'''_0=3[(\varphi^2\alpha)'\varphi'\alpha+\varphi^2\alpha\varphi''\alpha]=3(\varphi^2\alpha\varphi'\alpha)'=(\varphi^3\alpha)''.$$

Substituant ces valeurs dans la série ci-dessus, on obtient l'équation

$y=\alpha+x\varphi\alpha+\frac{x^2}{2}(\varphi^2\alpha)'+\frac{x^3}{2.3}(\varphi^3 a)''+$ etc., qui se réduit, lorsqu'on a $x=1$, à

$$y=\alpha+\varphi\alpha+\frac{(\varphi^2\alpha)'}{2}+\frac{(\varphi^3\alpha)''}{2.3}+\text{etc.}$$

Appliquons cette formule au cas actuel en comparant l'équation $y=\alpha+\varphi y$ avec celle-ci, $v=x-a\sin mv-b\sin pv-c\sin qv$, et en cherchant la valeur de v en x jusqu'aux a^3 inclusivement, b et c étant supposés du même ordre de petitesse que a. Nous aurons $y=v$, $\alpha=x$, $\varphi\alpha=-a\sin mx-b\sin px-c\sin qx$, et il faudra calculer les deux termes suivans $\frac{(\varphi^2\alpha)'}{2}$ et $\frac{(\varphi^3\alpha)''}{2.3}$; mais comme tout est symétrique par rapport à a,b,c,m,p,q, lorsqu'il se rencontrera plusieurs termes analogues, il suffira d'en calculer un seul, d'où l'on déduira facilement tous les autres. Nous pouvons d'après cela nous borner au calcul de ceux qui sont multipliés par a, a^2, a^3, ab, a^2b et abc.

Or, l'on a $\varphi^2\alpha=a^2\sin^2 mx+2ab\sin mx\sin px+$ etc., ou en changeant les puissances en multiples, $\varphi^2\alpha=\frac{a^2}{2}(1-\cos 2mx)+ab[\cos(m-p)x-\cos(m+p)x]+$ etc.

Si l'on prend la dérivée de cette équation et qu'on la divise par 2, on obtient

$$\frac{(\varphi^2\alpha)'}{2}=\frac{ma^2}{2}\sin 2mx-\frac{ab}{2}[(m-p)\sin(m-p)x-(m+p)\sin(m+p)x];$$



valeur à laquelle il faut ajouter deux termes en b et c semblables au premier, et deux groupes en ac et bc semblables au dernier.

On a de même

$$\begin{aligned}\varphi^3\alpha &= -a^3\sin^3 mx - 3a^2b\sin^2 mx\sin px - 6abc\sin mx\sin px\sin qx + \text{etc.}\\ &= \frac{a^3}{4}(\sin 3mx - 3\sin mx) - \frac{3}{2}a^2b\left[\sin px - \tfrac{1}{2}\sin(2m+p)x + \tfrac{1}{2}\sin(2m-p)x\right]\\ &\quad - \frac{3}{2}abc\left[\sin(m+p-q)x + \sin(m-p+q)x - \sin(m-p-q)x - \sin(m+p+q)x\right];\end{aligned}$$

ce qui donne, en prenant la dérivée du second ordre, c'est-à-dire en changeant les signes et en multipliant les coefficiens par le carré des multiples des sinus de x, puis en divisant cette dérivée par 6,

$$\begin{aligned}\frac{(\varphi^3\alpha)''}{2.3} &= -\frac{m^2a^3}{8}(3\sin 3mx - \sin mx)\\ &+\frac{a^2b}{4}\left[p^2\sin px - \frac{(2m+p)^2}{2}\sin(2m+p)x + \frac{(2m-p)^2}{2}\sin(2m-p)x\right]\\ &+\frac{abc}{4}\left[\begin{array}{l}(m+p-q)^2\sin(m+p-q)x + (m-p+q)^2\sin(m-p+q)x\\ -(m-p-q)^2\sin(m-p-q)x - (m+p+q)^2\sin(m+p+q)x\end{array}\right];\end{aligned}$$

expression à laquelle il faut ajouter deux groupes en b^3 et c^3 semblables aux premiers, et cinq groupes en ab^2, a^2c, ac^2, b^2c, bc^2 analogues au second. On voit ainsi *à priori* que le sinus de chaque angle doit avoir le carré du multiple de ce dernier en coefficient, tandis que par le premier procédé ce n'est qu'un résultat de calcul.

Les valeurs de $\left(\frac{\varphi^2\alpha}{2}\right)'\left(\frac{\varphi^3\alpha}{2.3}\right)''$ étant ainsi complétées, il ne reste plus qu'à les ajouter à celle de $\varphi\alpha$ pour parvenir, sans avoir de réduction à faire, au résultat final de Clairaut.

NOTE VI.

Recherche de la latitude, ou du mouvement de la ligne des nœuds, et de la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire.

§ 1. ***Méthode de Clairaut pour parvenir à l'expression différentielle du mouvement des nœuds, au moyen de la construction de Newton*** (Th. Lun., p. 67).

Supposons le Soleil en S, la Terre en T, la Lune en L, et soit Ll l'élément de la trajectoire que décrirait la Lune dans l'instant dt, si elle n'était attirée que par la Terre. Fig. 14. Faisons $LT = r$, $LTl = dv$, et représentons par $l\sigma$ le petit espace que l'action du Soleil fait décrire à la Lune, parallèlement à TS, dans l'élément du temps. En vertu de cette double attraction, la Lune parcourra l'espace $L\sigma$ dans l'instant dt; et si l'on prolonge les lignes Ll, $L\sigma$ jusqu'à ce qu'elles coupent en N et n le plan NTS de l'écliptique, la ligne NT☊ sera la ligne primitive des nœuds ; l'angle nTN ou dq marquera la quantité de son déplacement dans l'instant dt; la ligne Nn étant à la fois dans le plan NLn et dans le plan de l'écliptique, et ne pouvant rencontrer $l\sigma$, qui est parallèle à ce dernier plan, sera parallèle à $l\sigma$, et l'on aura nNT = ST☊.

Si l'on abaisse la perpendiculaire nR sur TN, on aura

$$\sin n\mathrm{TN} = \frac{n\mathrm{R}}{\mathrm{T}n} = \frac{n\mathrm{N}\sin \mathrm{ST}☊}{\mathrm{T}n}.$$



Mais les triangles semblables NLn, rLl donnent $nN = \frac{lr.\mathrm{LN}}{\mathrm{L}l}$; ainsi

$$\sin n\mathrm{TN} = lr.\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{T}n.\mathrm{L}l}\sin \mathrm{ST}\Omega;$$

d'où l'on tire, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$dq = n\mathrm{TN} = lr.\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{TN}.\mathrm{L}l}\sin \mathrm{ST}\Omega.$$

Or, $\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{TN}} = \frac{\sin \mathrm{LTN}}{\sin \mathrm{TLN}}$; et si du centre T, avec un rayon égal à r, on mène le petit arc de cercle Lp, qui se confond avec une ligne droite, on a

$$\mathrm{L}l = \frac{\mathrm{L}p}{\cos l\mathrm{L}p} = \frac{\mathrm{L}p}{\cos(\mathrm{TLN}-90^\circ)} = \frac{rdv}{\sin \mathrm{TLN}}:$$

on tire de là, en remarquant que LTN = 180° — LTΩ,

$$dq = \frac{lr}{rdv}.\sin \mathrm{ST}\Omega \sin \mathrm{LT}\Omega.$$

Mais l'espace élémentaire lr étant décrit en vertu de la composante de la force attractive du Soleil parallèle à ST, dont l'expression est $\frac{3\mathrm{N}r\cos \mathrm{STL}}{l^3}$, d'après la note IV, § 2, il sera donc représenté par le produit de cette force et du carré de l'élément du temps, et l'on aura

$$dq = \frac{3\mathrm{N}dt^2}{l^3dv}\cos \mathrm{STL}\sin \mathrm{ST}\Omega \sin \mathrm{LT}\Omega.$$

Clairaut suppose que le Soleil, la Lune et la ligne des nœuds soient partis en même temps d'un point B, d'où l'on a commencé à compter le temps, et qu'ils ont décrit au bout du temps t les angles finis BTL $= v$, BTS $= z$, BT$\Omega = q$. Il désigne par B′ et S′ les projections des points B et S sur le plan de l'orbite de la Lune, par $1 - \psi$ le cosinus de l'inclinaison actuelle de l'orbite, qu'il suppose constante, et fait S′T$\Omega = q'$. L'angle B′TL doit être en général, ainsi que l'a remarqué d'Alembert, différent de BTL ou de v, et l'on a, dans le triangle sphérique mené par les points L, B et Ω, la relation

$$\cos \mathrm{LT}\Omega = \cos q\cos v - (1-\psi)\sin q\sin v = \cos(v+q) + \psi\sin q\sin v.$$

L'angle q' diffère aussi de l'angle q, et l'on a généralement tang $q' = (1-\psi)$ tang q; ce qui donne, en prenant la tangente de la différence $q'-q$, et en substituant ensuite l'arc à la tangente,

$$q' = q + \tfrac{1}{2}\psi\sin 2q + \text{etc.}$$

Mais pour parvenir au résultat final de Clairaut, il suffit de faire LT$\Omega = v + q$, ST$\Omega = z + q$, et de prendre pour cos STL sa valeur trouvée note IV, § 2, en y faisant $u = z + q$, ce qui donne

$$\cos \mathrm{STL} = \cos(v-z) - \frac{\psi}{2}[\cos(v-z) - \cos(v+z+2q)].$$

On a alors

$$\sin \mathrm{ST}\Omega \sin \mathrm{LT}\Omega \cos \mathrm{STL}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos(v-z) - \cos(v+z+2q)]\left\{\cos(v-z) - \frac{\psi}{2}[\cos(v-z) - \cos(v+z+2q)]\right\};$$



où, en développant et réduisant,

$$=\tfrac{1}{4}(1-\psi)\,[1+\cos 2(v-z)-\cos 2(v+q)-\cos 2(z+q)]+\frac{\psi}{8}\cos 2(v-z),$$

en négligeant le cosinus de l'angle $2\,(v+z+2q)$.

Il ne s'agit plus que de multiplier le produit par $\frac{3Ndt^2}{l^3dv}$, en négligeant aussi le dernier terme à cause de sa petitesse, pour obtenir la valeur cherchée de dq; et comme, en appelant x le mouvement moyen de la Lune, K la distance moyenne, l'équation des aires devient, pour ce mouvement, $K^2dx=dt\sqrt{KM}$, on aura, en faisant $\frac{K^3N}{f^3M}=\alpha$,

$$dq=\tfrac{3}{4}\,\alpha\,(1-\psi)\,\frac{f^3dx^2}{l^3dv}\,[1+\cos 2(v-z)-\cos 2(v+q)-\cos 2(z+q)].$$

(*Voyez* les observations de d'Alembert, *Opuscules mathém.*, t. IV, 29ᵉ Mém., et t. V, 38ᵉ Mém., p. 298).

§ 2. *Méthode de d'Alembert pour trouver la variation de l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'écliptique* (Rech., t. 1, p. 20), *appliquée aussi à la recherche de la formule donnée par Clairaut* (Th. Lun., p. 81).

Soit L la Lune, l sa projection sur l'écliptique, Nn la ligne des nœuds au bout du temps t, N$'n'$ sa position dans l'instant suivant; abaissons sur ces lignes les perpendiculaires lR, lr, et faisons $NTN'=d\zeta$, $lTn=V$, $\frac{Ll}{lR}=m$; $\frac{Ll}{lr}$ sera égal à $m+dm$, et il s'agit de trouver l'expression de dm en fonction de V et de $d\zeta$. Or, nous avons Fig. 15.

$$lr=lT\sin lTr=lT\sin(lTR+d\zeta);$$

d'où l'on tire, en développant le sinus, et en se bornant aux deux premiers termes, ce qui est suffisant dans l'ordre que nous considérons,

$$lr=lT\sin lTR+d\zeta.lT\cos lTR=lR+d\zeta.RT,$$

$$\frac{Ll}{lr}=\frac{Ll}{lR}\left(1-d\zeta.\frac{RT}{lR}\right),\quad\text{et de là}\quad\frac{dm}{m}=-d\zeta.\frac{RT}{lR},$$

ou, en remarquant que $\frac{RT}{lR}=\cot lTR=-\cot V$,

$$\frac{dm}{m}=d\zeta.\cot V.$$

Cette valeur est précédée du signe + lors même que l'angle V est aigu, en supposant toujours que le mouvement de la Lune tende à accroître l'angle V, qui est compté à partir du nœud dont cet astre s'éloigne, et que le Soleil agisse dans le sens de ce mouvement.

Clairaut considérant l'orbite réelle au lieu de l'orbite relative, et supposant que le Soleil agisse en sens contraire du mouvement de la Lune, obtient aussi une valeur de signe contraire, et où le sinus de l'inclinaison I est substitué à la tangente, savoir : Fig. 14

$$\frac{dI}{\sin I}=-dq\cot LT\Omega;$$

elle devient, en remettant pour dq sa valeur précédente,

$$\frac{dI}{\sin I}=-3\alpha.\frac{f^3dx^2}{l^3dv}\cos STL\sin ST\Omega\cos LT\Omega.$$

Si l'on met ensuite pour les angles leurs valeurs, on aura

$$\cos STL \sin ST\Omega \cos LT\Omega = [\cos(v-z)(1-\tfrac{1}{2}\psi) + \tfrac{1}{2}\psi\cos(v+z+2q)]\sin(z+q)\cos(v+q).$$

ou, en développant et réduisant,

$$= -\tfrac{1}{4}[(1-\tfrac{1}{2}\psi)\sin 2(v-z) - \sin 2(z+q) - (1-\psi)\sin 2(v+q)];$$

ce qui donne, après l'omission des termes dont l'effet est presque insensible,

$$\frac{dI}{\sin I} = \tfrac{3}{4}\,n\,(1-\psi)\frac{f^3dx^2}{l^3dv}[\sin 2(v-z) - \sin 2(z+q) - \sin 2(v+q)].$$

Pour passer de la valeur de l'intégrale de cette quantité à celle de I, Clairaut fait $\int\frac{dI}{\sin I} = V + \log h$, h étant une constante; il développe $\frac{1}{\sin I}$ sous le signe $\int$, suivant les puissances de l'arc, en se bornant aux I^2, et obtient

$$V + \log h = \int dI\left(\frac{1}{I} + \tfrac{1}{6}I\right) = \log I + \tfrac{1}{12}I^2, \quad \text{d'où} \quad I = he^{V - \frac{1}{12}I^2},$$

e étant la base des logarithmes néperiens.

Appliquant ensuite le développement $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} +$ etc. au cas actuel, et se bornant aux V^2, il trouve

$$I = h[1 + V - \tfrac{1}{12}I^2 + \tfrac{1}{2}(V^2 - \tfrac{1}{6}I^2V)];$$

d'où il tire, en mettant pour I^2, dans le second membre, sa valeur approchée $h^2(1+2V)$,

$$I = h(1 - \tfrac{1}{12}h^2) + h(1 - \tfrac{1}{4}h^2)(V + \tfrac{1}{2}V^2).$$

Il est clair que V ne doit pas être confondu ici avec l'angle de la formule de d'Alembert.

§ 3. *Méthode analytique d'Euler pour obtenir les expressions différentielles du mouvement des nœuds π, et de la variation de l'inclinaison ρ de l'orbite lunaire* (1re Th. L., p. 13).

Nous avons déjà fait voir, note II, § 2, comment on arrivait aux deux premières équations du mouvement employées par Euler, qui ont lieu dans le plan de l'écliptique, savoir $d^2x - xd\varphi^2 = -\frac{1}{2}Pdt^2$, $2dxd\varphi + xd^2\varphi = -\frac{1}{2}Qdt^2$. (*Voyez* la remarque de la p. 128 au sujet du $\frac{1}{2}$.)

La troisième s'obtient en considérant que la distance de la Lune à sa projection ayant pour expression $x\tang\psi$, sa différentielle seconde représente l'espace que la composante R, qui agit suivant cette direction, fait parcourir au mobile dans l'instant dt; d'où l'on tire

$$d^2(x\tang\psi) = -\tfrac{1}{2}Rdt^2,$$

$$\text{ou} \quad d^2x\tang\psi + 2dxd(\tang\psi) + xd^2(\tang\psi) = -\tfrac{1}{2}Rdt^2.$$

Nous avons trouvé aussi, note Ire, § 3, la relation

$$\tang\psi = \tang\rho\sin(\varphi - \pi).$$

« Comme l'astre, dit Euler, demeure dans le même plan pendant l'élément dt du temps, on peut, en différenciant la valeur de tang ψ, regarder les quantités π et ρ comme constantes, ce qui donnera

$$d(\tang\psi) = d\varphi\tang\rho\cos(\varphi - \pi).$$

Cependant rien n'empêche qu'on ne regarde, dans cette différenciation, les quantités



π et ρ comme variables, ainsi qu'elles peuvent l'être par la suite. On tirera de là l'équation

$$d(\tang\psi) = d(\tang\rho)\sin(\varphi-\pi) + (d\varphi - d\pi)\tang\rho\cos(\varphi-\pi).$$

Cette valeur de $d(\tang\psi)$, comparée à la précédente, donnera la relation

$$\frac{d.\tang\rho}{\tang\rho} = \frac{d\pi}{\tang(\varphi-\pi)};$$

et comme le premier membre est la différentielle de $\log\tang\rho$, on voit que la longitude du nœud étant connue, on en déduira facilement l'inclinaison ρ à l'écliptique.

Pour parvenir à celle-là, différencions de nouveau la première formule............. $d(\tang\psi) = d\varphi\tang\rho\cos(\varphi-\pi)$, en y faisant tout varier; nous aurons

$$d^2(\tang\psi) = d^2\varphi\tang\rho\cos(\varphi-\pi) - d\varphi(d\varphi - d\pi)\tang\rho\sin(\varphi-\pi) + d\varphi\cos(\varphi-\pi)d(\tang\rho);$$

ou, en mettant pour $d(\tang\rho)$ sa valeur, et en réduisant,

$$d^2(\tang\psi) = d^2\varphi\tang\rho\cos(\varphi-\pi) - d\varphi^2\tang\rho\sin(\varphi-\pi) + \frac{d\varphi d\pi\tang\rho}{\sin(\varphi-\pi)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\tang\psi$ et de ses différentielles dans la troisième équation du mouvement, elle deviendra

$$(d^2x - xd\varphi^2)\tang\rho\sin(\varphi-\pi) + (2dxd\varphi + xd^2\varphi)\tang\rho\cos(\varphi-\pi) + \frac{xd\varphi d\pi\tang\rho}{\sin(\varphi-\pi)} = -\tfrac{1}{2}Rdt^2,$$

et donnera, en substituant dans le premier membre, pour les quantités $d^2x - xd\varphi^2$, $2dxd\varphi + xd^2\varphi$, leurs valeurs tirées des deux premières équations du mouvement, puis en tirant la valeur de $d\pi$,

$$d\pi = \tfrac{1}{2}dt^2\frac{\sin(\varphi-\pi)}{xd\varphi}\left[P\sin(\varphi-\pi) + Q\cos(\varphi-\pi) - \frac{R}{\tang\rho}\right];$$

d'où l'on conclura celle de ρ au moyen de l'équation $d(\log\tang\rho) = \dfrac{d\pi}{\tang(\varphi-\pi)}$.

Telles sont les deux formules qu'il faudra introduire dans le calcul, pour remplacer la troisième équation du mouvement, d'après laquelle la latitude devait être cherchée. »

On voit qu'Euler, dont nous venons de rapporter l'ingénieux procédé, qui renferme un principe devenu depuis si fécond entre les mains de Lagrange et des géomètres modernes, n'explique peut-être pas assez clairement ce qui l'autorise à le suivre; mais on peut facilement y suppléer par les considérations que Lagrange lui-même a établies dès 1765. (Voy. *Misc. Taur.*, t. III, pag. 323).

La relation $\tang\psi = \tang\rho\sin(\varphi-\pi)$ est l'intégrale complète de l'équation $d^2(x\tang\psi) = 0$, puisqu'elle la rend identique, lorsqu'on suppose que les premiers membres des deux équations $d^2x - xd\varphi^2 = -\frac{1}{2}Pdt^2$, $2dxd\varphi + xd^2\varphi = -\frac{1}{2}Qdt^2$ sont aussi, séparément, égaux à zéro. Les deux constantes ρ et π devant rester arbitraires, on peut les faire varier, et assujétir par là la valeur de $\tang\psi$ à satisfaire à l'équation différentielle complète. Mais comme il y a deux arbitraires et une seule équation, on peut disposer de l'une des premières pour poser l'équation de condition

$$d(\tang\rho)\sin(\varphi-\pi) - d\pi\tang\rho\cos(\varphi-\pi) = 0,$$

qui détermine la variation de l'une des constantes, lorsqu'on connaît celle de l'autre, et qui simplifie la valeur de $d(\tang\psi)$, en exprimant qu'elle est la même, soit qu'on y fasse varier ou non les constantes.

Comme on n'a plus, après cela, qu'une indéterminée dont on puisse profiter, on doit, en prenant la valeur de d^2 (tang ψ), différencier complètement celle de d (tang ψ), ainsi réduite. On obtient ensuite, par leur substitution dans l'équation du second ordre, l'expression de la variation de la seconde constante arbitraire; d'où il résulte que l'équation tang $\psi =$ tang ρ sin $(\varphi - \pi)$, qui est l'intégrale complète de l'équation $d^2(x \text{ tang } \psi) = 0$, peut aussi devenir celle de l'équation $d^2(x \text{ tang } \psi) = -\frac{1}{2}Rdt^2$, pourvu qu'on y regarde les constantes comme variables, et qu'on détermine leurs différentielles au moyen des relations précédentes.

§ 4. *Formule donnée pour la première fois par Mayer, pour déterminer directement la latitude* (*voy.* sa Theoria Lunæ juxta systema Newtonianum, p. 6).

Les équations fondamentales du mouvement, dont Mayer fait usage, sont les mêmes que celles d'Euler, que nous venons de rapporter § 3, en y désignant par av la distance accourcie de la Lune à la Terre, par φ la longitude vraie, par l la latitude, et en divisant tout par a. L'auteur introduit ensuite, à la place de l'élément dt du temps, celui de la longitude moyenne q, en posant l'équation $\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3n^2dq^2}{\pi^3(S+T)}$ (*voy.* pag. 45, à la note), où $\frac{a}{\pi}$ est la distance moyenne du Soleil à la Terre, n le rapport des moyens mouvemens, $S+T$ la somme des masses du Soleil et de la Terre, π le rapport des parallaxes. Après avoir substitué cette valeur dans les trois équations primitives, il désigne par X, Y, Z les produits des forces P, Q, R d'Euler par le facteur $\frac{a^2n^2}{\pi^3(S+T)}$, et il obtient ainsi, en divisant par dq^2, les équations

$$0 = \frac{d^2v - vd\varphi^2}{dq^2} + X, \quad 0 = \frac{2dvd\varphi + vd^2\varphi}{dq^2} + Y, \quad 0 = \frac{d^2(v \text{ tang } l)}{dq^2} + Z \text{ tang } l.$$

La seconde étant multipliée par vdq et intégrée, donne $\frac{v^2d\varphi}{dq} = e - \int Yvdq$; e étant une constante. On tire de là, en faisant $v = \frac{1}{x}$, $\int \frac{Ydq}{x} = P$, $ex^2dq = dp$,

$$\frac{d\varphi}{dp} = 1 - \frac{P}{e} \ldots\ldots (a).$$

La première équation devient alors, en n'y regardant plus dq comme constant,

$$0 = \frac{1}{dq}d\frac{dv}{dq} - v\frac{d\varphi^2}{dq^2} + X.$$

Mais on a $\frac{dv}{dq} = -\frac{dx}{x^2dq} = -\frac{edx}{dp}$. Si l'on substitue dans l'équation précédente cette valeur et celle de dq, en y regardant dp comme constant, puis qu'on y remette pour $\frac{d\varphi}{dp}$ celle que donne l'équation (a), on aura, en divisant par e^2x^2, et en changeant de signe,

$$0 = \frac{d^2x}{dp^2} + x - \frac{X}{e^2x^2} - \frac{2Px}{e} + \frac{P^2x}{e^2} \ldots\ldots (1);$$

la valeur précédente de P donne aussi

$$0 = \frac{dP}{dp} - \frac{Y}{ex^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Enfin la troisième équation, dégagée de la considération de dq constant, et divisée

$$o = \frac{1}{edq}\, d\, \frac{d\left(\frac{\tang l}{x}\right)}{edq} + \frac{Z \tang l}{e^2},$$

ou en exécutant la double différenciation, en substituant, après la première, dp, regardé comme constant, au lieu de ex^2dq, et en remettant après la seconde, pour edq, sa valeur :

$$o = \frac{x^3 d^2 (\tang l)}{dp^2} - x^2 \tang l \frac{d^2x}{dp^2} + \frac{Z \tang l}{e^2};$$

d'où l'on tire, en remettant pour $\frac{d^2x}{dp^2}$ sa valeur tirée de l'équation (1), et en divisant par x^3,

$$o = \frac{d^2 (\tang l)}{dp^2} + \tang l + \frac{(Z - X)}{e^2 x^3} \tang l - \frac{2P \tang l}{e} + \frac{P^2 \tang l}{e^2} \ldots\ldots (3).$$

Lagrange, dans sa pièce sur les Satellites de Jupiter, couronnée en 1766, employa aussi la troisième équation du mouvement à la recherche directe de la latitude, et d'Alembert lui fit honneur de cette idée, avant que la théorie de Mayer eût été publiée.

NOTE VII.

Équations différentielles du problème des trois corps, que MM. Lagrange et Laplace ont données et appliquées à la théorie de la Lune.

§ 1. *Equations fondamentales de l'*Essai sur le problème des trois corps.

Soient A, B, C les masses de trois corps qui s'attirent mutuellement;
x, y, z les coordonnées rectangles du corps B autour de A;
x', y', z' celles du corps C autour de A, supposées plus grandes que celles de B;
r, r', r'' les distances entre les corps A et B, A et C, B et C;

en sorte que l'on ait

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad r'' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Dans le mouvement absolu, le corps A serait soumis aux forces $\frac{B}{r^2}$, suivant la ligne AB; $\frac{C}{r'^2}$, suivant AC; et le corps B aux forces $\frac{A}{r^2}$, suivant BA; $\frac{C}{r''^2}$, suivant BC. Dans le mouvement relatif de B autour de A, le premier corps sera soumis aux trois forces $\frac{A+B}{r^2}$, $\frac{C}{r''^2}$, $\frac{C}{r'^2}$, respectivement dirigées suivant les lignes BA, BC et CA. Et comme les cosinus des angles que font les directions de chacune de ces forces avec l'axe des x, ont pour expressions $\frac{x}{r}$, $\frac{x'-x}{r''}$, $\frac{x'}{r'}$, on aura, en exécutant les produits, et en prenant avec le signe — les composantes qui tendent à diminuer x, l'équation du mouvement relatif de B, parallèlement à l'axe des x:

(B)...
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)x+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)x'=0;$$

on trouvera de même, par rapport aux deux autres axes,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)y+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)y'=0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)z+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)z'=0.$$

Si l'on change B, x, y, z, r en C, x', y', z', r' dans ces équations, et réciproquement, on aura celles du mouvement relatif du corps C autour de A, savoir :

(C)...
$$\frac{d^2x'}{dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)x'+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)x=0,$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)y'+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)y=0,$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)z'+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)z=0.$$

Enfin si l'on fait $x'-x=x''$, $y'-y=y''$, $z'-z=z''$, on aura, pour exprimer le mouvement relatif du corps C autour de B, trois équations que nous ne poserons pas, pour abréger, et qui se déduisent des premières, en y changeant respectivement A, x, y, z, r en C, x'', y'', z'', r'', *et vice versâ*.

Or on a l'équation $\frac{d^2.r^2}{2dt^2}=\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}+u^2$, en faisant $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=u^2$; si l'on y met pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., les valeurs précédentes, elle donne, en remarquant que l'on a

$$xx'+yy'+zz'=\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}:$$

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)r^2+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}-u^2=0\ldots\ldots(a).$$

Si l'on change successivement, dans cette équation, r, C, u en r', B, u', ou r'', A, u'', et réciproquement, on aura immédiatement les deux autres, où u' et u'' désigneront les vitesses relatives du corps C autour de A et de B, de même que u est la vitesse relative de B autour de A. Il s'agit maintenant de les éliminer toutes trois, en substituant leurs valeurs en fonction de r, r', r'' dans les équations précédentes.

L'équation $u^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ donne, en la différenciant,

$$udu=\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{d^2t},$$

ou, en mettant pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., leurs valeurs tirées des équations (B) :

$$udu=-\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)rdr-C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)(x'dx+y'dy+z'dz).$$

Lagrange suppose $\quad x'dx+y'dy+z'dz-xdx'-ydy'-zdz'=d\rho;$



l'équation identique $xx'+yy'+zz'=\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}$ lui donne alors, en la différenciant,

$$x'dx+y'dy+z'dz=\tfrac{1}{2}(rdr+r'dr'-r''dr''+d\rho).$$

Posant ensuite, pour plus de simplicité,

$$\tfrac{1}{2}(r'^2+r''^2-r^2)=p,\quad \tfrac{1}{2}(r^2+r''^2-r'^2)=p',\quad \tfrac{1}{2}(r^2+r'^2-r''^2)=p'',$$

$$\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}=q,\qquad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}=q',\qquad \frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}=q-q'=q''.$$

La valeur de udu devient, en y faisant $\frac{1}{r''^3}=\frac{1}{r^3}-q'$, $2rdr=dp'+dp''$,

$$2udu=-2.\frac{A+B+C}{r^3}rdr+C[q'dp'-(q-q')dp''-qd\rho];$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$u^2=\frac{2(A+B+C)}{r}+CQ,\quad \text{en supposant}\quad q'dp'-q''dp''-qd\rho=dQ.$$

L'équation (a) devient alors, en y substituant ces valeurs, et en faisant $\frac{r^2}{r''^3}=\frac{1}{r}-q'(p'+p'')$,

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2}-\frac{A+B+C}{r}-C(p'q'-p''q''+Q)=0.$$

On obtiendrait facilement les deux équations en r' et r'' de la même manière; et quant à celle qui sert à déterminer ρ, on y parvient en différenciant la valeur de $d\rho$, et en y substituant pour d^2x, d^2x', d^2y, etc., leurs valeurs tirées des équations (B) et (C), ce qui donne

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+Cpq-Bp'q'-Ap''q''=0.$$

§ 2. *Équations qui déterminent, sous forme finie, les expressions des variations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, dues à l'action des forces perturbatrices, telles que les a données M. Laplace.*

Conservons les notations de l'article précédent, en supposant que le corps B soit la Lune, et en substituant à C la lettre S, qui représente la masse du Soleil; désignons de plus par R la quantité $\frac{S(xx'+yy'+zz')}{r'^3}-\frac{S}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$, et par μ la somme des masses de la Terre et de la Lune; les équations (B) deviendront

$$(b)\ldots\ 0=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu.x}{r^3}+\left(\frac{dR}{dx}\right),\quad 0=\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu.y}{r^3}+\left(\frac{dR}{dy}\right),\quad 0=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu.z}{r^3}+\left(\frac{dR}{dz}\right).$$

Si l'on multiplie la première par $2dx$, la seconde par $2dy$, la troisième par $2dz$; qu'ensuite on les ajoute, et que l'on désigne par la caractéristique d mise devant R, la différentielle de cette fonction prise par rapport aux seules coordonnées x, y, z, on aura, après avoir intégré avec une constante $\frac{\mu}{a}$,

$$0=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+2\int dR.$$

Si l'on ajoute l'intégrale précédente à la somme des équations (b), multipliées respective-

ment par x, y, z, on aura, en remarquant que

$xd^2x + yd^2y + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = d(xdx + ydy + zdz) = d(rdr) = \frac{1}{2}d^2.r^2$:

$$o = \frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int dR + x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) + z\left(\frac{dR}{dz}\right).$$

Soit δr la partie de r due à l'action du Soleil. Si l'on substitue $r + \delta r$ au lieu de r dans l'équation précédente, les termes indépendans de l'action du Soleil devront se détruire d'eux-mêmes, par la nature du mouvement elliptique, et l'on aura, en négligeant le carré des forces perturbatrices,

$$(c) \ldots\ldots\; o = \frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{\mu.r\delta r}{r^3} + 2\int dR + x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) + z\left(\frac{dR}{dz}\right).$$

Si l'on prend pour plan fixe des x, y un plan très peu incliné à celui de l'écliptique; z sera de l'ordre des forces perturbatrices; et puisqu'on néglige le carré de ces forces, on pourra négliger la quantité $z\left(\frac{dR}{dz}\right)$. De plus, r et v ne différant que de quantités de l'ordre z^2 de leurs projections sur le plan fixe, on peut les prendre les unes pour les autres, et supposer $x = r\cos v$, $y = r\sin v$, ce qui donne

$$x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) = r\left(\frac{dR}{dr}\right),$$

par le procédé de la transformation des différentielles partielles, dont nous donnerons plus bas un exemple.

Cela posé, les équations (b) multipliées respectivement par x, y, z, et réduites en coordonnées polaires, au moyen de la valeur de r et de la relation ....

$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2dv^2$, donnent l'équation $o = \frac{rd^2r - r^2dv^2}{dt^2} + \frac{\mu}{r} + r\left(\frac{dR}{dr}\right)$.

Soit δv la partie de v due à l'action du Soleil; l'équation précédente deviendra, en y substituant $v + \delta v$ au lieu de v, $r + \delta r$ au lieu de r, et en n'ayant égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices,

$$o = \frac{rd^2.\delta r + \delta r d^2r - 2r\delta r dv^2 - 2r^2dvd.\delta v}{dt^2} - \frac{\mu.\delta r}{r^2} + r\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

et comme rdv^2 et r^2dv s'y trouvent multipliés par δr ou $d.\delta v$, on peut y substituer leurs valeurs elliptiques, données, pour l'un, par l'équation précédente sans dernier terme; pour l'autre, par l'équation des aires, $r^2dv = dt\sqrt{\mu.a(1-e^2)}$. On obtient ainsi

$$o = \frac{rd^2.\delta r - \delta r d^2r}{dt^2} - \frac{3\mu.r\delta r}{r^3} - 2d.\delta v\frac{\sqrt{\mu.a(1-e^2)}}{dt} + r\left(\frac{dR}{dr}\right),$$

ou en substituant, au lieu de $\frac{\mu.r\delta r}{r^3}$, sa valeur tirée de l'équation (c),

$$o = \frac{d(rd.\delta r - \delta r dr)}{dt^2} + \frac{3d^2(r\delta r)}{dt^2} - 2d.\delta v\frac{\sqrt{\mu.a(1-e^2)}}{dt} + 6\int dR + 4r\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

d'où l'on tire, en intégrant et en faisant $\mu = n^2a^3$,

$$\delta v = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{2rd.\delta r + dr.\delta r}{a^2ndt} + \frac{3a}{\mu}\int ndt.\int dR + \frac{2a}{\mu}\int ndt.r\left(\frac{dR}{dr}\right)\right];$$

équation qui donnera la valeur de δv quand on connaîtra celle de δr.



Si l'on multiplie pour cet effet la première des équations (b) par $r\delta r$, en négligeant le dernier terme du produit, comme étant du second ordre des forces perturbatrices, et qu'on l'ajoute à l'équation (c) multipliée par $-x$, on aura, en intégrant,

$$0 = \frac{r\delta r . dx - xd(r\delta r)}{dt} - \int xdt\left[2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)\right].$$

Si l'on change x en y et y en x dans cette intégrale, on aura la suivante :

$$0 = \frac{r\delta r . dy - yd(r\delta r)}{dt} - \int ydt\left[2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)\right];$$

et si l'on ajoute la première de ces intégrales multipliée par y, à la seconde multipliée par $-x$, on aura

$$r\delta r . \frac{xdy - ydx}{dt} = x\int ydt\left[2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)\right] - y\int xdt\left[2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)\right];$$

d'où l'on tire, en mettant pour x et y leurs valeurs approchées, $r\cos v$ et $r\sin v$ dans les termes où entrent les forces, pour $xdy - ydx$ celle de r^2dv dans le mouvement elliptique, et en faisant $\mu = n^2a^3$,

$$\delta r = \frac{1}{\mu\sqrt{1-e^2}}\left\{a\cos v\int ndt . r\sin v\left[2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)\right] - a\sin v\int ndt . r\cos v\left[2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)\right]\right\}.$$

Enfin, pour déterminer les perturbations en latitude, il suffit de remarquer que la troisième des équations (b) ayant précisément la même forme que l'équation (c), son intégrale aura aussi la même forme que la précédente, qui donnera immédiatement, en y changeant $r\delta r$ en z ou en $r\delta s$, et $2\int d\mathrm{R} + r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)$ en $\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)$,

$$\delta s = \frac{1}{\mu\sqrt{1-e^2}}\left[a\cos v\int ndt . r\sin v\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right) - a\sin v\int ndt . r\cos v\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)\right].$$

Les expressions précédentes de δr, δv, δs sont celles qu'on trouve dans la *Mécanique céleste*, t. I, p. 258. Les deux premières sont démontrées aussi dans les *Mémoires de Paris* pour 1785, p. 46—48, et dans ceux de 1786, p. 244, avec les seules différences que μ est alors pris pour unité de masse, et que x, y, $\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)$, $\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)$ se trouvent tels qu'ils y entrent d'abord, sans qu'on les ait encore remplacés par leurs valeurs approchées en fonction des coordonnées polaires.

§ 3. *Formules de la Théorie de la Lune, de M. Laplace, telles qu'il y est parvenu dans le t. II des* Mém. phys. et math. de l'Institut, p. 147.

Reprenons les équations (b) de l'article précédent, en y faisant $\mu = 1$, en prenant pour R une valeur de signe contraire, et en conservant du reste les mêmes notations ; ajoutons les deux premières respectivement multipliées par $-y$ et par x, nous aurons la suivante :

$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = x\left(\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right) - y\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)$, qui peut s'écrire ainsi :

$$d\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right) = \left[x\left(\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right) - y\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)\right]dt \ldots (a),$$

et qui, sous cette forme, n'exige plus qu'on regarde l'élément dt comme constant.

Ajoutons ces mêmes équations multipliées, la première par x, la seconde par y, et mettons, dans le même but, le résultat sous la forme suivante :

$$d\left(\frac{xdx+ydy}{dt}\right)-\frac{dx^2+dy^2}{dt}+\frac{(x^2+y^2)dt}{r^3}=\left[x\left(\frac{dR}{dx}\right)+y\left(\frac{dR}{dy}\right)\right]dt\ldots\ldots(a').$$

Enfin, multiplions respectivement les trois équations (b) par $-xz$, $-yz$, x^2+y^2, et nous obtiendrons, en ajoutant les produits, la formule

$$(x^2+y^2)\,d\left(\frac{dz}{dt}\right)-z.d\left(\frac{xdx+ydy}{dt}\right)+z\frac{dx^2+dy^2}{dt}$$
$$=\left[(x^2+y^2)\left(\frac{dR}{dz}\right)-yz\left(\frac{dR}{dy}\right)-xz\left(\frac{dR}{dx}\right)\right]dt\ldots.(a''),$$

où, de même que dans les précédentes, aucune différentielle n'est supposée constante.

Il s'agit maintenant de changer dans toutes trois les coordonnées rectangulaires x, y, z en d'autres u, v, s, qui représentent l'inverse de la projection du rayon vecteur de la Lune sur le plan fixe des xy, l'angle que cette projection fait avec ce plan et la tangente de la latitude, de manière à transformer les équations différentielles (a) (a') (a'') en d'autres qui soient propres à déterminer les nouvelles variables, et où l'on regarde l'élément dv comme constant.

Or, on a $x=\frac{\cos v}{u}$, $y=\frac{\sin v}{u}$, $z=\frac{s}{u}$, et de là $x^2+y^2=\frac{1}{u^2}$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tang} v$, $r^2=\frac{1+s^2}{u^2}$;

$$xdx+ydy=-\frac{du}{u^3},\quad xdy-ydx=\frac{dv}{u^2},\quad dz=\frac{uds-sdu}{u^2},$$
$$dx^2+dy^2=\frac{u^2dv^2+du^2}{u^4},\ ds=udz-u^3z\,(xdx+ydy).$$

Comme la différentielle complète de la fonction R doit être la même, quel que soit le système de coordonnées par rapport auquel on la prenne, on a l'équation

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)dx+\left(\frac{dR}{dy}\right)dy+\left(\frac{dR}{dz}\right)dz=\left(\frac{dR}{du}\right)du+\left(\frac{dR}{dv}\right)dv+\left(\frac{dR}{ds}\right)ds;$$

si l'on substitue dans le second membre, pour du, dv, ds, leurs valeurs en fonction de dx, dy, dz, tirées des relations précédentes, cette équation deviendra identique; les coefficiens de dx, dy, dz devront donc s'y détruire séparément, ce qui fournira les valeurs cherchées des différentielles partielles du premier système en fonction du second, savoir :

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)=-xu^3\left(\frac{dR}{du}\right)-yu^2\left(\frac{dR}{dv}\right)-xzu^3\left(\frac{dR}{ds}\right);$$
$$\left(\frac{dR}{dy}\right)=-yu^3\left(\frac{dR}{du}\right)+xu^2\left(\frac{dR}{dv}\right)-yzu^3\left(\frac{dR}{ds}\right);\quad\left(\frac{dR}{dz}\right)=u\left(\frac{dR}{ds}\right).$$

L'équation (a) devient, en y substituant ces valeurs, $d\left(\frac{dv}{u^2dt}\right)=\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$; d'où l'on tire, en multipliant par $\frac{2dv}{u^2dt}$, et en intégrant,

$$dt=\frac{dv}{u^2\sqrt{h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}}}\ldots\ldots(e),$$

h étant une constante arbitraire.



L'équation (e) donne aussi, en prenant la différentielle de u^2dt, dans la supposition de dv constant, et en la divisant par u^2dt;

$$\frac{d(u^2dt)}{u^2dt}=-\frac{\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}}{\left[h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}\right]}.$$

Les mêmes transformations opérées dans l'équation (a') la réduisent à

$$d\left(\frac{du}{u^3dt}\right)+\frac{u^2dv^2+du^2}{u^4dt}-\frac{udt}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}=\left[u\left(\frac{dR}{du}\right)+s\left(\frac{dR}{ds}\right)\right]dt;$$

d'où l'on tire, en développant le premier terme, et en multipliant partout par $\frac{u^3dt}{dv^2}$,

$$\frac{d^2u}{dv^2}+u+\frac{du^2}{udv^2}-\frac{du}{dv^2}\,\frac{d(u^3dt)}{u^3dt}-\frac{u^4dt^2}{dv^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u^4dt^2}{dv^2}\left[\left(\frac{dR}{du}\right)+\frac{s}{u}\left(\frac{dR}{ds}\right)\right].$$

Or l'on a $\frac{d(u^3dt)}{u^3dt}=\frac{du}{u}+\frac{d(u^2dt)}{u^2dt}$; si l'on met, pour le second terme, sa valeur, et qu'on substitue l'expression qui en résulte, ainsi que celle de u^2dt, dans l'équation précédente, on aura, en multipliant de part et d'autre par $h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}$,

$$o=\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)\left[h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}\right]-(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}-\left(\frac{dR}{du}\right)-\frac{s}{u}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\frac{du}{u^2dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)\ldots(f);$$

équation qui sert à déterminer l'inverse de la distance accourcie de l'orbite troublée, et de là, en substituant la valeur de u qu'on en déduit dans l'équation (e), l'expression du temps en fonction du mouvement angulaire.

Enfin, l'équation (a'') devient, en y faisant les premières substitutions,

$$\frac{1}{u^2}d\left(\frac{uds-sdu}{u^2dt}\right)+\frac{s}{u}d\left(\frac{du}{u^3dt}\right)+\frac{s}{u}\cdot\frac{u^2dv^2+du^2}{u^4dt}=\left[\frac{1}{u}\left(\frac{dR}{ds}\right)+s\left(\frac{dR}{du}\right)+\frac{s^2}{u}\left(\frac{dR}{ds}\right)\right]dt,$$

ou en développant les deux premiers termes, et en multipliant par $\frac{u^3dt}{dv^2}$,

$$\frac{d^2s}{dv^2}+s-\frac{ds}{dv^2}\,\frac{d(u^2dt)}{u^2dt}+\frac{sdu}{udv^2}\left[\left(\frac{du}{u}+\frac{d(u^2dt)}{u^2dt}\right)-\frac{d(u^3dt)}{u^3dt}\right]$$
$$=\frac{u^4dt^2}{dv^2}\left[\frac{s}{u}\left(\frac{dR}{du}\right)+\frac{1+s^2}{u^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)\right].$$

On voit que le quatrième terme du premier membre est identiquement nul. Si l'on met à la place des autres termes en dt leurs valeurs, et qu'on multiplie partout par $h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}$, cette équation se réduit à la suivante :

$$o=\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)\left[h^2+2\int\left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}\right]-\frac{s}{u}\left(\frac{dR}{du}\right)-\frac{1+s^2}{u^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\frac{ds}{u^2dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)\ldots\ldots(g),$$

qui sert à déterminer le mouvement en latitude.

Les équations (e) (f) (g) forment un système complet de formules, que M. Laplace a

donné aussi dans le t. Ier de la *Méc. cél.*, p. 151, avec un seul changement, qui consiste à prendre, au lieu de R, une autre fonction $Q = \frac{\mu}{r} + R$, dont l'introduction à la place de R a l'avantage de simplifier un peu les équations, en faisant disparaître le second terme de l'équation (f), et d'exprimer, par des différentielles partielles de Q, toutes les forces qui agissent sur la Lune. C'est aussi sous cette dernière forme que M. Laplace fait usage de ces formules dans la Théorie de la Lune, qui forme le livre VII de la *Mécanique céleste*.

Dans le cas où l'on a $R = 0$, les trois équations précédentes deviennent

$$dt = \frac{u^2 dv}{hu^2}; \quad 0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad 0 = \frac{d^2s}{dv^2} + s.$$

La dernière étant satisfaite par les valeurs $\sin v$ et $\cos v$, prises pour s, on voit immédiatement que son intégrale complète peut être mise sous la forme $s = \lambda \sin(v - \theta)$, λ et θ étant deux constantes arbitraires; c'est l'équation polaire d'un plan dont λ est la tangente de l'inclinaison au plan des xy, et θ la longitude du nœud.

L'intégrale de la seconde équation sans dernier terme étant aussi de la forme $u = a \sin(v - \varpi)$, pour qu'elle devienne celle de l'équation complète, il suffit d'y ajouter un terme qui satisfasse à cette équation sans nouvelle constante arbitraire; or, l'on voit facilement que $b\sqrt{1+s^2}$ ou $b\sqrt{1+\lambda^2\sin^2(v-\theta)}$ remplit cette condition; et sa substitution au lieu de u, dans la seconde équation, donne $b = \frac{1}{h^2(1+\lambda^2)}$. Si l'on suppose ensuite $a = \frac{e}{h^2(1+\lambda^2)}$, e étant une nouvelle constante, l'intégrale complète de l'équation dont il s'agit prendra la forme

$$u = \frac{1}{h^2(1+\lambda^2)}\left[\sqrt{1+s^2} + e\cos(v-\varpi)\right].$$

Remarque. Euler a toujours donné, jusqu'à sa seconde théorie de la Lune, un coefficient $\frac{1}{2}$ aux forces P, Q, R, et Mayer l'a suivi sur ce point. Voici probablement à quoi tenait cet usage.

Euler voulant dans sa *Mécanique* exprimer les vitesses par les racines des hauteurs, écrivait $c = \sqrt{e}$ au lieu de $c = \sqrt{2ge}$; il prenait donc $2g = 1$, ou $g = \frac{1}{2}$. Ainsi la vitesse g acquise dans l'unité de temps étant représentée par $\frac{1}{2}$, la vitesse acquise dans l'instant dt était $\frac{1}{2}\,dt$.

Or, en prenant pour unité de forces la gravité, on avait, pour une autre force P, produisant la vitesse dv dans l'instant dt, $P : 1 :: dv : \frac{1}{2}dt$; d'où l'on tirait, à cause de $v = \frac{dx}{dt}$, $d^2x = \frac{1}{2}Pdt^2$.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

THÉORIES DES PLANÈTES.

CHAPITRE PREMIER.

Pièces d'Euler sur les inégalités de Jupiter et de Saturne.

Détermination du mouvement des planètes fournie par les observations.

Au milieu de ce nombre infini de points étincelans dont la voûte céleste est parsemée, et qui gardent entre eux une position à peu près constante, un petit nombre d'astres errans, ou de planètes, semblent voyager dans le ciel avec des vitesses inégales ; et chacun d'eux, après avoir successivement occupé tous les points d'un grand cercle de la sphère, revient au lieu d'où il est parti, au bout d'une certaine période de temps. Le bel éclat que jettent ces corps lumineux, leur proximité de la Terre, la nature et les rapports de leurs mouvemens, durent promptement fixer sur eux l'attention des observateurs. Cinq de ces astres furent reconnus dès les temps les plus reculés ; leurs distances mutuelles, et la durée de leurs révolutions furent mesurées. Mais les anciens crurent généralement, jusqu'à Copernic, que les planètes tournaient autour de la Terre comme centre ; ils représentèrent, jusqu'à Kepler, leurs inégalités périodiques par l'appareil illusoire et compliqué d'un cercle excentrique chargé de plusieurs épicycles, et ne purent expliquer par là, d'une manière satisfaisante, le singulier phénomène des stations et des rétrogradations. Newton, en démontrant la loi générale de tous ces mouvemens, fournit enfin un puissant moyen de les faire mieux connaître ; il détermina avec précision les masses de Saturne et de Jupiter (*Princ.*, liv. III, prop. 8.), et il fit voir (prop. 13) que dans les conjonctions de ces planètes, les forces d'attraction de Jupiter et du Soleil sur Saturne étaient dans le rapport de 1 à 211 ; et que la différence des attractions de Saturne sur le Soleil et sur Jupiter, était à la gravité de Jupiter vers le Soleil, comme les nombres 1 et 2409. Cependant la petitesse des inégalités des planètes dues à leur action mutuelle, rendit longtemps les tables fondées sur le mouvement elliptique, suffisamment exactes pour les besoins de l'Astronomie ; et l'on n'eut recours à la théorie, que lorsque les observations eurent fait entrevoir des anomalies dont elles ne pouvaient donner l'explication ni fixer la loi.

Découverte des inégalités du mouvement de Jupiter et de Saturne.

Kepler s'était aperçu que les observations de Regiomontanus donnaient, pour Saturne et Jupiter, des lieux plus ou moins avancés qu'ils ne devaient l'être d'après les moyens mouvemens établis sur les observations de Ptolémée. Flamsteed remarqua, en 1682, que toutes les tables faites d'après les observations de Tycho donnaient trop de vitesse à Saturne et trop peu à Jupiter, ce qui indiquait un retardement dans le mouvement du premier et une accélération dans celui du second, devenus sensibles dans l'espace d'un siècle. Halley fixa, par les observations, la première quantité à 1′ 24″, et la seconde à 36″, pour le premier siècle, à partir de 1700, et il admit dans ses tables deux équations séculaires qui augmentent comme les carrés des temps, l'une de 9° $\frac{1}{4}$ en deux mille ans, l'autre de 3° 49′ dans le même intervalle. Il supposait aussi, de même que Jacques Cassini, que les aphélies et les nœuds de ces planètes étaient mobiles : celui-ci donnait à

l'aphélie et aux nœuds de Jupiter des mouvemens directs par rapport aux équinoxes, montant à 57″ et à 24″ par an, et supposait que ceux de Saturne avancent de 1′ 18″, et de 57″ dans le même intervalle de temps. Enfin Lemonnier avait vu, en 1746, que les observations indiquaient pour Saturne une inégalité sensible, qui disparaît lorsque, se trouvant dans ses moyennes distances, il est dans une certaine configuration avec Jupiter.

Prix de l'Académie sur ce sujet.

Ce fut pour déterminer la cause de ces inégalités, et fixer leurs quantités avec plus de précision, que l'Académie des Sciences proposa pour sujet du prix fondé par M. Rouillé de Meslay, qu'elle devait donner en 1748, *une Théorie de Saturne et de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux planètes paraissent se causer mutuellement, principalement dans le temps de leur conjonction.* L'Académie reçut trois pièces, et couronna celle d'Euler, qui était arrivée en août 1747, et qui fut imprimée séparément en 1749, ce qui la rend maintenant assez rare.

Marche suivie par Euler dans sa pièce de 1748.

Euler commence ce Mémoire par exposer, dans une introduction, le cours de ses idées et le plan de son travail. Il montre que l'action de Saturne et de Jupiter l'un sur l'autre, excède tellement celle des autres planètes, soit par la quantité de matière, soit par la proximité, qu'on peut négliger les forces qui proviennent de celles-ci dans la détermination des inégalités de celles-là. Il en dit autant de celles qui seraient introduites dans le mouvement de Saturne par les dérangemens qu'éprouve le mouvement de Jupiter, et réduit ainsi la question proposée à déterminer le mouvement d'une planète qui est sollicitée, tant vers le soleil que vers une autre planète qui décrit autour du Soleil une ellipse conformément à la théorie de Kepler. Le même calcul peut alors s'appliquer aux inégalités de l'une et de l'autre de ces planètes, et il s'occupe seulement de celles de Saturne, comme étant les plus remarquables. « Pour peu, dit-il, qu'on s'enfonce dans » cette recherche, on s'apercevra bientôt qu'elle est beaucoup plus difficile que celle du » mouvement de la Lune; je me flatte cependant qu'à l'aide de plusieurs détours analy- » tiques, j'en viendrai tellement à bout, qu'on ne trouvera rien à désirer au-delà...... Je » supposerai Saturne projeté sur le plan de l'orbite de Jupiter, et déterminerai à chaque » instant sa distance accourcie z, sa longitude φ, et sa latitude ψ, celle-ci au moyen » du mouvement des nœuds et de l'inclinaison, selon l'usage des astronomes; mais » comme il serait trop pénible de surmonter toutes les difficultés à la fois, je passerai » par degré, et je supposerai, 1°. les deux orbites tant dans le même plan que destituées » d'excentricité, ce qui me fournira une espèce d'inégalité dans le mouvement de Sa- » turne, qui sera semblable à celle de la Lune que les astronomes appellent *variation.* » 2°. Laissant les deux orbites dans le même plan, et celle de Jupiter circulaire, j'aurai » égard à l'excentricité k de Saturne, et je déterminerai les nouvelles inégalités qui en » résultent. On sera peut-être surpris de voir que celles-ci surpassent considérablement » celles de la première hypothèse. 3°. Je supposerai l'orbite de Jupiter excentrique, telle » qu'elle l'est en effet, et cette circonstance fournira encore de nouvelles inégalités, qui » même seront les plus considérables. 4°. Enfin, je considérerai l'inclinaison mutuelle des » deux orbites, je montrerai qu'elle n'a qu'une influence insensible sur les inégalités de » la longitude, et je tâcherai d'en déterminer tous les changemens successifs, avec le » mouvement de la ligne des nœuds qui en résulte. »

On voit, par cette courte exposition, où nous avons supprimé ce qui est relatif à l'insuffisance de l'attraction newtonienne, dont il a déjà été question, combien la marche

qu'Euler indique ici a de rapports avec celle qu'il a suivie dans ses Théories de la Lune. Les formules générales qu'il emploie, sans les démontrer, sont les mêmes, ainsi que les expressions des forces, et la méthode d'intégration dont il se sert est aussi tout-à-fait analogue. Les détails dans lesquels nous sommes entrés sur ces divers objets, dans la première partie de cet écrit, nous dispensent donc de suivre pas à pas notre auteur dans toutes ses opérations successives, et nous permettent de borner notre examen à celui des points sur lesquels ses théories sont différentes.

Méthode qu'il donne pour le développement des fonctions irrationnelles.

Parmi un grand nombre d'idées neuves que renferme cette pièce d'Euler, dont la publication est fort antérieure à celle de tous ses autres travaux sur le problème des trois corps, l'une des plus remarquables est le procédé dont il fait usage pour développer l'expression de l'inverse du cube de la distance du corps troublant au corps troublé, en une série convergente, qui procède suivant les cosinus des multiples de l'élongation. ~~Nous avons vu~~ que cette distance inconnue, dont le cube entrait en diviseur dans les expressions des forces perturbatrices, devait être éliminée des équations du mouvement, afin qu'il n'y restât plus que les variables que l'on voulait déterminer; qu'il fallait pour cela y substituer sa valeur en fonction des deux autres côtés du triangle formé par les trois astres et de l'angle compris; et que, dans le cas de la Lune, troublée par le Soleil dans son mouvement autour de la Terre, le rapport des distances des deux premiers au dernier était une si petite quantité (environ un 400e), que le développement, ordonné suivant les puissances de ce rapport, était très convergent. Dans le cas actuel, au contraire, la distance accourcie z de Saturne au Soleil étant à peine double de celle y de Jupiter au Soleil, on voit naître de là une grande difficulté, qu'Euler sentit, et qui lui fit craindre d'abord qu'il ne fallut, après la substitution de la valeur de la distance v de Saturne à Jupiter, garder dans le calcul la formule irrationnelle non développée, ce qui aurait rendu la solution impraticable (*); mais il ne tarda pas à s'apercevoir qu'il était possible de l'éviter par un heureux artifice, qui a été généralement adopté depuis, et qui, par sa grande utilité, est un des plus beaux titres de gloire de son inventeur.

Supposons qu'on ait la formule irrationnelle $(1-g\cos\omega)^{-\mu}$ à développer, g étant une fraction assez près de l'unité; Euler prescrit de le faire au moyen de la loi du binome, en réduisant ensuite en multiples les puissances de $\cos\omega$. Il désigne alors leurs coefficiens par A, B, C, etc., et montre que leurs valeurs sont des séries qui suivent une loi régulière (**). Au lieu d'avoir à chercher péniblement la valeur de tous ces coeffi-

(*) Désignons en effet, par ω l'élongation de Saturne à Jupiter, et par ψ la latitude de celui-là au-dessus du plan de l'orbite de celui-ci; on a $v=\sqrt{y^2+\frac{z^2}{\cos^2\psi}-2yz\cos\omega}$, ou en prenant pour y et z leurs valeurs moyennes a et f, et en faisant $\psi=0$, $f=\lambda a$, $g=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$:

$$v=a\sqrt{1+\lambda^2}\,(1-g\cos\omega)^{\frac{1}{2}},\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{v^3}=\frac{1}{a^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}(1-g\cos\omega)^{-\frac{3}{2}};$$

g étant à peu près égal à $\frac{4}{5}$.

(**) On a

$$(1-g\cos\omega)^{-\mu}=1+\frac{\mu}{1}g\cos\omega+\frac{\mu.\mu+1}{1.2}g^2\cos^2\omega+\frac{\mu.\mu+1.\mu+2}{1.2.3}g^3\cos^3\omega+\text{etc.};$$

ce qui donne, en développant les puissances de $\cos\omega$, une série de la forme $A+B\cos\omega+C\cos2\omega+D\cos3\omega+$ etc., où l'on a

$$A=1+\frac{2}{4}\frac{\mu.\mu+1}{1.2}g^2+\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{8}\frac{\mu.\mu+1.\mu+2.\mu+3}{1.2.3.4}g^4+\text{etc.},\ B=\mu g\left(1+\frac{3}{4}\frac{\mu+1.\mu+2}{2.3}g^2+\text{etc.}\right),\ \text{etc.}$$



ciens, Euler donne un moyen de les obtenir tous en fonction des deux premiers, par des relations successives. Il y parvient à l'aide d'une équation différentielle, qui devient identique, indépendamment de ω, lorsqu'on y fait les substitutions, et qui donne alors, en égalant séparément à zéro les coefficiens des sinus de chaque multiple de ω, des équations pour déterminer chacun de ces coefficiens en fonction des deux précédens (*).

Détermination des deux premiers coefficiens

La difficulté est donc réduite à déterminer les valeurs de A et B par une approximation suffisante. Euler donne pour cela plusieurs méthodes sans les démontrer ; l'une consiste à regarder A, B et g comme variables ; mais elle le conduit à une équation dont il dit n'avoir rien pu tirer. La plus sûre, ajoute-il, serait de sommer un certain nombre de termes, par exemple 10, depuis le commencement des séries, et de représenter A ou $\frac{1}{2}$ B par cette somme, plus le produit du terme suivant, par une suite qu'on peut regarder comme récurrente ou résultant du développement d'une certaine fraction. Enfin, il indique une autre méthode fondée ~~sur la division d'un angle droit en autant de parties~~ qu'on veut, et sur une propriété des sinus de ces parties, qui a un grand rapport avec les suites qui expriment A et $\frac{1}{2}$ B ; il donne alors, sans démonstration, en appelant q l'angle droit, des expressions approchées de ces coefficiens dont la loi est facile à saisir (**).

Application à la théorie de Saturne.

Euler applique ensuite ces procédés, dans sa première approximation, au développement de $(1 - g\cos\omega)^{-\frac{3}{2}}$, en faisant dans les formules $\mu = \frac{3}{2}$; il convient que la série qu'on trouve ainsi pour le facteur irrationnel n'est pas d'abord très convergente ; mais il montre, dans la suite du calcul, que les intégrations lui font de plus en plus acquérir cet avantage ; observation très importante, qui lui est entièrement due (ainsi que d'Alembert le reconnaît, *Rech.*, t. II, p. 81), et qui lui permet de ne garder qu'un petit

(*) Soit en effet $(1-g\cos\omega)^{-\mu} = s$; on a $\frac{ds}{s} = -\frac{\mu g d\omega \sin\omega}{1-g\cos\omega}$, d'où l'on tire l'équation

$$\frac{ds}{d\omega}(1-g\cos\omega) + \mu g \sin\omega . s = 0,$$

qui donne, en y substituant pour s la série indéterminée qui l'exprime, et pour $\frac{ds}{d\omega}$ la dérivée de cette valeur, les relations

$$C = \frac{2(B-\mu g A)}{(2-\mu)g}, \quad D = \frac{4C-(1+\mu)gB}{(3-\mu)g}, \quad E = \frac{6D-(2+\mu)gC}{(4-\mu)g}, \text{ etc.}$$

(**) Ces valeurs sont

$$A = \frac{1}{2}\left\{\left(1-g\sin\tfrac{1}{2}q\right)^{-\mu} + \left(1+g\sin\tfrac{1}{2}q\right)^{-\mu}\right\}, \ \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}q\left\{\left(1-g\sin\tfrac{1}{2}q\right)^{-\mu} - \left(1+g\sin\tfrac{1}{2}q\right)^{-\mu}\right\},$$

et il en donne d'autres analogues et plus exactes, mais plus longues, en fonction de $\sin\frac{1}{4}q$, $\sin\frac{1}{6}q$. La première de celles que nous venons de poser s'obtient en changeant alternativement ω en $90^\circ+\omega$ et $90^\circ-\omega$ dans la formule $(1-g\cos\omega)^{-\mu} = A + B\cos\omega + C\cos 2\omega + \text{etc.}$, et en supposant, après avoir ajouté les résultats, $\omega = \frac{1}{2}q$, puis en négligeant les termes du second membre qui suivent le premier, à cause de leur petitesse. (Voyez le *Calc. intégr.* d'Eul., t. I, chap. VI, et le grand *Traité* de M. Lacroix, t. II, chap. I, p. 121.)

La comparaison des deux séries qui expriment A et B fournit une équation pour déterminer ce dernier, lorsqu'on regarde A, B et g comme variables ; on a alors l'équation différentielle

$$Bdg + gdB = 2g^2 dA + 2\mu g A dg,$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$B = 2\left\{Ag + \frac{(\mu-2)}{g}\int Agdg\right\}.$$

nombre de termes de ce développement, dans les expressions finies des variations du rayon vecteur et de la longitude. Il suppose $z = f(1 + nr)$, $d\varphi = md\zeta + ndx$, ζ étant l'anomalie moyenne de Jupiter, et obtient deux équations : l'une du premier ordre en x par rapport à ζ, l'autre du second ordre en r par rapport à ϖ, dont l'intégration par les séries lui donne la valeur de r, et de là celle de x. Dans sa seconde approximation, Euler a alternativement égard à la première puissance des excentricités k et e des orbites de Saturne et de Jupiter, en prenant pour variable indépendante, tantôt l'anomalie excentrique q de celui-là, tantôt celle de Jupiter p; ce qui lui donne, dans l'un et l'autre cas, pour $\frac{1}{v^3}$, outre la partie qui a $(1 - g\cos\varpi)^{-\frac{3}{2}}$ en facteur, un autre terme multiplié par $(1 - g\cos\varpi)^{-\frac{5}{2}}$ (*). Il emploie alors, pour développer ce dernier, le même procédé dont il a fait usage pour l'autre, en prenant pour le facteur irrationel une série de la forme $P + Q\cos\varpi + R\cos 2\varpi +$ etc., et en déterminant P et Q au moyen des formules précédentes, en y faisant $\mu = \frac{5}{2}$. Cette difficulté étant surmontée, la petitesse des excentricités et des inclinaisons des orbites planétaires, comparativement à celles de la Lune, simplifie le problème, en lui permettant de négliger un beaucoup plus grand nombre de termes ; et le rapport de la longitude à l'anomalie lui donne un mouvement de l'aphélie précisément le même que celui des Tables de Cassini.

Euler trouve des arcs de cercle dans l'intégrale.

C'est dans la recherche des inégalités du mouvement de Saturne qui viennent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, qu'Euler, pour intégrer les deux équations différentielles du second ordre, qui servent à déterminer les parties r et x de la distance accourcie et de la longitude qui sont dues aux forces perturbatrices, suppose un terme $Qe\cos(\varpi - p)$ dans le développement indéterminé de r, et trouve ensuite, par la substitution et la comparaison, que le coefficient de ce terme est infini. « C'est une preuve, dit-il, qu'outre les » termes déjà introduits, il en entre, dans la valeur de r un autre de la forme $Tep\sin(\varpi - p)$ » qui renferme un angle absolu, et qu'il faut ajouter à la valeur supposée pour r; l'équa- » tion différentielle en d^2r contiendra alors le terme $-2mTe\cos(\varpi - p)$; et puisque » ceux en Q se détruisent, on tirera la valeur de T par la substitution, en égalant à zéro » la somme des coefficiens de $\cos(\varpi - p)$; ainsi la lettre Q n'entrera plus en consi- » dération, elle sera nulle ou indéterminée. » Euler attribue principalement aux termes de cette espèce, qui croissent à chaque révolution, les dérangemens singuliers observés dans le mouvement de Saturne, et il regarde leur détermination comme étant trop délicate pour qu'il ose s'y hasarder par la voie de l'approximation; il remarque, au reste, que le dérangement de Jupiter par Saturne pourrait changer beaucoup la valeur de Q, parce que si l'on avait, par exemple, $d\zeta = idp$, i surpassant un peu l'unité, l'intégration donnerait au lieu du diviseur $m^2 - m^2$, celui-ci $(i - 1 - m)^2 - m^2$, qui ne serait plus nul, mais seulement très petit. C'est, en effet, pour avoir négligé cette action réciproque des planètes l'une sur l'autre, et n'avoir pas eu égard au mouvement de

(*) Si l'on suppose $z = f(1 + k\cos q)$, $y = a$, on obtient, en faisant toujours $\psi = 0$, $f = \lambda a$, $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = g$; $\lambda(1+\lambda^2)^{-\frac{3}{2}} = h$; $\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h}[(1 - g\cos\varpi) + gk(\lambda - \cos\varpi)\cos q]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{h}(1 - g\cos\varpi)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3gk}{2h}(1 - g\cos\varpi)^{-\frac{5}{2}}(\lambda - \cos\varpi)\cos q +$ etc.
On parvient à la même expression lorsqu'on suppose $z = f$, $y = a(1 + e\cos p)$, avec la seule différence que la quantité $e\cos p\left(\frac{1}{\lambda} - \cos\varpi\right)$ remplace le facteur $k\cos q(\lambda - \cos\varpi)$ du second terme.

l'aphélie de Jupiter, qu'Euler a trouvé d'abord, dans les valeurs des variables, ces termes contenant des arcs de cercle, qui rendent la solution fautive, et qui ne doivent réellement pas y entrer, ainsi qu'il l'a fait voir lui-même depuis.

Nœuds et inclinaison.

Euler passe ensuite aux variations de la longitude du nœud ϖ et de l'inclinaison ρ, dont il donne, sans démonstration, les expressions générales; il obtient, en les développant et les intégrant, pour ϖ, un terme constant qui lui montre que le lieu du nœud de Saturne rétrograde par rapport aux étoiles, d'un angle de $\frac{nB}{4m^2h} \times 360°$, ou de 8′ 47″ par révolution, c'est-à-dire de 18″ par an, ce qui donne à ces mêmes nœuds un mouvement direct de 33″ par an, par rapport aux équinoxes; ils sont soumis de plus à des inégalités périodiques qui peuvent monter à 3′, tandis que l'inclinaison ne varie que de 5″. Il parvient aussi, d'après la même théorie, à la détermination des mouvemens des nœuds de Jupiter sur l'orbite de Saturne, et de ceux de Mars, Vénus et Mercure, par rapport à l'orbite de Jupiter; il montre que le plan de l'écliptique doit aussi être mobile, et évalue, dans une table, la quantité dont la latitude de chaque étoile doit changer en vertu de ce mouvement, pendant le 18ᵉ siècle. D'Alembert lui a reproché (*Rech.*, t. II, p. 101) d'avoir déterminé le mouvement des nœuds et l'inclinaison variable de l'orbite de Saturne, par rapport au plan de l'orbite de Jupiter qui a un mouvement très sensible, au lieu de le faire par rapport à un plan fixe passant par le centre de la Terre, et qui diffère toujours très peu du plan de l'écliptique; ce qui a l'avantage de faire servir les calculs pour un long espace de temps, et de pouvoir les appliquer à toutes les planètes avec une égale facilité.

Comparaison de la théorie avec les observations.

Euler examine enfin, dans les chapitres 7, 8 et 9, jusqu'à quel point les dérangemens calculés sont d'accord avec les observations. Il applique, à la correction des élémens des tables, la méthode des équations de condition, dont nous avons déjà parlé, en remarquant qu'on doit, pour cet effet, choisir les observations où la plupart des lettres inconnues s'évanouissent par la combinaison des équations qui en résultent, de manière qu'il n'en reste qu'une ou deux à déterminer à la fois; il cherche aussi à combiner les équations de manière à ce que l'inconnue dont on veut fixer la valeur ait le plus grand coefficient possible, en convenant que sans cette attention les erreurs de l'observation et du calcul peuvent se multiplier par ce procédé. Après avoir ainsi déterminé les corrections des élémens, et les coefficiens des termes incertains, il montre les changemens qui doivent en résulter dans les tables de Cassini, et donne, dans un *Supplément*, la comparaison de quelques observations avec le calcul fait selon ses nouvelles tables; l'erreur ne surpasse que fort rarement 5′, au lieu de monter à 20′ comme dans les anciennes. Il fait voir aussi comment on peut se débarrasser tout-à-fait de l'équation $-Q \cos(\omega - p)$ en la comprenant dans l'équation du centre dont elle suit la loi et qu'elle diminue; mais d'Alembert a remarqué (*Rech.*, t. II, p. 96) que cette méthode était limitée, puisqu'on y supposait $-\cos(\omega - p) = \sin q$, ce qui n'a lieu que dans le cas où l'on a sensiblement $\omega - p = q + 90°$.

Jugement de l'Académie. Nouveau prix qu'elle propose sur ce sujet.

L'Académie des Sciences s'exprime ainsi, en couronnant ce beau Mémoire, et en faisant une mention honorable de celui qu'elle avait reçu aussi d'un auteur anonyme : « Quoique » ces deux ouvrages, et sur-tout celui qui remporte le prix, soient remplis des plus pro- » fondes recherches, et dignes des plus grands éloges, il nous a paru que les auteurs

» auraient pu tirer encore un plus grand parti de leur travail, soit pour donner un nouveau degré de perfection aux solutions des problèmes relatifs à la matière proposée, » soit pour procurer, au moyen de ces solutions et d'un meilleur choix d'observations, » de nouveaux secours à l'Astronomie, ou jeter un plus grand jour sur le mécanisme des » corps célestes. Il ne suffit pas d'ailleurs, dans une matière aussi épineuse, de se » rendre seulement intelligible à ses juges ou à ceux qui ont déjà résolu les mêmes » questions, mais il faut encore, pour contribuer de tout son pouvoir à l'avancement » des sciences, se mettre à la portée du plus grand nombre de lecteurs qu'il est possible, » en énonçant au moins les principaux raisonnemens, et en indiquant les plus difficiles » opérations des calculs. Ces motifs, joints à l'importance et à l'étendue de la matière, » ont engagé l'Académie à proposer le même sujet une seconde fois, pour le prix » de 1750, et elle croit devoir exiger des auteurs qui travailleront désormais pour ces » prix, qu'ils entrent dans un détail suffisant sur la démonstration des propositions qui » serviront de base à leurs théories. »

Le prix proposé pour 1750 ne fut décerné qu'en 1752, et ce fut encore Euler qui le remporta. L'académie accorda l'accessit à une pièce du père Boscovich, qu'il publia à Rome en 1756, et fit imprimer celle d'Euler dans le tome VII des *Prix*, qui n'a paru qu'en 1769.

Pièce d'Euler de 1752.

L'auteur commence d'abord ce Mémoire par montrer, selon sa coutume, les défauts de la marche qu'il avait suivie dans le précédent; il convient qu'elle conduit à des calculs rebutans, et qu'elle laisse toujours des doutes sur la suffisance des résultats, d'autant plus que les inégalités de Jupiter et de Saturne sont tellement liées ensemble, qu'il est impossible de les bien déterminer séparément; il croit cependant pouvoir se dispenser de revenir sur la recherche des inégalités du mouvement des nœuds et de l'inclinaison des deux planètes, qu'il pense avoir déjà suffisamment développée; il ne considère alors que les deux premières équations du mouvement de l'une et de l'autre planète, en remarquant d'abord qu'il faut perdre tout espoir de pouvoir les intégrer rigoureusement, et que lors même qu'on serait assez heureux pour y parvenir, les intégrales seraient si compliquées, qu'elles n'apporteraient presqu'aucun avantage pour l'usage de l'Astronomie, et ne dispenseraient pas de recourir à des approximations propres à ce dessein.

Introduction d'une anomalie artificielle.

Ayant quatre équations du second ordre, leur intégration doit faire naître huit constantes arbitraires. Il fait voir qu'on en déterminera quatre par la condition que si l'on suppose les longitudes vraies ν et θ respectivement égales aux moyennes p et q, plus des quantités P et Q, celles-ci ne renferment ni des constantes, ni des termes de la forme ap et bq; que deux autres seront fixées par la valeur des excentricités tirée des observations, et que la détermination des deux dernières dépendra de la condition que l'anomalie soit comptée depuis l'aphélie. Il montre que tout le succès qu'on peut se promettre des opérations suivantes dépend presque uniquement de la nature des variables qu'on introduit pour les distances x et y des deux planètes au Soleil, et que celles-ci dépendant des anomalies aussi bien que de l'élongation, lorsqu'on emploie, selon l'usage, l'une des trois anomalies, la vraie, la moyenne ou l'excentrique, leurs élémens n'ont aucun rapport constant avec celui de l'élongation ω; ce qui produit de grandes difficultés pour chaque différenciation ou intégration. Il propose alors de se servir d'une nouvelle espèce d'anomalie qui soit telle que sa différentielle ait un rapport constant avec $d\omega$. Il désigne



par r et s celles de Jupiter et de Saturne, prises de manière que l'on ait $dr = \varkappa d\omega$; $ds = \lambda d\omega$, $\varkappa$ et λ étant constans; il suppose $dp = td\omega$, $dq = ntd\omega$, t étant variable, n constant; et la substitution de ces valeurs faisant entrer l'élément $d\omega$ dans tous les termes dépendant des forces perturbatrices, qui restent sous le signe $\int$ dans les équations différentielles, et qui contiennent les sinus ou cosinus des multiples de ω, permet de les intégrer directement lorsqu'on y a mis pour les distances leurs développemens.

Euler considère ensuite séparément, comme dans sa pièce de 1748, les inégalités qui dépendent de la distance apparente ω des deux planètes vues du Soleil, ou de l'excentricité de l'une et l'autre orbite. Il emploie le même procédé pour développer les facteurs irrationnels, sans entrer dans aucun détail nouveau à ce sujet, et en se contentant des cinq premiers termes de chaque suite; et il intègre aussi les équations par les séries, en exécutant à la fois les mêmes opérations sur les équations relatives à Jupiter ou à Saturne. D'Alembert a remarqué (*Rech.*, t. I, p. 112) qu'Euler avait fait une espèce de méprise dans sa première pièce, en supposant, dans la recherche des inégalités de la première classe, que les orbites des deux planètes seraient circulaires sans leur action mutuelle. Euler s'exprime plus clairement à ce sujet dans celle-ci, pag. 19, « Quand je conçois que les deux orbites n'aient pas d'excentricités, il ne faut pas s'imaginer qu'elles seraient circulaires si l'action mutuelle des planètes s'évanouissait;... mais » j'entends par là l'état où elles se trouvent effectivement en s'attirant l'une l'autre, et où, » quoique les orbites ne fussent pas excentriques, leurs distances au Soleil ne seraient » pas constantes, puisqu'elles renfermeraient des parties qui dépendraient de l'angle ω; » mais celles-ci étant déjà multipliées par les masses, seront cependant assez petites pour » qu'on néglige leurs produits par ces masses. » L'auteur parvient ensuite à des expressions qui lui montrent que les inégalités qui dépendent de ω, dans le mouvement de Jupiter, sont beaucoup plus grandes que celles de Saturne. La considération de l'excentricité k de l'orbite de celui-là, amène dans la valeur supposée pour le rayon vecteur de celui-ci, un terme $a \cos(\omega - r)$, dont l'argument exprime à peu près la distance de Saturne à l'aphélie de Jupiter, et dont Euler trouve le coefficient si grand, qu'il n'est pas permis de le confondre avec les autres.

Euler trouve un terme dont le coefficient est imaginaire.

Passant de là aux inégalités provenant de l'excentricité de Saturne, il introduit dans l'expression indéterminée de la distance de Jupiter au Soleil, un terme de la forme $bl \cos(\omega + s)$, et il tire, page 55, de sa substitution, une équation qui donne pour b une valeur imaginaire, quand on y suppose, avec Newton, les masses de Jupiter et de Saturne respectivement 1067 et 3021 fois plus petites que celle du Soleil (*). Un petit changement dans ces valeurs suffit pour rendre les racines égales, et donne $b = \frac{1}{2}$; mais Euler n'en trouve pas moins très remarquable que la valeur de b pût devenir imaginaire, et il ajoute que, « dans ce cas, on » serait bien embarrassé de déterminer le mouvement; car ce serait une marque qu'au lieu » des cosinus des angles, il faudrait introduire dans le calcul des quantités exponentielles, » auxquelles se réduisent, comme on sait, les cosinus imaginaires. Dans l'état où se trouvent » Jupiter et Saturne (dit-il, pag. 77), il me semble que la recherche de leur mouvement

(*) En effet, l'équation qui donne la valeur de b devient, lorsqu'on prend $\frac{1067}{3021} = 0{,}353$ pour le rapport des masses,

$$b^2 = 0{,}906\,b - 0{,}35, \quad \text{d'où l'on tire} \quad b = 0{,}453 \pm \sqrt{-0{,}145}.$$



» est en quelque sorte proportionnée aux bornes de nos lumières, puisqu'un petit chan-
» gement fait aux valeurs des masses, dans la détermination de b, fait éviter les angles
» imaginaires, et ne saurait produire une erreur sensible dans l'espace de quelques siècles;
» mais si les orbites des deux planètes étaient plus proches entre elles, ou que leurs
» masses fussent plus grandes, le problème deviendrait peut-être impossible à résoudre.
» Il en serait de même pour la Lune, si sa distance à la Terre, son excentricité ou son
» inclinaison étaient plus grandes qu'elles ne le sont.... Il semble donc que le Créateur
» a voulu tellement arranger ces objets de nos recherches, qu'ils ne surpassent pas en-
» tièrement nos forces, de sorte que nous puissions approcher de plus en plus, à mesure
» que nous avançons dans les sciences, sans pourtant que nous soyons jamais en état
» de les atteindre parfaitement. »

Euler examine ensuite, § 7, les inégalités qui dépendent de l'une et l'autre excentricité à la fois; il ne trouve de quelque conséquence que celle qui dépend de l'angle $(\omega - r + s)$, dont le rapport de la différentielle à $d\omega$, ou $1 - \kappa + \lambda$, devient presque égal à zéro, ce qui rend très grands les termes qui en résultent pour les longitudes; leur détermination faite séparément lui donne $+ 51450\, kl \sin(\omega - r + s)$ pour ces termes, dans le cas de l'une et de l'autre planète; et comme l'angle $\omega - r + s$ et son sinus sont à peu près constans, quelques grandes que soient ces valeurs elles se confondront avec la longitude moyenne, et ne troubleront le mouvement qu'autant que l'angle $\omega - r + s$ deviendra sensiblement variable.

Inégalité considérable qui dépend du produit des excentricités.

L'auteur consacre l'article suivant à des réflexions sur les anomalies de Jupiter et de Saturne. « On sera bien surpris, dit-il, que je vienne de trouver des inégalités aussi
» considérables que l'équation du centre des deux planètes, provenant de l'excentricité
» de l'une ou de l'autre orbite, et qui peuvent monter à plusieurs degrés, et je ne doute
» pas qu'on ne regarde cette double anomalie comme un grand défaut de ma méthode;
» mais je dis d'abord que s'il n'y avait point d'autres inégalités que celles-là, le mouvement
» des deux planètes serait parfaitement conforme aux règles de Kepler. En effet, l'excen-
» tricité k de Jupiter donne à sa distance x la forme $c(1 + k \cos r)$, et à celle de
» Saturne y la forme $e[1 + \alpha k \cos(\omega - r)]$; l'orbite de Saturne devient donc déjà
» très excentrique, et cette excentricité demeurerait la même quand l'action mu-
» tuelle des deux planètes s'évanouirait, pourvu que les lettres μ et ν, qui indiquent
» le rapport de leurs masses à celle du Soleil, conservassent, en s'évanouissant, le
» même rapport.... Mais Saturne se trouve avoir aussi une excentricité et un aphélie
» particuliers; ces deux excentricités se réunissent alors en une seule, et il y a
» deux anomalies, l'une qui regarde l'aphélie de Jupiter, l'autre l'aphélie de Sa-
» turne, de manière que si η et θ désignent les longitudes de ces deux planètes, ρ et σ
» celles de leurs aphélies, on a $x = c[1 + k \cos(\eta - \rho) + bl \cos(\eta - \sigma)]$,
» $y = e[1 + l \cos(\theta - \sigma) + \alpha k \cos(\theta - \rho)]$. Or, je dis que cette double anomalie produira
» le même effet que si chaque planète, selon les règles de Kepler, n'était assujétie qu'à
» une seule anomalie que je nommerai *apparente*, qui serait celle qu'on découvre par les
» observations, et qui donnerait $x = c[1 + K \cos(\eta - R)]$, $y = e[1 + L \cos(\theta - S)]$. »
La démonstration de cette proposition consiste à comparer ces nouvelles expressions aux précédentes, et à montrer qu'on peut, en éliminant η et θ, trouver pour K, L, tang R,

Procédé d'Euler pour ramener à la forme elliptique les valeurs des distances dans le cas du mouvement troublé.

tang S, des valeurs qui satisfassent aux relations qui résultent de cette comparaison (*). Euler tire ensuite de la différenciation de ces valeurs, par rapport à ρ et à σ, les expressions des variations dK, dL, dR, dS, qui proviennent des accroissemens annuels de ρ et de σ; et comme ceux-ci sont connus, il détermine par là la diminution annuelle des excentricités des deux orbites, ainsi que le mouvement direct annuel de leurs aphélies, qu'aucune autre méthode n'avait pu, dit-il, faire découvrir encore; et il trouve les résultats bien d'accord avec les observations (**).

Accélération des moyens mouvemens. L'auteur reprend alors l'examen des termes qu'il a obtenus, et dont l'argument est $\sigma - r + s$ ou $\rho - \sigma$. Si cet angle était constant, il n'en résulterait aucun dérangement dans le mouvement des planètes, parce que les termes dont il s'agit seraient détruits par les constantes qui proviennent de l'intégration des expressions différentielles des longitudes; mais l'angle $\rho - \sigma$ décroissant de 4″ par an, ainsi qu'il vient de le voir, la variation annuelle de l'inégalité, qui a pour expression $+ 51450\, kl \sin(\rho - \sigma)$ sera $- 4''.51450\, kl \cos(\rho - \sigma)$, ce qui la fait monter à + 5355″ en 1701, lorsque l'on prend l'année 1700 pour point de départ, et que l'on fait $\rho - \sigma = 6^s\, 15^\circ\, 27'$. Cet accroissement ne troublerait pas non plus le mouvement s'il demeurait toujours le même; mais comme après neuf siècles, où l'angle $\rho - \sigma$ serait diminué d'un degré, l'accroissement annuel deviendrait 5355″ + 25″, on voit résulter de là une équation séculaire qui monte à 2′ 23″ pour le premier siècle. Euler trouve que cette correction est la même pour Jupiter et pour Saturne, et que, dépendant d'un angle qui change de signe dans l'espace de cent cinquante siècles, elle se trouve alternativement positive et négative; il conclut de son existence, que le mouvement moyen actuel des deux planètes devient continuellement plus rapide, ou que leurs temps périodiques sont diminués; il donne une table des corrections des longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne, de 1700 à 1870, calculée de dix en dix ans, sur le mouvement moyen de 1700; et comme les distances moyennes doivent varier avec les temps périodiques, il trouve dans leurs expressions des termes séculaires, comme dans celles des moyens mouvemens, et il en con-

---

(*) En effet, si, après avoir respectivement égalé ces différentes valeurs, on les développe et on égale séparément à zéro les coefficiens des sinus et cosinus de ϖ et θ, on obtient les relations

$$k\cos\rho + bl\cos\sigma = K\cos R, \quad k\sin\rho + bl\sin\sigma = K\sin R,$$
$$l\cos\sigma + ak\cos\rho = L\cos S, \quad l\sin\sigma + ak\sin\rho = L\sin S,$$

d'où l'on tire, par l'élimination,

$$K^2 = k^2 + b^2l^2 + 2bkl\cos(\rho - \sigma), \quad L^2 = l^2 + a^2k^2 + 2akl\cos(\rho - \sigma),$$
$$\text{tang } R = \frac{k\sin\rho + bl\sin\sigma}{k\cos\rho + bl\cos\sigma}, \quad \text{tang } S = \frac{l\sin\sigma + ak\sin\rho}{l\cos\sigma + ak\cos\rho}.$$

(**) Les valeurs précédentes donnent, en les différenciant par rapport à ρ et σ, et en effaçant respectivement des deux dernières les diviseurs $\cos^2 R$, $\cos^2 S$, dans le premier membre, ou leurs valeurs dans le second,

$$dK = -\frac{bkl(d\rho - d\sigma)\sin(\rho - \sigma)}{K}, \quad dL = -\frac{akl(d\rho - d\sigma)\sin(\rho - \sigma)}{L},$$
$$dR = \frac{k^2d\rho + b^2l^2d\sigma + bkl(d\rho + d\sigma)\cos(\rho - \sigma)}{K^2}, \quad dS = \frac{l^2d\sigma + a^2k^2d\rho + akl(d\rho + d\sigma)\cos(\rho - \sigma)}{L^2}.$$

Les deux dernières peuvent se réduire à celles-ci :

$$dR = \frac{1}{2}(d\rho + d\sigma) - \frac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\frac{k^2 - b^2l^2}{K^2}, \quad dS = \frac{1}{2}(d\rho + d\sigma) + \frac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\frac{l^2 - a^2k^2}{L^2}$$

Euler supposant alors $d\rho = 60''$, $d\sigma = 1'\,4''$, $a = 1\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, obtient $2dK = 35''$, $2dL = 1''\,15''$, $dR = 55''$, $dS = 1'\,8''$; les deux dernières quantités représentent le mouvement direct annuel des aphélies de Jupiter et de Saturne, et les deux premières, la diminution annuelle de la plus grande équation elliptique de l'une et de l'autre orbite.

clut que la distance de Jupiter au Soleil augmente, tandis que celle de Saturne diminue. Nous verrons par la suite que ces résultats manquaient de justesse, et que c'est probablement pour n'avoir pas assez bien distingué les termes séculaires des périodiques, qu'Euler a pu y être amené.

Résultat de ce travail d'Euler.

Il s'occupe enfin, dans le § 10, de rassembler toutes les autres inégalités qu'il a trouvées. Les valeurs de x, y, φ et θ se composent alors de termes elliptiques calculés sur l'excentricité et le lieu de l'aphélie apparens, et de termes multipliés par μ ou ν, dont quelques-uns étant indépendans des excentricités, forment la *variation* des deux planètes, tandis que les autres ont des coefficiens dépendant des excentricités et des longitudes vraies de l'aphélie qu'on peut conclure des apparentes. Euler fait voir qu'il est permis de prendre à volonté, pour r et s, les anomalies moyennes, excentriques ou vraies, qui résultent des aphélies vraies; parce que, les coefficiens étant toujours les mêmes, la différence ne paraîtrait que dans les termes suivans, qui contiendraient le double ou le triple des anomalies r et s, et que l'on peut négliger. Il se contente de donner ses formules, sans entrer dans le détail de tous les calculs en nombres et de la construction des tables.

CHAPITRE II.

Premières recherches de d'Alembert sur la théorie des planètes. Pièce d'Euler sur les inégalités de la Terre. Mémoire de Clairaut sur ce sujet.

Premier essai de Clairaut sur la théorie des planètes.

CLAIRAUT, dans son Mémoire sur le Problème des trois corps, lu à l'Académie en 1747, avait donné une première approximation du calcul des inégalités de la Terre et de Saturne, en y appliquant la même méthode dont il faisait aussi usage pour la Lune, sans y mettre cependant autant de soin et d'importance que pour celle-ci, puisqu'il n'avait pas pensé à considérer l'action des planètes dans la détermination de l'orbite de la Terre, et qu'il avait négligé l'excentricité de cette orbite dans l'évaluation de l'action de la Lune. Lemonnier avait cru trouver, à cette époque, une inégalité d'environ 40″ dans l'équation du centre du Soleil, et il ne croyait pas qu'elle vînt de la seule distance du Soleil à la Lune. La Caille remarquait en 1750, que la différence des lieux du Soleil, observés dans deux quadratures consécutives de la Lune, avec les lieux calculés, était alternativement positive et négative, ce qui lui semblait indiquer une action sensible de la Lune sur la Terre. C'est pour décider la question, et perfectionner la théorie qui en était l'objet, que l'Académie proposa la recherche des inégalités de la Terre pour sujet du prix qu'elle devait distribuer en 1754; mais elle ne l'adjugea pas à cette époque, et le doubla en le prorogeant à l'année 1756.

Recherches de d'Alembert, tom. II, liv. 2.

D'Alembert publia dans l'intervalle les deux premiers volumes de ses *Recherches sur le système du Monde*, dont le second livre a pour objet la détermination de l'orbite des planètes principales dans le système de l'attraction. Le chapitre 1er traite du changement que l'action de la Lune doit produire dans le mouvement de la Terre; il y emploie la théorie dont nous avons déjà parlé, part. I, chap. 3, et n'en conclut qu'une variation de 11″. Il démontre ensuite, par deux méthodes différentes, une proposition que Newton n'avait presque fait qu'énoncer, savoir : que le centre de gravité de la Lune et de la Terre décrit sensiblement une ellipse autour du Soleil. Dans l'un de ces

Action de la Lune sur la terre.



Courbe décrite par le centre de gravité de la Lune et de la Terre

procédés, d'Alembert décompose l'action du Soleil sur la Lune parallèlement à la ligne qui va du Soleil à la Terre, et conclut de là la force qui agit sur le centre de gravité suivant la même direction, en prenant la somme des composantes, relatives à la Lune et à la Terre, multipliées par leur masse respective, et en la divisant par la somme de ces masses. Il détermine de la même manière la force qui agit sur le centre de gravité, dans la direction perpendiculaire à la première; et prenant ensuite la résultante de ces deux forces, il montre qu'elle est dirigée vers le Soleil, et qu'elle est, à très peu de chose près, égale à la masse du Soleil divisée par le carré de sa distance au centre de gravité; ce qui prouve que l'orbite qu'elle fait décrire à celui-ci est sensiblement une ellipse. Il conclut de la petitesse des forces qui troublent l'ellipse décrite par ce centre de gravité, que l'action de la Lune n'est pas probablement la cause des inégalités observées dans le mouvement de la Terre. La Caille contesta ce résultat, et soutint l'existence de l'équation lunaire. (Voyez *Mém. de Par.*, 1757, p. 132 et 145.) D'Alembert étend ensuite son théorème au cas de plusieurs satellites, en prouvant qu'en général *le centre de gravité d'une planète première, et de ses satellites, décrit sensiblement autour du Soleil une ellipse suivant la loi de Kepler;* il examine aussi la variation du Soleil en latitude causée par l'action de la Lune, et la trouve d'environ 13″ en prenant la parallaxe du Soleil de 15″. On lui reprocha, dans le n° de décembre 1754 du *Journal des Savans*, d'avoir ainsi fait monter à près d'un quart de minute la plus grande latitude du Soleil, tandis qu'elle n'était réellement que de 1″. Il répondit, dans son troisième volume, pag. 88, qu'ayant pris pour le plan de l'écliptique celui dans lequel la Terre se meut lorsque la Lune passe par la ligne des nœuds, la latitude apparente du Soleil, ou la quantité dont elle s'élève au-dessus de ce plan et s'abaisse au-dessous, était bien de 13″, dans la supposition faite pour la parallaxe, ou moindre, si celle-ci était plus petite; mais il convint qu'eu égard à la nature des observations astronomiques, où l'on confond presque toujours avec le plan de l'écliptique le plan de l'orbite décrite par le centre de gravité des deux planètes, la latitude observée peut être en effet beaucoup moindre que ne la donne le calcul, et ne monter qu'à 1″ tout au plus.

Recherche des orbites des planètes principales.

D'Alembert fait ensuite, dans le chapitre 3, l'application de sa méthode générale à la recherche des orbites des planètes principales, en les supposant dans le même plan. Il distingue trois différentes causes qui peuvent altérer le mouvement de ces astres, savoir: leur attraction mutuelle, celle qu'elles exercent sur le Soleil, et l'action que les satellites d'une planète peuvent avoir sur celle-ci; il propose, pour déterminer ce dernier effet, de chercher l'orbite elliptique décrite par le centre de gravité commun de la planète et de ses satellites, de déterminer ensuite le lieu de chaque satellite, et d'en conclure celui de la planète principale; quant à l'altération provenant de l'action des planètes sur le Soleil, il montre que cette action devant être transportée à la planète troublée, en sens contraire de sa direction, on peut traiter à cet égard la planète troublante comme un satellite de la première, qui n'agirait point sur le Soleil, et qui au lieu d'attirer celle-ci la repousserait. Il s'occupe enfin des perturbations produites par l'action directe des planètes l'une sur l'autre, et donne les expressions des composantes rectangulaires des forces troublantes, qui doivent être réduites à la forme rationnelle, afin que l'on puisse intégrer l'équation de l'orbite; c'est alors qu'il aborde la difficulté du développement des radicaux en série convergente, et qu'en adoptant l'artifice d'Euler

il indique pour trouver les coefficiens, des procédés nouveaux et ingénieux, dont nous devons rendre compte.

D'Alembert examine d'abord les propriétés générales de la fonction $(\mu - \cos z)^{-\frac{n}{2}}$, lorsqu'après l'avoir développée suivant les puissances de $\cos z$, on réduit celles-ci en multiples, à l'aide de leurs expressions en exponentielles imaginaires; il montre que les coefficiens de chaque cosinus forment alors des séries dont les divers termes sont tous produits par les puissances paires, quand le multiple est pair, *et vice versâ*. Il cherche le terme général de chacune de ces séries dans l'un et l'autre cas, et montre comment un terme quelconque peut se déduire du précédent (*). Il voit par là que les suites don il est le plus convenable de chercher la somme, sont les deux premières, ou celles qui multiplient les cosinus des multiples o et 1 de z, parce que ce sont celles dont les derniers termes approchent le plus de la loi d'une progression géométrique.

Détermination des coefficiens des deux facteurs irrationnels.

L'auteur désigne alors par $A + B\cos z + C\cos 2z +$ etc., $A' + B'\cos z + C'\cos 2z +$ etc., les développemens des radicaux $(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}}$, $(\mu - \cos z)^{-\frac{5}{2}}$, qui se rencontrent dans la théorie desplanètes, où z est l'angle de l'élongation, et où μ représente une fonction des distances moyennes a et B des planètes troublée et troublante au Soleil, qui est l'inverse de la quantité g d'Euler. Il donne une méthode pour trouver tous les coefficiens des termes des deux suites, en supposant que l'on connaisse seulement deux quelconques des lettres A, B, A', B'. Elle consiste à former des équations identiques entre les radicaux et leurs différentielles, à y substituer ensuite leurs développemens supposés, et à comparer séparément les coefficiens des termes semblables, ce qui donne un nombre suffisant de relations très simples entre les divers coefficiens (**). « La méthode de M. Euler, dit-il, a » cet avantage, qu'on y voit très clairement la loi des coefficiens C, D, etc., par rapport » aux deux premiers A, B; tandis que dans la nôtre les coefficiens des deux radicaux » dépendant respectivement les uns des autres, la loi des termes n'y est pas si bien dé- » veloppée; mais en revanche, il ne faut connaître que A et B pour que tous les autres » coefficiens des deux suites soient donnés, au lieu qu'en suivant la méthode de M. Eu- » ler, on est obligé de déterminer, par des suites assez pénibles, les coefficiens A et B » à chaque nouvelle valeur qu'on donne à l'exposant n. »

Il parvient à les exprimer tous en fonction des deux premiers.

(*) Il trouve qu'en désignant par p un multiple quelconque dont le cosinus entre dans le développement du radical, chaque terme de la suite qui exprime le coefficient de $\cos pz$ est égal au précédent multiplié par $\frac{1}{\mu^2}\frac{(\frac{1}{2}n+q+1)(\frac{1}{2}n+q+2)}{(q+3)^2-p^2}$, en mettant successivement pour q les nombres $p-1$, $p+1$, $p+3$, etc.; or, on voit que le coefficient de $\frac{1}{\mu^2}$ n'est jamais plus approchant de l'unité que dans le cas de $n=3$, $p=0$, et dans celui de $n=3$, $p=1$.

(**) En effet, les deux équations identiques

$$(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}} = (\mu - \cos z)^{-\frac{5}{2}}(\mu - \cos z), \quad -\frac{dz \sin z}{(\mu - \cos z)^{\frac{5}{2}}} = d\left(\frac{2}{3(\mu - \cos z)^{\frac{3}{2}}}\right), \text{ où } \mu = \frac{a^2+B^2}{2Ba},$$

donnent, en y mettant pour $(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}}$, $(\mu - \cos z)^{-\frac{5}{2}}$ leurs valeurs $A + B\cos z +$ etc., $A' +$ etc., en développant et égalant de part et d'autre, dans la première équation, les coefficiens des cosinus de chaque multiple différent de z, et dans la seconde, ceux des sinus de ces mêmes multiples,

$$A = A'\mu - \frac{B'}{2},\ B = B'\mu - A' - \frac{C'}{2},\ \text{etc.};\quad -\frac{2}{3}B = -A' + \frac{C'}{2},\ -\frac{2}{3}.2C = -\frac{B'+D'}{2},\ \text{etc.}$$

Il réduit aux quadratures le calcul de A et de B.

D'Alembert indique ensuite différens procédés pour trouver la valeur de A et de B. L'un d'eux est fondé sur une remarque à la fois simple et neuve, c'est que, lorsqu'on multiplie successivement les termes d'un développement de la forme $A + B\cos z + C\cos 2z$ + etc., par dz, $dz \cos z$, etc., et qu'on intègre entre les limites $z = 0$, $z = 180°$, tous les termes disparaissent, excepté A dans le premier cas, B dans le second, et ainsi de suite; ce qui ramène la détermination de ces coefficiens à l'intégration de deux fonctions par les quadratures (*). Il donne ce moyen comme utile dans le cas de $\mu = 1$, mais comme étant en général plus curieux et plus géométrique que commode pour le calcul, et il s'étend davantage sur le procédé direct par lequel on obtient A et B, en développant le premier radical, en réduisant les puissances de $\cos z$ en multiples, puis en prenant séparément la somme des termes constans et celle de ceux qui multiplient $\cos z$. Les séries qu'il obtient ainsi peuvent être regardées comme des progressions géométriques, après les six ou huit premiers termes. D'Alembert dit avoir fait divers essais inutiles pour sommer ces suites, soit exactement, soit par les quadratures, de quelques courbes, et avoir été réduit à en chercher les limites par approximation. Il parvient à ce dernier but d'une manière fort ingénieuse, en prenant la somme de deux progressions géométriques décroissantes, dont l'une soit plus petite et l'autre plus grande que la somme de tous les termes de chacune des deux séries qui suivent ceux que l'on considère directement; de manière que si l'on prend l'une ou l'autre progression pour représenter ces termes, on est sûr que l'erreur qu'on commet ainsi est moindre que la différence des sommes de ces deux progressions, et il est facile de juger par là de la quantité de l'approximation (**). On peut

Limites des séries qui les expriment aussi.

(*) Soit en effet l'équation $(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos z + C\cos 2z + \text{etc.}$; elle donnera $\int(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}} dz = Az + B\sin z + \text{etc.}$, $\int(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}} dz \cos z = \left(A + \frac{C}{2}\right)\sin z + \frac{B}{2}\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z\right) + \text{etc.}$; d'où l'on tire entre les limites 0 et 180° prises pour z,

$$A = \frac{\int(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}} dz}{180°}, \quad B = \frac{2\int(\mu - \cos z)^{-\frac{3}{2}} dz \cos z}{180°}.$$

La première de ces valeurs se change en $\int \frac{s^{-\frac{3}{2}} ds}{\sqrt{1 - (\mu - s)^2}}$, lorsqu'on y fait $\mu - \cos z = s$, et se trouve ainsi ramenée à la rectification des sections coniques.

(**) Considérons la série qui donne A, par exemple, et faisons pour cet effet $n = 3$, $p = 0$, dans le rapport de deux termes consécutifs donné plus haut : il deviendra

$$\frac{1}{\mu^2 (q+3)^2}\left(\frac{5}{2} + q\right)\left(\frac{7}{2} + q\right) = \frac{1}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right);$$

ce qui fait voir que si l'on désigne par α un terme quelconque de A, les deux termes suivans seront $\frac{\alpha}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right)$, $\frac{\alpha}{\mu^2}\cdot\frac{1}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4(q+5)^2}\right)$. On sait aussi qu'en désignant respectivement par a, d, r et s le premier et le dernier terme, la raison et la somme d'une progression géométrique, on a $s = \frac{a - rd}{1 - r}$. Si l'on supposait donc que les termes qui suivent α formassent une progression décroissante dont la raison fût $\frac{1}{\mu^2}$, et dont le dernier terme fût nul, leur somme serait $\frac{\alpha}{1 - \frac{1}{\mu^2}}$; si l'on admet au contraire que cette somme soit celle d'une progression semblable, dont la raison est $\frac{1}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right)$, elle sera exprimée par la formule $\frac{\alpha}{1 - \frac{1}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right)}$; or la

avoir des résultats de plus en plus exacts en cherchant successivement des limites dont la différence soit moins grande, et en obtenir ainsi, tant en *plus* qu'en *moins*, qui se rapprochent d'aussi près qu'on veut de la vraie valeur de chaque série.

Théorie de Jupiter et de Saturne.

D'Alembert observe que dans la théorie de Saturne et de Jupiter, quand on aura calculé les dérangemens de celui-là causés par celui-ci, les formules relatives aux facteurs irrationnels serviront de même pour le calcul des perturbations de Jupiter dues à l'action de Saturne, puisque la quantité μ est la même dans les deux cas, à cause de la symétrie avec laquelle y entrent les distances moyennes a et B. Il remarque aussi que si l'on avait besoin, pour l'exactitude du calcul, d'élever $(\mu - \cos z)$ à la puissance $-\frac{7}{2}$ et au-delà, on trouverait facilement tous les coefficiens de la nouvelle suite qui en résulterait, par le moyen de ceux de la suite qui exprime le développement de la puissance $-\frac{5}{2}$; et il donne une troisième méthode d'approximation pour trouver les termes A et B, qui s'applique au cas où μ ne diffère pas beaucoup de l'unité, comme cela arrive dans la théorie de Saturne et de Jupiter, où $\mu = 1,2$ environ, et qui conduit à des intégrations dépendantes de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole.

D'Alembert examine aussi la question de l'inégalité séculaire qui produit un ralentissement dans le mouvement de Saturne; il montre qu'il ne doit point entrer d'arcs de cercle dans son expression, mais qu'il serait possible que l'inégalité provenant du terme où Euler avait cru en trouver, pût, par sa grandeur, rendre raison des anomalies observées. Il s'occupe ensuite du mouvement des nœuds et de l'inclinaison de l'orbite des planètes, en les rapportant à l'écliptique fixe, et en faisant tous les préparatifs du calcul sans l'achever; il examine aussi le changement de la Terre en latitude, occasionné par l'action de Jupiter, et fait la comparaison de la théorie de Saturne avec les observations. Son but principal, en discutant ainsi tous les points de cette théorie d'une manière générale, est, comme il le dit lui-même, de faire voir que la méthode qu'il a employée pour l'orbite de la Lune s'applique aussi à la détermination de celle des planètes, et de s'assurer ainsi la possession de ce qu'elle peut contenir de nouveau.

Mouvement du Soleil dans l'espace.

Le chapitre 4 traite de l'orbite des planètes dans l'espace absolu. L'auteur convient que cette détermination est peut-être plus curieuse que nécessaire pour l'Astronomie, puisque le Soleil étant regardé comme fixe par les observateurs, il suffit de déterminer l'orbite des planètes, par rapport au Soleil, pour comparer la théorie aux observations. Il prouve, 1°. qu'on peut regarder le Soleil comme décrivant, dans l'espace absolu, autant de petites ellipses semblables à chacune des orbites des planètes qu'il y a de ces planètes; 2°. que les axes de ces petites ellipses sont à celui de l'orbite correspondante comme la masse de la planète est à celle du Soleil; 3°. que le Soleil décrit ces petites ellipses dans le même temps que la planète décrit la sienne, et que le mouvement réel du Soleil est composé de son mouvement dans chacune de ces petites ellipses; il trouve qu'en vertu de l'action de Jupiter et de Saturne, le Soleil décrit un petit cercle dont le

somme véritable est plus petite que celle de la première progression, dès le second terme, puisque $\frac{1}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right) < \frac{1}{\mu^2}$; elle est plus grande, dès le troisième terme, que la somme de la seconde progression, puisque $\left(1 - \frac{1}{4(q+5)^2}\right) > \left(1 - \frac{1}{4(q+3)^2}\right)$; donc l'erreur sera moindre que la différence des deux progressions, et sa limite sera moindre que leur demi-différence. (Voyez *Rech.*, t. II, p. 72.)

diamètre n'est que $\frac{1}{50}$ du rayon de l'orbite de la Terre, quantité absolument nulle par rapport à la distance énorme des étoiles fixes.

Recherches de Calcul intégral.

Le chapitre 5 a pour objet l'intégration, par diverses méthodes, de l'équation différentielle de l'orbite. D'Alembert présente entre autres celle qu'il avait déjà indiquée dans sa *Dynamique*, et qui consiste à égaler la variable au produit de deux indéterminées, dont l'une sert à poser une équation de condition qui sépare les variables, et qui réduit le problème à l'intégration de deux équations du premier ordre. Quelque méthode qu'on emploie, l'intégrale ne se présente jamais sous une forme imaginaire.

Le chapitre 6 et dernier a pour objet l'application de la solution générale donnée par l'auteur à différentes hypothèses. Il examine d'abord la construction de la trajectoire, dans le cas où la force tangentielle $\pi = 0$, et où la force centrale ψ est proportionnelle à une fonction quelconque du rayon x; il fait voir qu'elle sera tantôt une section conique à apsides mobiles, tantôt une courbe mécanique, comme une spirale, et cela donne lieu à des problèmes de calcul intégral, qu'il résout de diverses manières. Il analyse ensuite quelques cas où π n'est pas nul; il s'occupe enfin des trajectoires décrites dans un milieu résistant, et en conclut comme Newton (*Princ.*, liv. III, prop. 10), que l'espace dans lequel les planètes se meuvent est ou absolument vide, ou rempli d'une matière fort rare, dont la résistance est très petite, et ne peut être sensible tout au plus qu'au bout de plusieurs siècles.

Pièce d'Euler sur les inégalités de la Terre, couronnée en 1756.

Euler qui, dans un Mémoire compris dans ceux de l'Académie de Berlin pour 1754, avait le premier développé la cause de la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique, en montrant qu'elle était due à l'action des planètes environnantes, concourut aussi au prix double sur les inégalités de la Terre, que l'Académie de Paris avait proposé pour 1756, et le remporta. Sa pièce, écrite en latin, a pour titre : *Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur.* Elle est imprimée dans le tome VIII des *Prix*, qui ne parut qu'en 1771, et dont elle occupe 138 pages (*).

La théorie du mouvement de la Terre, dont les élémens peuvent être déterminés, par les observations du Soleil, plus exactement que ne le sont ceux des autres planètes, était un problème fort étendu et plus compliqué que tous ceux dont on s'était jusqu'alors occupé; puisque, d'après la situation de la Terre, qui se trouve comme intermédiaire entre les autres planètes, il était nécessaire de déterminer les dérangemens que l'action simultanée de chacune d'elles produisait sur la nature et la position de son orbite; mais la petitesse de ces perturbations servit à Euler pour simplifier beaucoup sa solution, en lui permettant de supposer que la coexistence des actions ne changeait l'influence d'aucune d'elles en particulier, et en l'autorisant d'après cela à calculer séparément les effets de chaque planète sur la Terre.

Son ouvrage est divisé en deux parties. Dans la première, comprenant neuf sections, l'auteur traite la question des perturbations des planètes dans toute sa généralité; la seconde renferme l'application de la théorie précédente au mouvement de la Terre et à

(*) Les épigraphes d'Euler, tirées des anciens poètes, vont si bien au sujet, qu'on pourrait presque les attribuer à des disciples de Newton; telle est celle du Mémoire actuel relatif à la terre :

» *Sidera quod tantis cieant se viribus æquis*
» *In motu Terræ plurima signa docent.*

Et celle de la pièce de 1748, plus remarquable encore :

» *Ponderibus librata suis per inane profundum*
» *Sidera, quo vis alma trahit retrahit que sequuntur.*

ses perturbations produites par l'action de toutes les autres planètes. Quoique la première soit très remarquable, comme présentant une théorie générale également applicable à toutes les planètes, et contenant un ensemble assez complet de toutes les idées heureuses d'Euler sur ce sujet, avec la démonstration de ses procédés, l'auteur les ayant déjà pour la plupart énoncés dans des ouvrages antérieurs dont nous avons parlé, il nous suffira de donner une idée de sa marche et de quelques-uns de ses nouveaux résultats.

1re partie. Recherche générale des perturbations des planètes.

La première section a pour titre : *Recherche générale du mouvement d'un corps poussé par des forces quelconques*. Là, comme dans sa théorie de la Lune, de 1753, l'auteur entre dans tout le détail de la formation des quatre équations fondamentales du problème, en les mettant toutes, comme dans l'*Additamentum* placé à la suite de cette théorie, sous la forme d'équations du premier ordre à variables séparées, où certains termes qui dépendent des forces restent encore sous le signe $\int$. Euler met le signe — devant l'expression de l'élément dt du temps, parce qu'il suppose, avec les astronomes, le mouvement compté à partir de la plus grande distance.

Forme donnee aux équations du problème.

Le seconde section renferme la réduction des formules précédentes au cas où le mobile est principalement soumis à l'action d'une force dirigée vers un point fixe, et en raison inverse du carré des distances, à l'égard de laquelle les autres forces sont très petites. Euler y applique à la théorie des planètes la méthode qu'il avait indiquée pour la Lune, dans l'*Additamentum;* il exprime, comme Clairaut, que la force centrale est composée de deux parties, l'une venant du Soleil, l'autre de l'action des corps environnans, et très petite par rapport à la première. Il remarque ensuite que, malgré l'action mutuelle des planètes, on peut supposer que leur mouvement a toujours lieu dans une ellipse dont le Soleil occupe le foyer, pourvu que cette ellipse soit regardée comme variable tant en grandeur et en espèce, que relativement à la position de la ligne des apsides. Cette représentation des perturbations lui paraît très convenable, en ce qu'elle permet de réduire la solution à des formules du premier ordre, qui donnent, chacune séparément, la différentielle d'un élément en fonction de celle du moyen mouvement et des forces, sans qu'il y entre de radical ni d'autres différentielles; il la croit commode pour les astronomes, qui, accoutumés déjà au mouvement elliptique, aiment mieux s'y borner que d'admettre dans leur calcul des courbes plus compliquées; et il observe, p. 67, que puisqu'on a employé cette considération de la variation des élémens pour la Lune, à plus forte raison peut-on le faire pour les planètes, dont les inégalités sont plus petites, et dont on suppose déjà les orbites mobiles.

Il considère l'orbite de la planète troublée comme une ellipse à élémens variables.

La section 3 comprend la recherche des forces perturbatrices. Après avoir mis ses formules générales sous leur plus simple expression, et les avoir rendues ainsi tout-à-fait analogues à celles que nous avons rapportées au bas de la p. 51, l'auteur observe que si l'on y suppose nulle la force de la planète troublante, le paramètre de l'ellipse de la planète troublée devient bien constant, mais que son excentricité et la position de sa ligne des apsides restent variables; il attribue cette espèce de paradoxe à ce qu'ayant projeté l'orbite de la planète, cette projection est bien une ellipse, mais son foyer n'occupe pas constamment le même point. Il propose de l'éviter, en considérant le mouvement de la planète dans son propre plan; l'inconstance de l'orbite présenterait alors, il est vrai, d'autres inconvéniens, si la petitesse de son inclinaison ne permettait de séparer le calcul en deux parties : l'une où l'on considère le mouvement de la planète dans son orbite

comme si elle était plane, et où l'on cherche les variations de l'anomalie vraie et de l'aphélie, en supposant nulle la latitude; l'autre où l'on détermine séparément, pour un temps quelconque, tant la position de la ligne des nœuds, que l'inclinaison de l'orbite.

Mouvement de la planète dans son orbite.

Euler suppose, en traitant d'abord le premier cas, que la planète troublante se meut conformément aux lois de Kepler. Ses formules forment alors un système complet au moyen duquel on peut, en faisant $d\omega = 147'' \frac{5}{8}$, angle moyen décrit par le Soleil en une heure, calculer les variations horaires de tous les élémens. On pourrait même, dit-il, obtenir ainsi la variation diurne en procédant de t à $t+1$, $t+2$, etc. heures, et en faisant successivement le calcul pour tous les momens; mais quelques petites que fussent les erreurs, elles s'accumuleraient toujours et finiraient par être sensibles. Il faut donc nécessairement avoir recours à l'intégration.

Variations horaires.

L'auteur se livre, dans la quatrième section, à des considérations préliminaires sur ce sujet. Il regarde comme un avantage de sa solution que l'excentricité de la planète troublée ne soit jamais assez petite pour que ses variations soient considérables par rapport à sa valeur moyenne; mais il remarque comme un grand défaut des méthodes connues, qu'on ne puisse intégrer que par des développemens en fonction des sinus et cosinus des anomalies, des longitudes, et de leurs multiples, tandis qu'il pourrait cependant arriver que les véritables expressions continssent d'autres angles, tels que les distances angulaires du corps troublant au corps troublé ou au Soleil, que l'on ne sait pas trop comment introduire dans le calcul. Ce serait, dit-il, un grand service à rendre à l'Astronomie, que d'étendre sous ce rapport les bornes de l'analyse. Il passe de là au développement de l'inverse du cube de la distance des deux planètes, qui est nécessaire pour qu'on puisse intégrer, et qui introduit le radical $(1 - s\cos n)^{-\frac{3}{2}}$, qu'il décompose en une suite de termes procédant suivant les cosinus des divers multiples de l'élongation n, en poussant beaucoup plus loin qu'il ne l'avait encore fait le développement des séries qui expriment les deux premiers coefficiens (*).

Intégration des formules générales.

La section 5 contient le développement des formules différentielles en séries qui procèdent suivant les sinus et cosinus de l'élongation n, et des anomalies vraies v et u, en négligeant les carrés des deux excentricités k et e, leur produit, et même la première puissance de celle de la planète troublante. L'auteur examine, dans la section 6, le résultat de ces opérations, et il intègre sans avoir recours, comme dans la pièce de 1752, à une anomalie particulière, mais en substituant dans chaque terme, pour $d\omega$, une valeur approchée en fonction de la différentielle de l'angle qui y entre (**); il ne trouve alors

(*) Ainsi faisant $\frac{2xy}{x^2+y^2} = s$, $(1 - s\cos n)^{-\frac{3}{2}} = P + Qs\cos n + Rs^2\cos 2n +$ etc., il prend pour $P(1-s^2)$ et $\frac{1}{2}Q(1-s^2)$, des séries, qui vont jusqu'à s^{16} pour l'une et s^{16} pour l'autre; il donne aussi pour les obtenir les deux formules

$$P(1-s^2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}\left(\frac{1-z^2}{s^2-z^2}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad Q = 2P - \frac{1}{s^2}\int Ps\,ds,$$

en supposant dans la première $z = s$ après l'intégration.

(**) On a en général $dn = (i-m)\,d\omega - 2ikd\omega\cos v + 2med\omega\cos u$, i et m étant les rapports des moyens mouvemens des planètes troublée et troublante à celui du Soleil.

Il suppose, en conséquence, pour intégrer le terme $\int d\omega \sin n$, $d\omega = \frac{dn}{i-m} + \frac{2ikd\omega}{i-m}\cos v$; il fait de même pour $\int d\omega \sin(n+v)$, $d\omega = \frac{dn+dv}{2i-m} + \frac{4ikd\omega}{2i-m}\cos v$, en négligeant le second terme qui en produirait un en k^2; et ainsi de suite.

pour le paramètre, le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite, que des variations périodiques, qui, après un certain intervalle de temps, reviennent au même état, et produisent alternativement des accroissemens et des décroissemens égaux. Mais ces résultats, si contraires à ceux de sa précédente pièce, n'étant obtenus qu'en négligeant l'inclinaison, l'une des excentricités, et en n'ayant égard qu'à la première puissance de l'autre, ils devaient naturellement être incomplets, et les travaux postérieurs ont montré en effet qu'ils n'étaient rigoureusement vrais que pour le grand axe.

Détermination du plan de l'orbite.

La section 7 a pour objet la recherche de l'anomalie vraie en tant qu'elle est troublée par l'action mutuelle des planètes; la section 8 contient l'exposition du calcul complet du lieu vrai dans l'orbite; enfin la neuvième renferme le développement des inégalités de la ligne des nœuds et de l'inclinaison. Nous renvoyons à l'ouvrage lui-même pour les détails.

2e partie. Application au mouvement de la Terre.

Euler fait voir, dans la seconde partie, que le mouvement des nœuds de chaque planète est un effet mixte qui provient à la fois de la mobilité de leur orbite, et de celle de l'écliptique; et qu'ainsi il vaut mieux le rapporter à un plan fixe. Il ne considère pas l'action de la Lune sur la Terre, dont le programme de l'Académie n'exigeait pas le calcul, et il se contente d'appliquer successivement la théorie précédente à la recherche des inégalités du mouvement de la Terre, qui proviennent de l'action de Saturne, de Jupiter, de Mars et de Vénus, en consacrant à chaque planète un paragraphe particulier. Il adopte, pour les deux premières, les valeurs des masses données par Newton, et ne pousse que jusqu'à la sixième ou à la dixième puissance de *s* le calcul des deux premiers termes du radical. Quant aux deux dernières planètes, il va jusqu'à la seizième et à la dix-huitième puissance, à cause de la petite différence entre leurs orbites et celle de la Terre. Ayant remarqué que les nombres 67,95 et 400, indiqués par Newton pour le rapport des densités de Saturne, Jupiter et la Terre, étaient proportionnels à la racine carrée de leurs moyens mouvemens, il suppose que le même rapport a lieu pour les autres planètes : ce qui lui donne, en prenant d'ailleurs leurs volumes tels que Lemonnier les avait déterminés, les nombres 0,018-0,42 et 0,04 pour les rapports des masses de Mars, Vénus et Mercure à celle de la Terre prise pour unité. La comparaison du calcul avec les phénomènes lui sert à les vérifier, et lui permet ensuite de déterminer les inégalités avec plus de précision. C'est ce qu'il fait dans sa *Conclusion*, où il rassemble toutes les inégalités du mouvement de la Terre, et montre qu'elles produisent trois genres d'effets. 1°. Un mouvement direct de 12″ 44‴ par an dans l'aphélie de la Terre ou l'apogée du Soleil; 2°. des corrections dans le lieu de la Terre ou du Soleil, qui proviennent de l'action de Jupiter et de Vénus, et peuvent monter à 10″; 3°. des changemens dans la latitude des étoiles fixes, qui diffèrent suivant leur position sur la sphère céleste, et une diminution d'environ 48″ par siècle dans l'obliquité de l'écliptique.

Mémoire de Clairaut sur les inégalités de la Terre.

Clairaut présenta aussi à l'Académie, le 9 juillet 1757, un Mémoire *sur l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la Lune et des planètes principales*. Il se trouve dans les *Mém. de Par.* pour 1754. « La nouvelle détermination que je donne maintenant de l'orbite de la Terre, » est, dit-il, beaucoup plus exacte que celle de 1747; soit parce que j'ai eu égard à l'ex- » centricité de l'orbite de la Terre, qui introduit dans le calcul du lieu deux équations » provenant de l'action de la Lune, comparables à celle qui était déjà connue; soit » parce que j'ai considéré les dérangemens produits par les planètes principales. Je



» n'ai pas eu égard, sur ce point, à plus de circonstances que M. Euler ne l'a fait, dans » la belle pièce qui vient de remporter le prix de l'Académie sur la même matière; » mais comme ma solution du problème des trois corps m'a paru d'un usage plus facile, » dans cette occasion, que la sienne, je n'ai pu me refuser à l'envie d'en faire l'appli- » cation, et j'ai cru qu'on me saurait gré d'avoir examiné de mon côté une matière » aussi importante pour l'Astronomie. Les recherches très délicates que M. l'abbé de » La Caille a faites sur le Soleil, tant à Paris qu'au cap de Bonne-Espérance, me met- » taient à portée de savoir promptement si l'observation s'accordait avec la théorie à cet » égard. C'est une satisfaction que j'ai eue..... J'ai tiré de cette comparaison une déter- » mination de la masse de la Lune, qui la donne 67 fois plus petite que celle de la » Terre; quantité sensiblement moindre que celle que Newton a trouvée, en partant de » ses Recherches sur le flux et reflux de la mer. Ce résultat s'accorde avec ceux auxquels » sont parvenus MM. Bernoulli, Euler et d'Alembert, d'après les phénomènes des marées » et de la nutation de l'axe terrestre.

» Quant à la masse de Vénus, la méthode la plus directe et la plus sûre pour la » déterminer aurait demandé qu'on eût un grand nombre d'observations du Soleil dans » les temps où l'action de la Lune est nulle. Au défaut de ce moyen, j'ai eu recours » à un autre moins parfait en lui-même, mais qui paraît d'une exactitude suffisante : il » est fondé sur ce que l'action de Vénus variant peu pendant la distance d'une qua- » drature de la Lune à la suivante, on peut fixer assez bien la masse de la Lune, sans » être obligé de connaître que très médiocrement la masse de Vénus. Ainsi, par un tâ- » tonnement très facile, on sépare les deux difficultés de la question; la première étant » résolue, il ne faut plus pour venir à bout de la seconde, que parcourir la suite des » équations que l'action de Vénus, supposée d'abord de masse égale à la Terre, donnerait » pour tous les lieux du Soleil observés, et chercher ensuite dans quel rapport constant il » convient de diminuer ou d'augmenter toutes ces équations pour les faire cadrer le » mieux qu'il est possible avec les observations. M. l'abbé de La Caille, qui a fait cette » comparaison, a trouvé qu'en réduisant aux trois quarts les équations de Vénus, ce » qui indique que la masse de cette planète est environ les $\frac{2}{3}$ de celle de la Terre, » l'accord de la théorie et des observations était le plus complet. » Cette valeur était un peu trop petite; mais celle que Clairaut adopta, d'après Newton, pour la masse du Soleil, en la supposant égale à 169282 fois la masse de la Terre, était encore bien moins exacte, puisque les passages de Vénus ont prouvé que cette masse était au moins double.

Formules générales.

L'article premier du Mémoire de Clairaut a pour titre : *Principes fondamentaux pour la détermination des perturbations que les planètes se causent.* La méthode qu'il y expose est tout-à-fait analogue à celle dont nous nous sommes occupé, part. I, chap. 2. L'auteur prend, comme pour la Lune, l'équation d'une ellipse mobile dont les constantes sont indéterminées, pour équation approchée de l'orbite; il la substitue dans l'expression de la fonction perturbatrice Ω, qui se réduit à une série de termes de la forme $A\cos qv$, dont chacun en amène un autre de la forme $-\frac{A}{q^2-1}\cos qv$ dans l'expression de $\frac{p}{r}$. La somme de ces derniers donne la valeur de ξ, qu'il substitue dans la correction du temps, en ne considérant que les deux premiers termes qui sont sous le signe $\int$; et le résultat, pris avec un signe contraire, indique, lorsqu'on y met la longitude moyenne x à la place de la

vraie v, la correction qu'il faut faire au mouvement moyen pour avoir le mouvement vrai.

Actions de la Lune et de Jupiter.

L'article second a pour objet la correction du lieu du Soleil, qui est due à l'attraction de la Lune. L'auteur suppose l'orbite de celle-ci circulaire, et dans le même plan que celle de la Terre, et il obtient, en désignant par t le lieu moyen de la Lune moins le lieu moyen du Soleil, et par z l'anomalie moyennne du Soleil, la formule............... $+ 12'' \sin t + 2'',9 \sin(t+z) - 2'',7 \sin(t-z)$; mais M. Laplace a trouvé, au rapport de Lalande (*Mém. de Par.*, 1786, p. 404), que les deux dernières équations ne doivent point avoir lieu, et qu'elles sont le résultat d'une omission faite par Clairaut dans sa théorie. Il en est de même pour les deux équations analogues que trouve celui-ci dans la correction du lieu du Soleil due à l'action de Jupiter, dont il fait le calcul dans l'article 3, en supposant l'orbite de cette planète circulaire.

Détermination des deux premiers coefficiens de la série qui exprime le facteur irrationnel, par les quadratures.

L'article 4 a pour titre : *De la manière de convertir une fonction quelconque* T *de* t *en une série telle que* $A + B \cos t + C \cos 2t +$ etc. Parmi les différens moyens proposés par Euler pour déterminer avec précision les termes dont on a besoin, Clairaut choisit celui qui dépend de la division des arcs de cercle, parce qu'il lui paraît qu'avec de légers changemens, cette méthode, sans être fort pénible dans l'exécution, peut donner très exactement les nombres dont il s'agit. « Ces changemens rendent, dit-il, la » construction de M. Euler semblable à celle que M. d'Alembert a donnée pour le » même objet (*Rech.*, t. II, p. 66) ; mais ce dernier auteur n'a pas pensé à ce qui » rend la méthode praticable ; et d'ailleurs le chemin que j'ai suivi dans la même re- » cherche, m'a paru devoir être celui que l'inventeur, M. Euler, a caché. » Clairaut imagine, en suivant l'esprit de la méthode par laquelle on substitue une ligne parabolique à une courbe donnée, que les arcs t soient placés sur un axe, et servent d'abscisses aux ordonnées T ; il suppose ensuite que H, I, K, L, etc., soient ce que devient la fonction T, lorsqu'on y fait t successivement égal à $\frac{c}{n}, \frac{2c}{n}, \frac{3c}{n}$, etc, c étant la circonférence ; il montre alors que, d'après la théorie de la multisection des angles, il suffit d'ajouter ensemble toutes ces quantités, et de diviser leur somme par n, pour avoir la valeur de A dégagée des autres inconnues ; et qu'on trouve, d'une manière analogue, celle des autres coefficiens B, C, D, etc., par une formule générale, qu'on peut appliquer à des fonctions de t beaucoup plus compliquées, dans les cas même où la loi de la fonction ne serait pas donnée algébriquement, et où la courbe qui l'exprime ne serait donnée que par plusieurs points (*). D'Alembert a remarqué, dans le second volume de ses

---

(*) Soit $H = A + B \cos\frac{c}{n} + C \cos\frac{2c}{n} + D \cos\frac{3c}{n} +$ etc., $I = A + B \cos\frac{2c}{n} + C \cos\frac{4c}{n} +$ etc.,

$K = A + B \cos\frac{3c}{n} + C \cos\frac{6c}{n} + D \cos\frac{12c}{n} +$ etc., et ainsi de suite ; on aura, en remarquant que chacun des cosinus qui multiplient B est une des racines de l'équation $y^n - 1 = 0$, qui, étant sans second terme, doit avoir la somme de ses racines égale à zéro, et en observant qu'il en est de même pour les autres lettres (*Mém. de Par.*, 1754, p. 546, et *Calc. int.* de M. Lacroix, § 462) :

$A = \frac{1}{n}(H + I + K + L + \text{etc.})$, et en général, $S = \frac{1}{2n}\left(H \cos\frac{pc}{n} + I \cos\frac{2pc}{n} + K \cos\frac{3pc}{n} + \text{etc.}\right)$,

S étant le coefficient correspondant au multiple p d'un terme cherché.

Si l'on suppose n infini, il est clair que la somme des quantités H, I, etc., c'est-à-dire des valeurs successives de T, sera $\int T dt$, et qu'ainsi la valeur rigoureuse de A sera $\int \frac{T dt}{c}$, en faisant $t = c$ après l'intégration.

Opuscules, que ce procédé n'était au fond qu'un savant détour pour parvenir précisément au même résultat qu'il avait obtenu plus simplement. En effet, lorsqu'il est question de passer de la théorie à l'exécution, Clairaut s'en tient à la forme intégrale des coefficiens cherchés et aux quadratures qu'elle indique. « Les courbes, dit-il, qu'on » a besoin de carrer étant tracées seulement à peu près par plusieurs points, on voit » au premier coup-d'œil les parties qui sont d'une courbure assez considérable pour » demander qu'on rende les ordonnées voisines les unes des autres, et celles qui per- » mettent qu'on ne les prenne que de loin en loin. Dans le premier cas, je traite un arc » qui passe par quatre ou cinq points voisins, comme celui d'une ligne parabolique, » et je prends autant de ces arcs qu'il est nécessaire pour mesurer exactement la partie » la plus courbée; dans les autres, il suffit de prendre la courbe pour un assemblage de » lignes droites. Au reste, à l'exemple de M. Euler, je n'emploie cette méthode d'ap- » proximation que pour les lettres A et B, et je parviens, par un procédé qui m'est » propre, à la relation que tous les coefficiens cherchés ont les uns avec les autres. »

Action de Vénus.

Clairaut applique ensuite, dans l'article 5, ces procédés à la recherche des équations du lieu du Soleil qui dépendent de l'action de Vénus, en supposant les deux orbites circulaires et dans le même plan, et en s'arrêtant au cosinus du quatrième multiple de t. Il parvient ainsi à la formule $10'' \sin t - 11'',5 \sin 2t - 1'',4 \sin 3t - 0'',4 \sin 4t$. Lexell ayant depuis approfondi cette matière (*Mém. Pétersb.*, 1779, part. II, pag. 390), est arrivé à peu près au même résultat, et Fuss a trouvé aussi, par un travail suivi et une méthode différente, que la théorie de Clairaut était exacte. (Voyez *Mém. de Berlin*, 1784, p. 237.)

L'article 6, intitulé : *Diverses applications de la théorie précédente*, est consacré à la détermination des masses, et à la recherche des temps où toutes les actions des planètes sur la Terre se réunissent pour altérer le plus qu'il est possible le lieu du Soleil. L'auteur fait voir que le *maximum* de cette action monte à environ 1′, et que c'est à cela que peuvent tenir les différences faussement attribuées à des variations de l'équation du centre.

Le Mémoire précédent est clair, concis et méthodique, et ses résultats ont servi à La Caille pour les nouvelles Tables du Soleil, qu'il publia en 1758; Clairaut annonce, en le terminant, qu'il se propose d'en donner un autre sur le mouvement du Soleil en latitude, qui résulte de l'action des mêmes planètes qu'il a considérées dans celui-ci; mais il n'a pas exécuté ce projet.

Applications de la solution de Clairaut faites par Lalande.

Lalande calcula le premier, en 1758, les inégalités de Mars produites par l'action de Jupiter; en 1760 celles de Vénus causées par l'attraction de la Terre, et en 1761, celles de la Terre dues à l'action de Mars. Ses Mémoires, compris dans ceux de l'Académie des Sciences, contiennent tous les détails de l'application à ces divers cas de la méthode de Clairaut qu'il a constamment suivie, ainsi que l'a fait Bailly, dès 1762, pour la théorie des satellites de Jupiter.

Le calcul des dérangemens de Mars, dus à l'action de Jupiter, n'exigeait pas que l'approximation fût poussée très loin dans le développement des facteurs irrationnels, à cause de la grande différence des distances de ces planètes au Soleil; mais il n'en était pas de même de celui des inégalités de Vénus, que Lalande avait entrepris à l'occasion du passage de 1761. Cet astronome détermine dans ce cas les valeurs de la

quantité $(\mu-\cos z)^{-\frac{3}{2}}$ de d'Alembert, lorsqu'on prend successivement pour z tous les degrés compris entre o et 180°, en observant que dans le second quart de cercle $-\cos z$ devient une quantité positive; il regarde ces cent quatre-vingt-une valeurs comme les ordonnées consécutives d'une courbe parabolique, et il obtient l'expression de A, en prenant l'aire de cette courbe par approximation : ce qui se réduit à ajouter le tiers des ordonnées extrêmes aux deux tiers de celles de numéro impair et aux quatre tiers de celles de numéro pair, et en divisant cette somme par 180° (*). La valeur de B exige un calcul semblable, avec cette différence, que tous les termes doivent être multipliés par $\cos z$, et que la somme doit être divisée par 90°. seulement. Lalande trouve ainsi pour Vénus des inégalités qui vont jusqu'à une demi-minute en *plus* et en *moins ;* mais comme les principales dépendent de l'angle de commutation z, il en conclut qu'elles ne sont pas sensibles lors des passages de cette planète sur le Soleil.

Dans le cas de Mars troublé par la Terre, les excentricités des deux orbites devant entrer dans le calcul des distances, et les équations du centre dans le calcul des angles, Lalande a égard alors au second radical, dont il exprime les coefficiens au moyen de A et B. Il calcule ceux-ci de la même manière que pour Vénus, mais en ne prenant leurs élémens que pour tous les degrés pairs depuis o à 180°, et en divisant par conséquent la somme définitive relative à A, par 90, et celle qui donne B, par 45. Cette méthode de déterminer par petites parties la surface d'une courbe donnée par points, n'est guères applicable que quand les ordonnées consécutives sont peu différentes; car, lorsque les changemens sont brusques et considérables, elle n'est pas d'une exactitude suffisante; aussi d'Alembert préférait-il celle des rectifications comme étant plus rigoureuse. Lalande obtint ainsi, en ayant égard à quelques-uns des termes de l'ordre du carré de l'excentricité, une formule dont il fit part à Mayer. Celui-ci lui envoya le résultat d'un semblable travail qu'il avait fait par les méthodes d'Euler, et qui s'accordait assez avec celui de Lalande.

Nouveau dérangement observé dans le mouvement de Saturne.

Mayer s'occupa aussi des théories de Jupiter et de Saturne, et soumit, sans beaucoup de succès, les formules d'Euler aux observations, afin de rendre les premières plus exactes. Lalande remarqua, en 1764, que les observations indiquaient un dérangement singulier dans le mouvement de Saturne, qui rendait sa révolution moyenne très différente,

(*) En effet, nous avons trouvé, page 142,

$$A=\int\frac{(\mu-\cos z)^{-\frac{3}{2}}dz}{180°},\quad B=\int\frac{(\mu-\cos z)^{-\frac{3}{2}}\cos z.dz}{90°}.$$

Soit $(\mu-\cos z)^{-\frac{3}{2}}=y$, et désignons par a, b et c les valeurs de y correspondantes aux valeurs o, 1 et 2 prises pour z.

L'équation des courbes paraboliques de Newton, $y=m+nz+pz^2+qz^3+$ etc., devient, en exprimant que les ordonnées a, b, c correspondent aux abscisses o, 1, 2,

$$y=a+(b-a)z+\left(\frac{a}{2}-b+\frac{c}{2}\right)z(z-1),\text{ d'où l'on tire }\int ydz=az+\frac{b-a}{2}z^2+\left(\frac{a}{2}-b+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right),$$

et en prenant l'intégrale entre les limites $z=0$, $z=2$, $\int ydz=\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c$; par la même raison, la surface comprise entre les ordonnées c, d, e sera $\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}d+\frac{1}{3}e$, et ainsi de suite; et la surface comprise entre a et e sera égale à $\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{2}{3}c+\frac{4}{3}d+\frac{1}{3}e$.

suivant les circonstances où l'on observe, et faisait que la durée des deux révolutions, comprises entre 1701 et 1760, était plus courte de six jours et demi qu'elle n'avait été dans un pareil intervalle entre 1686 et 1745; différence qui ne lui paraissait pouvoir être produite ni par l'action de Jupiter, ni par aucune des causes connues, puisque les deux planètes se trouvaient, à quelques degrés près, à la même configuration et au même point du ciel dans les deux cas.

CHAPITRE III.

Premières Recherches de Lagrange et de M. Laplace sur la théorie des Planètes.

Nous venons de voir Euler, d'Alembert et Clairaut, dont nous avons admiré les travaux dans la théorie de la Lune, poser les bases de celle des planètes, surmonter déjà de grandes difficultés, en indiquer d'autres sans les résoudre, et donner aux tables, par leurs formules, une plus grande exactitude; mais il restait encore des points très importans à éclaircir, et un grand nombre de découvertes brillantes à faire, dont l'exposition va nous occuper. Nous verrons que la plupart de celles-ci sont dues aux deux mêmes géomètres qui ont aussi perfectionné la théorie de la Lune, et qu'ainsi, depuis Newton jusqu'à la fin du siècle dernier, cinq hommes ont presque tout fait dans l'une des parties les plus difficiles et les plus avancées de l'Astronomie.

Mémoire de Lagrange contenu dans le t. 3 des *Mélanges de Turin*.

Le troisième volume des *Miscellanea Taurinensia*, publié en 1766, et qui contient les Mémoires des années 1762—1765, en renferme un de Lagrange, intitulé : *Solution de différens problèmes de calcul intégral*, qui occupe deux cents pages; ce Mémoire, qui parut presqu'en même temps que les *Recherches* du même auteur *sur les inégalités des satellites de Jupiter*, couronnées en 1766, peut, sous le point de vue dont nous nous occupons, être divisé en deux parties. La première, qui contient des méthodes générales d'intégration, est remarquable, tant par le nombre et la nouveauté de celles-ci, que par l'ordre dans lequel elles sont exposées, en allant du simple au composé, et par l'usage que l'auteur y fait des indéterminées pour intégrer et faire disparaître les arcs de cercle; la seconde, qui renferme une théorie de Jupiter et de Saturne, est bien digne aussi de fixer l'attention, soit par divers procédés ingénieux qui y sont exposés, et qui se trouvent aussi dans la pièce sur les satellites de Jupiter, soit par la méthode que l'auteur y donne pour parvenir aux équations séculaires de tous les élémens, et par les résultats nouveaux auxquels elle le conduit.

1re partie. Méthodes diverses d'intégration.

Lagrange s'occupe d'abord de l'intégration de l'équation différentielle

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \text{etc.} = T,$$

dans laquelle L, M, N, T, etc., sont des fonctions de t. Il la multiplie par zdt, z étant une variable indéterminée; puis il intègre par parties, de manière à faire disparaître les différentielles de la variable y de dessous le signe $\int$, et profite de l'indétermination de z pour égaler à zéro tout ce qui demeure sous ce signe, de manière que l'équation restante soit d'un ordre moins élevé d'une unité que la proposée. Ainsi, si l'on peut

trouver une valeur de z qui satisfasse à l'équation de condition, on aura tout de suite l'intégrale cherchée ; si l'on a deux valeurs différentes de z qui satisfassent également à cette équation, on aura, par la substitution de ces valeurs, deux intégrales, à l'aide desquelles on éliminera la plus haute différentielle de y, et l'équation qui en résulte sera l'intégrale seconde de la proposée, et ainsi de suite. L'auteur fait voir qu'on aura autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant m de l'ordre de l'équation différentielle, et que celle-ci sera intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura m ou $m-1$ valeurs de y en t dans le cas de $T=0$. Il s'occupe de l'intégration d'un grand nombre d'équations analogues, et en tire la solution de quelques problèmes concernant le mouvement des fluides et la théorie des cordes vibrantes.

Moyens de faire disparaître les arcs de cercles dans les intégrales approchées.

Lagrange indique ensuite, page 262, une nouvelle manière d'intégrer par approximation l'équation $\frac{d^2y}{dt^2}+K^2y+L+iMy^2+i^2Ny^3+\text{etc.}=0$, où K, L, etc., sont des constantes quelconques, et dans laquelle i marque un coefficient très petit. Il observe d'abord que si l'on commençait par intégrer l'équation, en négligeant les termes en i, et qu'on substituât cette première valeur dans le terme iMy^2, cela ferait naître la quantité $iA\cos Kt$, qui amènerait, par une nouvelle intégration, le terme $iBt\sin Kt$ dans la valeur de y, et que, si l'on continuait le calcul de la même manière, on trouverait encore des termes multipliés par t^2, t^3, etc. Il démontre cependant que la valeur de y ne peut jamais passer du fini à l'infini, et que, puisque t peut devenir infini, il s'ensuit que la valeur de y en t ne doit point contenir de termes qui croissent avec t. Il indique alors un procédé pour les faire disparaître ; il consiste à faire $y=y'+\lambda+i\mu+i^2\nu+\text{etc.}$, λ, μ, ν étant des constantes indéterminées et y' une nouvelle variable ; à substituer cette valeur dans l'équation différentielle, en désignant par R^2 le coefficient qu'a alors y' ; à intégrer une première fois en faisant $i=0$; à remettre ensuite l'expression de y' obtenue ainsi dans le terme iMy'^2, et à profiter de l'arbitraire λ pour égaler à zéro le coefficient de $\cos Rt$, qui aurait fait naître un arc de cercle par une nouvelle intégration. Si l'on veut pousser le calcul jusqu'à l'ordre suivant, on fera disparaître le terme $i^2\cos Rt$ de la même manière, en déterminant l'arbitraire μ à être telle que le coefficient de ce terme soit égal à zéro, et ainsi de suite. On peut remarquer l'analogie qu'il y a entre ce procédé et celui qu'employait Clairaut pour faire disparaître son terme en $\cos v$.

Lagrange expose ensuite une autre méthode pour le même objet, qui est plus compliquée, mais qui a sur la précédente l'avantage de donner directement, et sans aucune supposition précaire, la vraie forme de l'intégrale. Supposant qu'on ne veuille avoir égard qu'aux quantités de l'ordre de i et de i^2, il fait $y^2=u$, $y^3=v$, et forme deux nouvelles équations en d^2u et d^2v analogues à celle en d^2y ; mais comme u et v sont respectivement multipliés dans celle-ci par i et i^2, il rejette dans la première les termes de l'ordre i^2 et dans la seconde ceux de l'ordre i ; il ajoute ensuite ces trois équations, après avoir multiplié celle en y par $\lambda e^{\rho t}dt$, celle en u par $\mu e^{\rho t}dt$, celle en v par $\nu e^{\rho t}dt$; il intègre en faisant disparaître de dessous le signe $\int$ les différentielles de y, u, v, et en égalant séparément à zéro les coefficiens de chacune de ces variables qui sont sous ce signe ; il obtient alors, d'un côté trois équations pour déterminer les constantes λ, μ, ν, ρ, et de l'autre une équation du premier ordre, où les trois variables sont séparées, et où

il entre une nouvelle constante, qu'il détermine d'après les valeurs de y et de sa dérivée quand on a $t=0$. La quantité μ est de l'ordre de i, et ν de l'ordre de i^2; ϱ étant déterminée par une équation du second degré, a deux valeurs qui sont de la forme $+ R\sqrt{-1}$ et $-R\sqrt{-1}$. Lagrange les substitue alternativement dans l'équation réduite au premier ordre, en y remettant pour ν et u leurs valeurs, et en changeant les exponentielles imaginaires en sinus et cosinus; il retranche ensuite les deux résultats l'un de l'autre, et, divisant par $2R\sqrt{-1}$, il obtient l'intégrale cherchée; celle-ci contient encore les trois premières puissances de l'inconnue y, mais il en tire, en la résolvant par approximation, la valeur de y, qui se trouve bien être la même que celle qu'il a obtenue par la première méthode. Il s'occupe ensuite, page 274, du mouvement d'un corps qui décrit une orbite à peu près circulaire, en vertu d'une force centrale proportionnelle à une fonction quelconque de la distance.

Il considère, article 52, le système de deux équations du second ordre, dont les seconds membres sont nuls, où les variables sont y, z, et se trouvent à la fois dans chaque équation, ainsi que leurs puissances et produits de la seconde et de la troisième dimension, ceux-ci respectivement multipliés par i et par i^2; il emploie pour les intégrer le même procédé dont il vient de faire usage pour une seule équation de cette espèce, en désignant chaque puissance, ou produit de y et z, par une lettre particulière, et en formant autant de nouvelles équations qu'il y a de ces lettres. Il remarque que, pour que les valeurs de y et de z ne contiennent que des sinus et des cosinus, il faut que les racines de l'équation du quatrième ordre qui donne ϱ, soient toutes deux réelles, négatives et inégales.

Intégration des équations où les fonctions périodiques et les variables se trouvent mêlées.

Lagrange indique, page 294, une méthode particulière pour intégrer une équation linéaire du second ordre où y et son premier coefficient différentiel, par rapport à t, se trouvent respectivement multipliés par $i\cos Ht$ et $i\sin Ht$, et où le second membre est une fonction quelconque de t. Il y parvient en désignant les quantités $y\cos Ht$, $y\sin Ht$, $y\cos 2Ht$, $y\sin 2Ht$, par les lettres u, U, ν, V, et en formant de nouvelles équations en d^2u, d^2U, $d^2\nu$, d^2V, analogues à la proposée, mais où l'on peut négliger les termes affectés de i^2 dans les deux premières, et de i dans les deux dernières, lorsqu'on veut pousser jusqu'à l'ordre i^2 l'approximation définitive. Il traite ensuite ces équations comme celles du cas précédent; et la formule, réduite au premier ordre, lui donne, en y remettant pour u, U, ν, V leurs valeurs, et en comparant les quantités imaginaires avec les imaginaires, les réelles avec les réelles, deux équations à l'aide desquelles on peut éliminer le coefficient différentiel de y.

L'auteur examine enfin, article 58, le cas où l'on a à la fois deux équations de cette espèce entre les variables y et y', et où celles-ci se trouvent mêlées ensemble, de manière que la dérivée de y' entre dans l'équation en d^2y, *et vice versâ*, K^2 désignant toujours le coefficient de y, dans celle-ci, et K'^2 celui de y' dans l'autre équation. Il emploie pour les intégrer un procédé semblable, et forme seulement un nombre double d'équations subsidiaires, ce qui lui donne dix inconnues et dix équations du second ordre, d'où il tire une équation du premier ordre et dix équations de condition; celles-ci donnent, à l'aide des deux valeurs de ϱ^2, deux équations finales, qui servent à trouver y et y', et que l'auteur ne rapporte pas, peut-être à cause de leur complication. Il dis-

cute alors, avec une attention particulière, le cas où le multiple H serait presqu'égal à $K - K'$, la différence n'étant que de l'ordre i. Désignant par $h + im$ la valeur de $\varrho\sqrt{-1}$, il détermine les expressions de y et y' en négligeant d'abord les quantités de l'ordre i auxquelles il a égard ensuite; m est donnée par une équation du second degré, dont les racines peuvent être égales ou imaginaires. Il prouve que dans le premier cas la valeur de y contiendrait l'arc t en dehors des signes périodiques, et que dans le second elle renfermerait des exponentielles toutes réelles, et qui croîtraient à l'infini à mesure que t croît.

C'est alors que Lagrange fait l'application des méthodes précédentes à la théorie de Jupiter et de Saturne. Il reprend les trois équations du mouvement de l'une et de l'autre planète en coordonnées polaires prises par rapport au temps, qu'il avait déjà données dans un Mémoire imprimé dans le volume précédent. Les variables y sont séparées de manière à ce que les distances accourcies r et r' des deux planètes, rapportées au plan de l'écliptique fixe, soient données chacune, ainsi que les tangentes q et q' de leurs latitudes, par une équation du second ordre, tandis que les longitudes φ et φ' sont déterminées par des équations du premier ordre. Il remarque que leur analogie permet de ne considérer qu'un seul système d'équations, celui relatif à Jupiter par exemple, les mêmes formules pouvant ensuite, en ajoutant ou supprimant un trait à chaque lettre, servir à calculer les dérangemens de Saturne. Il élimine alors l'élément dt du temps, ainsi que Clairaut et d'Alembert, et obtient un autre système où $d\varphi$ est la variable indépendante, et qui est assez analogue à celui dont M. Laplace s'est servi dans sa Théorie de la Lune (*). L'auteur suppose d'abord que les forces perturbatrices soient nulles, et intègre dans cette hypothèse avec quatre constantes arbitraires ι, α, ε, et ϖ, qui représentent la tangente de l'inclinaison, le lieu du nœud ascendant, l'excentricité et le mouvement de l'aphélie. Il imagine ensuite que l'effet de ces forces consiste à faire varier les constantes, en sorte que l'orbite soit représentée par une ellipse qui change continuellement d'espèce et de position; il différencie la valeur de q, en faisant tout varier, et profite de l'indéterminée ι pour exprimer, par une équation qui donne la

2e Partie. Théorie de Jupiter et Saturne.

Variation des élémens.

(*) Soient S, I et I' les masses du Soleil, de Jupiter et de Saturne; P, Q, R les composantes rectangulaires des forces perturbatrices qui agissent sur Jupiter : Lagrange faisant $\frac{1}{r} = s$, obtient les trois équations suivantes (*voyez* part. I, Notes 3 et 7) :

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{C - 2\int Qr^3 d\varphi}}, \quad \frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{(S+I)(1+q^2)^{-\frac{3}{2}} + U}{C - 2\int Qr^3 d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Qr^3 d\varphi} = 0,$$

en faisant, pour abréger, $Rr^2 + Q\frac{dr}{d\varphi} = U$, $r^3\left(P - Rq + Q\frac{dq}{rd\varphi}\right) = V$.

L'intégration lui donne, quand P, Q, R sont nuls,

$$q = \iota\sin(\varphi - \alpha), \quad s = \frac{S+I}{C(1+\iota^2)}\sqrt{1+q^2} + \varepsilon\cos(\varphi - \varpi), \text{ d'où l'on tire } \iota^2 = q^2 + \frac{dq^2}{d\varphi^2}.$$

Quand P, Q, R ne sont pas nuls, si l'on suppose que les élémens deviennent variables et que les différentielles premières de q et de s restent cependant les mêmes que dans le premier cas, on obtiendra, en regardant ι comme constant dans l'expression de s,

$$\frac{d\iota}{\iota} = \frac{d\alpha}{\text{tang}(\varphi - \alpha)}, \quad \frac{\iota\, d\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)\, d\varphi} + \frac{V}{C - 2\int Qr^3 d\varphi} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \text{tang}(\varphi - \varpi)\, d\varpi = 0,$$

$$\frac{\varepsilon\, d\varpi}{\cos(\varphi - \varpi)\, d\varphi} = \frac{1}{C - 2\int Qr^3 d\varphi}\left\{U + \frac{S+I}{C}\left[2(1+q^2)^{-\frac{3}{2}}\int Qr^3 d\varphi + \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \cdot \frac{V}{1+\iota^2}\right]\right\}.$$

valeur de $d\iota$, que la variation instantanée de la latitude sera la même que si le plan de l'orbite ne changeait pas de position. Il différencie une seconde fois la valeur de q, et la substitue dans l'équation du second ordre, en y remettant pour $d\iota$ sa valeur ; ce qui lui donne une seconde équation du premier ordre pour déterminer $d\alpha$. Il applique aussi le même procédé à l'équation relative au rayon vecteur, en exprimant que la variation instantanée de ce rayon soit la même que si l'ellipse demeurait constante ; et il décompose l'équation du second ordre en deux autres du premier ordre, qui déterminent les variations de l'excentricité et de la longitude du périhélie. On voit que cette méthode est tout-à-fait analogue à celle qu'Euler avait employée pour la Lune, dès 1753, et appliquée aux planètes en 1756 ; l'expression de la variation de l'inclinaison est la même, et celles des trois autres élémens ne sont différentes que parce que Lagrange n'a pas conservé, comme Euler, le temps ou le moyen mouvement pour variable indépendante, qu'il n'a pas donné la même forme que lui à l'expression de la distance accourcie dans le mouvement elliptique, et qu'Euler ne s'est pas attaché comme lui à ce que la différentielle de ce rayon eût précisément la même expression que dans le cas de l'ellipse constante.

Développement des formules générales. Lagrange reprend ensuite les trois équations différentielles où le temps est la variable indépendante, afin de les intégrer directement par approximation. Les observations lui apprenant que le mouvement de Jupiter autour du Soleil est à peu près circulaire et uniforme, et que le plan de son orbite ne fait qu'un très petit angle avec celui de l'écliptique, il nomme a la distance moyenne de Jupiter au Soleil, h sa vitesse angulaire moyenne, et fait, comme Euler, dans sa pièce de 1748, $r = a(1 + iy)$, $\varphi = ht + ix$, $q = iz$, i étant très petit ; il prend des valeurs analogues pour les variables relatives à Saturne, ce qui lui donne, en substituant ces valeurs dans les équations en q et r, des formules du second ordre en y et z, semblables à celles dont il s'est occupé article 52, mais qui contiennent encore des termes non développés, dépendans des forces, et dont quelques-uns ont en diviseur le cube de la distance v des deux planètes. L'auteur est conduit par là à s'occuper du développement des deux facteurs irrationnels qui entrent dans la valeur de v^{-3} ; il adopte sur ce point le procédé d'Euler, et donne, pour obtenir les séries qui expriment les coefficiens du cosinus de chaque multiple de l'élongation θ, une méthode simple et élégante fondée sur la décomposition du binome en deux facteurs imaginaires, et sur le développement immédiat de chacun d'eux suivant les cos. et les sin. des multiples de l'angle θ, qu'il remplace ensuite par sa valeur $(h - h')t + i(x - x')$ (*).

(*) On a en effet, $1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2 = [1 - \alpha(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})][1 - \alpha(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})]$; et comme $(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})^m = \cos m\theta \pm \sin m\theta\sqrt{-1}$, si l'on élève successivement chacun des facteurs à la puissance $-s$, leurs valeurs seront de la forme $M + N\sqrt{-1}$, $M - N\sqrt{-1}$, en supposant

$$M = 1 + s\alpha\cos\theta + \frac{s.s+1}{2}\alpha^2\cos 2\theta + \text{etc.},\quad N = s\alpha\sin\theta + \frac{s.s+1}{2}\alpha^2\sin 2\theta + \text{etc.},$$

et l'on aura $$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s} = M^2 + N^2 = A + B\cos\theta + C\cos 2\theta + \text{etc.};$$

d'où l'on tire, en carrant les valeurs de M et de N, en ajoutant les termes qui ont le même coefficient, et en comparant les deux derniers membres terme à terme,

$$A = 1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s.s+1}{2}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{s.s+1.s+2}{2.3}\right)^2\alpha^6 + \text{etc.},\quad B = s\alpha + s.\frac{s.s+1}{2}\alpha^3 + \text{etc.}$$

L'auteur pose ensuite $s = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{5}{9}$, et donne dans une table les logarithmes des quarante premières puissances de α.

Réduction des équations à une forme plus simple.

Lagrange obtient ainsi les expressions des forces perturbatrices, qu'il substitue dans les équations différentielles ; il réduit ensuite celles-ci à une forme plus simple, en changeant les variables y et z en d'autres y_1 et z_1 dont les valeurs soient exprimées en fonction des premières, de leurs puissances et de leurs produits de la seconde et de la troisième dimensions, respectivement multipliés par i et par i^2, et affectés de coefficiens indéterminés (*). Pour prouver la légitimité de cette supposition et déterminer en même temps les coefficiens inconnus, il différencie deux fois les expressions de y_1 et z_1 ; il y remplace les coefficiens différentiels de y et z par leurs valeurs tirées des premières équations, de manière à négliger, dans le résultat, les quantités affectées de i^3 ou i^2n ; et après avoir substitué ces expressions dans les équations réduites, qui doivent devenir identiques, il compare séparément les termes semblables. Ces opérations lui laissent encore deux indéterminées dont il peut disposer, et elles réduisent les équations différentielles à la forme de celles dont il s'est occupé article 58.

Première intégration.

Pour intégrer ces formules sous leur nouvelle forme, Lagrange y néglige d'abord tous les termes affectés de i et de n, excepté ceux qui renferment y_1 ou z_1, multipliés par $\cos(h-h')t$ ou $\sin(h-h')t$, et auxquels il faut avoir égard, même dans la première approximation, parce que, quand on y met pour ces variables leurs valeurs simplement elliptiques $\Delta' \cos[(h'+ik')t - \mathrm{A}']$, etc., on obtient, après le développement des produits, des termes de la forme $\cos[(h+ik')t - \mathrm{A}']$, qui étant de l'ordre de in, dans les équations différentielles, se trouvent divisés après l'intégration par des quantités du même ordre ; de sorte qu'ils appartiennent aussi aux premières valeurs de y_1 et z_1. L'auteur exécute ensuite une première intégration par la méthode de l'article cité : le cas qu'il y a examiné en particulier se présente alors, et il obtient pour y_1 et z_1 des valeurs en fonction des sin. et cos. de l'angle $(h+im)t$ pour l'une, et $(h+in)t$ pour l'autre ; et comme m et n ont chacune deux valeurs m', m'', n', n'', cela donne quatre termes pour chaque variable. « Le peu de temps qui me reste, dit-il ensuite, ne me permettant pas d'entrer » dans le détail des nouvelles approximations, je me bornerai à examiner ici, d'après » les formules données ci-dessus, les inégalités des mouvemens de Jupiter et de Saturne, qui font varier l'excentricité et la position de l'aphélie de ces deux planètes » aussi bien que l'inclinaison et le lieu du nœud de leurs orbites, et qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvemens. »

Détermination des équations séculaires de chaque élément

Il reprend alors les expressions précédentes de y_1 et z_1, et il les transforme à plusieurs reprises, de manière à leur redonner leur première forme $\Delta \cos(ht - \mathrm{A})$, $\Lambda \sin(ht - \mathrm{E})$, ce qui lui permet ensuite de comparer les valeurs définitives de Δ, Λ, A, E avec les primitives, et d'en conclure, pour l'une et l'autre planète, les variations de l'excentricité, de la tangente de l'inclinaison, des lieux de l'aphélie et du nœud. Cette méthode

---

(*) Les équations deviennent alors

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \mathrm{K}^2 y_1 + n\mathrm{Y} = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} + \mathrm{L}^2 z_1 + in\mathrm{Z} = 0,$$

en supposant $y_1 = y + \alpha + i(\beta y^2 + \gamma z^2) + i^2\left(\delta y^3 + \varepsilon yz + \zeta z \frac{dy\,dz}{dt^2}\right)$; $z_1 = z + i\left(\mu zy + \nu \frac{dz\,dy}{dt^2}\right)$ + etc., et en désignant par in la quantité $\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{S}} h^2$, par Y et Z une suite de produits des sin. et cos. de l'angle $(h-h')t$ et de ses multiples, par n ou par iny, iny', inx, inz, etc.

de déterminer les variations de chaque élément pour avoir les inégalités séculaires, a été dès-lors toujours employée, lors même qu'on a eu recours à l'intégration des équations générales pour les inégalités périodiques. Nous avons vu qu'Euler avait déjà eu l'idée, dans sa pièce de 1752, du procédé par lequel on réduit à la forme elliptique les expressions des variables dans le mouvement troublé ; mais Lagrange l'a perfectionné : il en a conclu les mêmes formules du mouvement rétrograde du nœud et de la diminution séculaire de l'inclinaison qu'Euler avait déjà données, et en a déduit le premier l'expression exacte des variations séculaires de l'équation du centre, de l'excentricité et du mouvement de l'aphélie. Il n'a pas été aussi heureux pour celle du moyen mouvement, à laquelle il parvient en cherchant la valeur de φ, et, après avoir substitué les petits arcs $i\,(m'-m'')t$, $i\,(n'-n'')t$ à leurs sinus, en comparant le coefficient de t avec celui qu'il a désigné par k ; il en conclut, en passant aux nombres, une inégalité croissante dans le mouvement en longitude de Jupiter et de Saturne, représentée par la formule $+2'',7402n^2$ pour celui-là, et par $-14'',2218\,n^2$ pour celui-ci, n étant le nombre des révolutions écoulées depuis une époque fixe. Nous verrons bientôt ces résultats démentis par de nouvelles recherches ; mais l'ouvrage de Lagrange qui les contient, n'en est pas moins admirable sous le rapport analytique, puisque c'est-là, comme l'a dit M. Laplace (*Mém. de Par.*, 1772, seconde part., pag. 268 et 317), « qu'il » a senti et résolu le premier, par une analyse sublime, la difficulté que font naître » les termes qui, provenant de la seconde approximation, sont du même ordre que » ceux qui résultent de la première, quoiqu'on les suppose d'un ordre inférieur, et qu'il » a envisagé sous son véritable point de vue la question des inégalités séculaires. »

Nouvelles recherches de d'Alembert sur la théorie des planètes.

Les tomes V et VI des *Opuscules* de d'Alembert, publiés en 1768 et 1773, contiennent différentes recherches relatives à la théorie des planètes. C'est ainsi que dans le 39ᵉ Mémoire, t. V, pag. 342, l'auteur s'occupe du mouvement de leurs aphélies ; il attribue à Lagrange d'avoir remarqué le premier, dans ceux de Jupiter et de Saturne, une duplicité de valeur qui tient à ce que la variable y' entrant dans l'équation en y, *et vice versâ*, la quantité de ce mouvement est donnée par une équation du second degré. « Dans la théorie de la Lune, ajoute-t-il, la révolution de la planète, » comparée à celle de la Terre, dépend, ainsi que le mouvement de l'apogée, du rapport » de la masse de la Terre à celle du Soleil, au lieu que dans la théorie de Jupiter » et de Saturne, le mouvement de l'aphélie dépend uniquement de la masse de ces planètes, et la révolution de la masse du Soleil ; ainsi il se peut faire que quoique l'équa» tion qui donne ce mouvement soit à peu près exacte dans la première théorie, elle » ne le soit pas dans la seconde. » Il cherche à prouver, Mém. 40, p. 387, que s'il y a dans l'équation du rayon vecteur de l'orbite d'une planète, deux termes de la forme $\alpha \cos Nz + 6 \cos (N+\gamma)\, z$, γ étant extrêmement petit, il en résulte dans l'équation du temps un terme de la forme $A \sin \gamma z$, qui peut produire une équation séculaire apparente (*). Il trouve ingénieuse et satisfaisante l'explication du retardement de Saturne

(*) En effet, soit x la distance accourcie de la planète au Soleil, le premier terme de l'expression du temps est $\int x^2 dz$; soit $x = \alpha \cos Nz + 6 \cos (N+\gamma) z$, la valeur de x^2 contiendra le terme .. .. $2\alpha 6 \cos (N+\gamma) z \cos Nz = \alpha 6\, [\cos (2N+\gamma) z + \cos \gamma z]$, qui produira dans $\int x^2 dz$ le terme $\frac{\alpha 6}{\gamma} \sin \gamma z$.

Soient ζ et $\zeta + \delta$ es valeurs de l'anomalie vraie z à deux époques différentes, δ comprenant plusieurs circonférences ; l'expression de la différence des moyens mouvemens correspondans contiendra la quantité

$$\frac{\alpha 6}{\gamma} [\sin \gamma (\zeta + \delta) - \sin \gamma \zeta] = \frac{\alpha 6}{\gamma} [(\cos \gamma \delta - 1) \sin \gamma \zeta + \sin \gamma \delta \cos \gamma \zeta],$$

que Lagrange a tirée de cette espèce de termes, en prenant pour γz la distance des aphélies de Jupiter et de Saturne quand $t=0$; mais il fait voir, dans le Mém. 41, pag. 420, qu'on ne peut pas conclure de là que ce n'est pas la résistance de l'éther qui altère le moyen mouvement de la Lune et des planètes, parce qu'à cause de la différence des temps des révolutions, un argument qui, dans le cas de Saturne, pourrait être encore assez petit au bout d'un grand nombre d'années, pourra être au contraire très grand dans le mouvement de la Lune, qui est environ quatre cents fois plus rapide. Il est donc alors beaucoup plus difficile de trouver des argumens assez petits pour qu'ils rendent raison d'une équation séculaire dans le moyen mouvement.

L'article II du Mémoire 50, compris dans le tome VI, est intitulé : *Des perturbations d'une planète principale par ses satellites, et de l'orbite même de ces satellites.* L'auteur montre comment on peut trouver le lieu d'une planète, lorsqu'on connait le lieu de ses satellites et celui du centre de gravité commun. « Imaginons, dit-il, lorsque le temps » $t=0$, un plan passant par une planète dont la masse est P, et auquel on rapporte » le mouvement des satellites S, S', etc. de cette planète; soient x, x', etc. les distances » de ceux-ci à ce plan au bout du temps t, ξ la quantité dont la planète s'est élevée » au-dessus de ce plan dans le même temps, ζ la distance correspondante du centre » de gravité à ce plan primitif; on aura, par la propriété des centres de gravité... » $(P+S+S'+\text{etc.})\,\zeta = S\,(x+\xi)+S'\,(x'+\xi)+\text{etc.}+P\xi$, d'où l'on tirera ξ. » Il détermine ensuite les forces perturbatrices de l'orbite décrite par le centre de gravité de la Terre et de la Lune plus exactement qu'il ne l'avait fait dans le tome II de ses *Recherches*. Il indique, page 321, comment on peut déterminer, au moins en certains cas, si une comète peut devenir satellite d'une planète : recherche qu'il a reprise dans le tome VIII, pag. 239, à l'occasion de la savante théorie donnée sur ce sujet par du Séjour, dans son *Essai sur les Comètes*, publié en 1775. Il fait voir enfin, pag. 323, que le centre de gravité commun d'une planète et de ses satellites décrit sensiblement une ellipse autour du centre de gravité commun de tout le système, c'est-à-dire du Soleil, de la planète et de ses satellites. « C'est ce qu'on démontrera aisément, dit-il, en considérant, 1°. que le » Soleil, le centre de gravité de la planète et de ses satellites, et le centre de gravité » commun de tout le système, sont toujours en ligne droite; 2°. que les distances du » centre de gravité commun aux deux autres points sont toujours dans le rapport constant de la masse du Soleil à la somme des masses de la planète et de ses satellites; » 3°. que par conséquent les courbes décrites par le Soleil, et par le centre de gravité » de la planète et de ses satellites, autour du centre de gravité commun, et la courbe » sensiblement elliptique décrite par le centre de gravité de la planète et de ses satellites autour du Soleil, sont semblables. »

Le § 3 a pour titre : *Sur les équations séculaires des planètes.* D'Alembert y fait voir comment les deux termes $\alpha\cos Nz + \beta\cos(N+\gamma)z$ peuvent aussi altérer le mouvement de l'aphélie et l'excentricité. Pour cela, il réduit leur somme à la forme

---

qui, lorsque l'angle $\gamma\delta$ est encore assez petit pour qu'on se borne à ses deux premières puissances dans le développement de $\cos\gamma\delta$ et $\sin\gamma\delta$, donne le terme $-\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\sin\gamma\zeta.\delta^2$, proportionnel au carré du nombre de révolutions écoulées depuis la première époque.

$k \cos(Nz + \omega)$, en prenant pour k et pour tang ω, des valeurs dont le développement lui donne les variations cherchées (*). Il obtient de la même manière celle de l'équation du centre en réduisant $\alpha' \sin Nz + \zeta' \sin (N + \gamma) z$ à la forme $\sigma \sin (Nz + \varpi)$; et il remarque que, comme les coefficiens N et $N + \gamma$ sont peu différens de l'unité, α' et ζ' seront très peu différens de 2α et de 2ζ, et qu'ainsi ϖ et σ seront sensiblement égaux à ω et à $2k$.

Premier Mémoire de M. Laplace sur les équations séculaires des planètes.

M. Laplace lut à l'Académie des Sciences, le 10 février 1773, un Mémoire ayant pour titre : *Recherches, 1°. sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards ; 2°. sur le principe de la gravitation universelle, et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent.* Il se trouve dans le t. VII de ceux des *Savans étrangers*. La dernière partie contient la grande découverte de l'invariabilité des moyens mouvemens des planètes, en allant jusqu'aux cubes des excentricités et des inclinaisons. Avant d'entrer dans l'exposition de la théorie qui y a conduit l'auteur, nous rapporterons presqu'en entier le préambule qu'il a mis en tête de cette partie de son Mémoire, parce qu'il peut servir tant à donner une idée juste de l'état de la question, qu'à fixer l'opinion qu'on doit avoir de quelques ouvrages antécédens.

Jugement des travaux antérieurs sur ce sujet.

« Parmi les inégalités que l'action réciproque des planètes peut occasionner » à la longue dans les élémens de leurs orbites, la plus essentielle à considérer est celle » de leurs moyens mouvemens ; elle ne paraît pas cependant avoir été déterminée avec » toute la précision qu'exige son importance. M. Euler, dans sa seconde pièce sur les » irrégularités de Jupiter et de Saturne, la trouve égale pour l'une et l'autre de ces » planètes. Suivant M. de la Grange, au contraire, dans le tome III des *Mémoires de* » *Turin*, elle est fort différente pour ces deux corps. Ayant recherché la raison d'une » disparité aussi frappante entre les résultats de ces deux illustres géomètres, il m'a » paru qu'ils n'avaient point fait entrer en considération plusieurs termes aussi sensibles » que ceux auxquels ils ont eu égard. M. de la Grange semble à la vérité avoir porté plus » loin la précision que M. Euler : j'ai lieu de croire cependant que sa formule n'est » pas encore exacte ;... car il néglige, dans les équations différentielles, les sinus et » les cosinus de très petits angles, à cause de l'extrême petitesse de leurs coefficiens ; » mais ces coefficiens deviennent fort grands par l'intégration, et produisent dans les » moyens mouvemens une équation séculaire comparable à celle à laquelle il par» vient. J'observerai ici que la grandeur de ces coefficiens, dans la théorie des planètes, » peut rendre fautive la supposition que leur mouvement vrai est égal à leur mouve» ment moyen, plus à une très petite quantité. Or, comme toutes les solutions connues » du problème des trois corps sont fondées sur cette supposition, il me paraît que les » formules du mouvement vrai des planètes que l'on en tire, ne doivent être employées » que pour un temps limité, après lequel il est à craindre qu'elles ne deviennent » inexactes.

(*) Ces valeurs sont $k = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\zeta \cos \gamma z + \zeta^2}$, tang $\omega = \frac{\zeta + \gamma z}{\alpha + \zeta \cos \gamma z}$;
si l'on y met pour z sa valeur $\zeta + \delta$, et qu'on développe $\sin \gamma (\zeta + \delta)$ et $\cos \gamma (\zeta + \delta)$ suivant les puissances de $\gamma\delta$, elles prennent la forme

$$k = A + B\gamma\delta + C\gamma^2\delta^2 + \text{etc.}, \quad \text{tang } \omega = A' + B'\gamma\delta + C'\gamma^2\delta^2,$$

et les termes qui suivent le premier dans chaque expression, donnent les variations séculaires de l'excentricité et du mouvement de l'aphélie.

» Indépendamment de tout calcul, on peut s'assurer, par la considération suivante, que » la formule de M. de la Grange est incomplète. Car si le plan fixe auquel il rapporte le » mouvement des deux planètes, au lieu d'être l'écliptique, était tout autre plan, cette » formule donnerait une équation séculaire totalement différente ; et si ce plan passait » par l'intersection des orbites de Jupiter et de Saturne, cette même équation qui au- » paravant dépendait de l'inclinaison respective des orbites, cesserait d'en dépendre. Il » paraît cependant que le mouvement moyen d'une planète, et l'équation séculaire de ce » mouvement, doivent être les mêmes, quel que soit le plan sur lequel on les rapporte. » Au reste, ce que je viens de dire ne touche point au mérite de la solution de » M. de la Grange : je lui rends avec plaisir la justice de la regarder comme une des choses » les plus délicates que l'on ait tirées de l'analyse.

» La pièce de M. Charles Euler, sur l'altération du mouvement de la Terre, couronnée » en 1760, quelqu'estimable qu'elle soit d'ailleurs, n'a rien ajouté, ce me semble, » à ce que l'on savait déjà sur l'effet de l'attraction des planètes. Après avoir discuté » l'action de la comète de 1759, sur la Terre, pour altérer son mouvement moyen, il » se contente d'observer que l'action des planètes doit y produire une inégalité pro- » portionnelle au carré du temps, sans se mettre en peine d'en fixer la véritable » valeur.

» On voit, par ce détail, l'incertitude qui règne encore sur l'équation séculaire du » mouvement moyen des planètes, et combien il est nécessaire de la déterminer avec » précision.

» Voici maintenant pour y parvenir une méthode fort simple ; mais comme cette » recherche est nécessairement liée avec celle des inégalités séculaires, tant de l'excen- » tricité et de l'inclinaison, que de la position des nœuds et des apsides, je vais les » embrasser dans mon calcul.

» Je dois observer ici que quoique les formules auxquelles je parviens renferment » des termes proportionnels au temps et au carré du temps, je ne prétends pas cepen- » dant que ces termes se rencontrent dans l'expression rigoureuse du mouvement des » planètes ; il peut arriver en effet qu'ils soient produits par le développement des sinus » et cosinus de très petits angles en séries ; mon objet ici n'est point d'entrer dans cette » discussion, très intéressante du côté de l'analyse, mais qui devient inutile pour tout » le temps durant lequel l'Astronomie a été cultivée. » L'auteur cite à ce sujet un Mémoire de M. de Condorcet (*Mém. de Par.*, 1771), qui a pour titre : *Réflexions sur les méthodes d'approximation*.

Développement de sa méthode.

M. Laplace passe ensuite au développement de la méthode qu'il vient d'annoncer. Il part des trois équations différentielles du premier et du second ordre qui donnent, en fonction du temps et des forces perturbatrices, la longitude φ, la tangente de la latitude s, et le rayon vecteur r d'une planète dont la masse est δm. Il désigne par $\delta m'$, φ', s', r' les mêmes quantités relatives à une autre planète qui trouble les mouvemens de la première, la caractéristique δ désignant une différence infiniment petite. Il intègre d'abord les équations dans la supposition de $\delta m' = 0$, $s = 0$, ce qui lui donne pour φ et pour r des expressions en fonction de leurs valeurs moyennes nt et a, et des produits des sin. et cos. des divers multiples de l'anomalie $nt + \varepsilon$, par les puissances de l'excentricité, il rétablit ensuite les termes qui ont $\delta m'$ en facteur, et différencie les autres par rapport



à δ. Il suppose l'excentricité et l'inclinaison de l'ordre α, et pousse la précision jusqu'aux quantités de l'ordre $\alpha^2\delta m'$ inclusivement; mais il lui suffit, pour le but qu'il se propose, de considérer, dans l'équation du premier ordre qui donne $\delta\varphi$, les termes constans et ceux qui croissent comme le temps, en conservant de plus, dans celle du second ordre qui détermine δr, les termes en $\cos(nt+\varepsilon)$ et $\sin(nt+\varepsilon)$. Supposant ensuite à la première variable une valeur composée de termes constans ou affectés de nt et n^2t^2, à la seconde une valeur composée de termes constans, et d'autres en $t\sin(nt+\varepsilon)$, $t\cos(nt+\varepsilon)$, tous affectés de coefficiens indéterminés, il les substitue dans les équations, et détermine les coefficiens inconnus, en égalant séparément à zéro la somme de ceux de chaque terme. Enfin, ayant mis les résultats obtenus ainsi, sous une forme analogue à celle des valeurs elliptiques de φ et de r, la comparaison des unes et des autres lui sert à déterminer les expressions analytiques de l'accroissement de l'équation du centre, du mouvement de l'apogée et de l'accélération du moyen mouvement. Un calcul semblable, appliqué à la troisième équation, lui donne de même celle de la diminution séculaire de l'inclinaison de l'orbite de la planète sur un plan fixe, et du mouvement rétrograde des nœuds sur le même plan (*); et il vérifie, en mettant pour leurs coefficiens leurs développemens tirés de ceux des facteurs irrationnels, que les deux dernières formules s'accordent avec celles données par Euler en 1748, les deux premières avec celle de Lagrange, mais que celle relative au moyen mouvement est très différente.

Il en tire les vraies expressions des variations séculaires de tous les élémens.

» J'ai supposé dans les calculs précédens, dit l'auteur, les masses des planètes in-

(*) Les deux premières équations dont l'auteur fait usage sont

$$0=\frac{d^2.\delta r}{dt^2}+\frac{3c^2}{r^4}\delta r-\frac{2(S+\delta m)}{r^3}\delta r+an^2\delta\mu'[A+\alpha C\cos(nt+\varepsilon)+\alpha D\sin(nt+\varepsilon)]+\alpha^2 aB\,\delta\mu' n^3 t,$$

$$0=\frac{d.\delta\varphi}{dt}+\frac{2c}{r^3}\delta r+\frac{\alpha^2\delta\mu'}{2}Bn^2t;$$ en supposant $\frac{\delta m'}{a^3}=n^2\delta\mu'$, et en désignant par A, B, C, D des fonctions des moyennes distances, des excentricités et des inclinaisons, il obtient par l'intégration:

$$\varphi=nt+A'+2A\delta\mu' nt+\frac{3}{4}\alpha^2\delta\mu'(B-eD)n^2t^2,$$

$$r=a\left\{1+\alpha\left(e+\frac{1}{2}\delta\mu' Dnt\right)\cos\left[nt\left(1+3A\delta\mu'+\frac{C}{2c}\delta\mu'\right)+\varepsilon\right]+\text{etc.}\right\}.$$

La troisième équation est, en faisant $s=\alpha\lambda$, et en désignant par θ la quantité dont la planète est plus avancée que son nœud lorsque $t=0$,

$$0=\frac{d^2\delta\lambda}{dt^2}+\frac{2d\lambda d\delta r}{dt^2}+\frac{2drd\delta\lambda}{dt^2}+\frac{c^2\delta\lambda}{r^4}-\frac{4c^2\lambda\delta r}{r^5}+n^2\delta\mu'[E\sin(nt+\theta)+F\cos(nt+\theta)],$$

d'où l'on tire, en remettant pour δr sa valeur, en intégrant et en multipliant par α,

$$s=\left(\alpha\gamma-\frac{1}{2}F\delta\mu' nt\right)\sin\left[nt\left(1+2A\delta\mu'+\frac{E\delta\mu'}{2\gamma}\right)+\theta\right].$$

On voit par là, que si l'on nomme i le nombre des révolutions de la planète troublée depuis une époque donnée, l'accroissement de son équation du centre sera $\alpha D.\delta\mu'.i.\,360°$,

Le mouvement de son aphélie, suivant l'ordre des signes, $-\delta\mu'\left(A+\frac{C}{2c}\right)i.\,360°$,

L'accélération de son mouvement moyen, $\frac{3}{2}\alpha^2\delta\mu'\frac{355}{113}(B-eD)\,i^2.\,360°$,

La diminution séculaire de son inclinaison, $\frac{1}{2}F\delta\mu'.i.\,360°$,

Le mouvement rétrograde de ses nœuds, $\frac{E\delta\mu'}{2\gamma}.i.\,360°$.

(*Voyez* à ce sujet une note explicative à la fin de cette seconde partie.)

» finiment petites par rapport à celle du Soleil : or, le rapport de la masse de Jupiter » à celle du Soleil, loin d'être infiniment petit, est très comparable au produit des » excentricités des deux orbites auquel j'ai eu égard dans l'expression de l'accélération » des moyens mouvemens. Il parait donc alors nécessaire de considérer les quantités mul- » tipliées par $\delta\mu'^2$; or, en regardant $\delta\mu'$ comme étant de l'ordre α^2, j'ai trouvé par le » calcul, et les géomètres verront aisément à l'inspection des deux premières équa- » tions différentielles, que ces quantités n'ajoutent aucun terme aux formules précé- » dentes. De plus, si l'on considère avec attention ces mêmes équations, on verra que » l'expression de l'accélération du moyen mouvement est exacte aux quantités près » de l'ordre $\alpha^4\delta\mu'$, et que les formules du mouvement des nœuds et de l'apogée, de la » variation de l'excentricité et de l'inclinaison, sont exactes, aux quantités près de l'ordre » de $\alpha^3\delta\mu'$. »

Il détermine ensuite les inégalités proportionnelles au cube et aux puissances supérieures du temps dans le moyen mouvement des planètes. Pour cela, il introduit d'abord dans la valeur supposée de φ un terme de la forme $L\delta\mu'^2t^3$; il différencie le coefficient K du terme précédent $K\delta\mu't^2$, en y faisant varier les moyennes distances, les excentricités et les longitudes de l'aphélie, des quantités dont elles ont varié après le temps T, et obtient la valeur de L en divisant le résultat par T, et en en prenant le tiers. On déterminerait, dit-il, de la même manière les inégalités proportionnelles au carré et aux puissances supérieures du temps dans les autres élémens des orbites, mais toutes ces inégalités sont encore trop peu sensibles pour y avoir égard.

Application de ces formules à la théorie de Jupiter et de Saturne.

M. Laplace fait alors l'application des formules précédentes à Jupiter et à Saturne ; il adopte les valeurs des coefficiens du développement des facteurs irrationnels données par Lagrange, après avoir vérifié leur exactitude ; il prend les élémens tels qu'ils se trouvent dans les Tables de Halley, et annonce qu'en substituant ces quantités dans les expressions analytiques des équations séculaires des mouvemens moyens de Saturne et de Jupiter, il les a trouvées *absolument nulles;* il donne ensuite un moyen fort simple, et qui, appliqué à un autre objet, est devenu depuis bien précieux, pour s'assurer *à priori* si les altérations des mouvemens moyens de deux planètes sont l'effet de leur action mutuelle. Il fait usage, pour cet effet, d'un principe donné par le chevalier d'Arcy (*Mém. de Par.*, 1747), et qu'il énonce en ces termes : *Si plusieurs corps se meuvent autour d'un point quelconque, considéré comme foyer, la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que décrit le rayon vecteur de sa projection sur un plan fixe qui passe par ce foyer, est proportionnelle au temps.* Il l'applique au cas actuel en prenant le Soleil pour foyer, l'écliptique pour plan de projection, en égalant à une constante C la somme des projections des aires elliptiques décrites dans l'élément du temps par les rayons vecteurs des deux planètes, multipliées par les masses respectives $\delta\mu$, $\delta\mu'$, et en négligeant les quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons. « Si l'on suppose, » dit-il, qu'après plusieurs siècles les orbites des deux planètes changent par leur action » mutuelle, et que l'on exprime par la caractéristique δ les variations de leurs élémens, » on différenciera l'équation précédente par rapport à δ, en regardant C comme cons- » tante ; ce qui établit une relation entre les inégalités des deux planètes, relation à » laquelle les observations doivent satisfaire, si ces planètes n'ont éprouvé d'autre

Relation qui existe entre les altérations mutuelles des élémens.



» action sensible que leur gravitation réciproque (*). » Il en conclut, en prenant pour les variations des excentricités et des inclinaisons, les valeurs données par Lagrange, et en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2\delta n'\delta\mu$, que l'équation séculaire de Jupiter, si elle existe, est à celle de Saturne, dans le même intervalle de temps, comme 1 : 0,84199, et que d'ailleurs elles ont des signes contraires. Les observations satisfont à cette dernière condition, mais il n'en est pas de même pour la première, puisque l'équation séculaire de Saturne est plus grande que celle de Jupiter. « On ne peut, dit-il, » attribuer l'altération observée dans les mouvemens de ces planètes à l'action de leurs » satellites; car si un système de corps très voisins les uns des autres, se meut à une fort » grande distance du Soleil, le centre de gravité du système décrit très sensiblement une » ellipse constante autour du Soleil. (*Voyez* le t. VI des *Opuscules* de M. d'Alembert.) » D'ailleurs, par la théorie des satellites, et par les observations, il est prouvé que le » système d'une planète et de ses satellites est compris dans des limites déterminées au » moins durant un très grand nombre de siècles. Ainsi la planète reste toujours fort près » du centre commun de gravité du système; d'où il suit que les élémens de l'ellipse » décrite par la planète peuvent être regardés comme invariables, en ne considérant » que l'action de ses satellites. »

L'auteur est ainsi naturellement conduit à chercher ailleurs la cause des variations observées dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne; il regarde comme probable qu'elles ont été produites par l'action des comètes, dont quelques-unes ont pu passer assez près de ces planètes, et dont l'effet, toutes choses égales d'ailleurs, doit être plus sensible sur les planètes les plus éloignées du Soleil; mais nous le verrons bientôt, de même que Clairaut, dans la question du mouvement de l'apogée, découvrir le premier la vérité à ce sujet, en poussant beaucoup plus loin l'approximation qu'on ne l'avait jamais fait, et en se fondant sur une relation analogue à celle dont la différenciation, par rapport aux seules variations séculaires, lui avait fait tirer d'abord une conclusion différente.

Invariabilité des moyens mouvemens des planètes.

Dans le Mémoire actuel, M. Laplace étend à toutes les planètes le théorème remarquable qu'il vient de trouver pour deux d'entre elles. « L'exactitude avec laquelle les

(*) En effet, l'aire élémentaire de l'orbite de Jupiter, supposée elliptique, étant $\frac{1}{2}\sqrt{a(1-\alpha^2e^2)}$, sa projection sur l'écliptique est $\frac{1}{2}\cos\alpha\gamma\sqrt{a(1-\alpha^2e^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2e^2-\frac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right)$, en négligeant les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison supérieures à la seconde. Il en est de même pour Saturne.

On a donc, en faisant $\frac{1}{a^3}=n^2$, $\frac{1}{a'^3}=n'^2$, l'équation

$$n^{-\frac{1}{3}}\delta\mu\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2e^2-\frac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right)+n'^{-\frac{1}{3}}\delta\mu'\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2e'^2-\frac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2\right)=C,$$

d'où l'on tire, en différenciant par rapport à δ,

$$\frac{1}{3}\delta\mu\, n^{-\frac{4}{3}}\delta n\left[1-\frac{1}{2}\alpha^2e^2-\frac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right]+\frac{1}{3}\delta\mu' n'^{-\frac{4}{3}}\delta n'\left[1-\frac{1}{2}\alpha^2e'^2-\frac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2\right]$$
$$+\alpha^2n^{-\frac{1}{3}}\delta\mu\,[e\delta e+\gamma\delta\gamma]+\alpha^2n'^{-\frac{1}{3}}\delta\mu'\,[e'\delta e'+\gamma'\delta\gamma']=0.$$

M. Laplace trouve nulle la somme des deux derniers termes, en y mettant pour $\delta e\alpha$, $\delta\alpha e'$, $\delta\alpha\gamma$, $\delta\alpha\gamma'$ la partie séculaire de leurs valeurs numériques; il conclut alors, en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2\delta n'\delta\mu$,

$$\delta n'=-\delta n\,\frac{\delta\mu}{\delta\mu'}\left(\frac{n'}{n}\right)^{\frac{4}{3}},\text{ ce qui lui donne la relation }\delta n'=-\delta n.0.84149,$$

dont le peu d'accord avec les observations prouve que les variations séculaires des moyens mouvemens doivent être nulles.

» différens termes de l'expression de l'équation séculaire des moyens mouvemens se sont » mutuellement détruits, m'a fait soupçonner, dit-il, qu'elle est identiquement nulle; en » effet, il est assez peu vraisemblable qu'une égalité aussi parfaite entre ses termes positifs » et négatifs soit due aux circonstances particulières du mouvement de Jupiter et de Sa- » turne : j'ai donc cherché à vérifier cette conjecture, en substituant dans cette expres- » sion les valeurs générales de tous les coefficiens des deux développemens irrationnels » en fonction des deux premiers, et j'ai trouvé en effet que, toutes réductions faites, » la formule générale de cette variation était égale à zéro. Il suit delà que l'action des » planètes les unes sur les autres, et sur le Soleil, n'a pu sensiblement altérer leurs » moyens mouvemens, depuis le temps au moins auquel on a commencé à cultiver » l'Astronomie jusqu'à ce moment. Cette remarque me paraît de la plus grande » importance dans la théorie des planètes, et elle est contraire à ce qu'ont cru jus- » qu'ici tous les géomètres qui se sont occupés de cet objet... Je suis parvenu aussi » par de semblables substitutions à simplifier beaucoup les expressions de l'accroisse- » ment de l'équation du centre et du mouvement de l'apogée. »

L'auteur, après avoir exposé les calculs sur lesquels reposent les résultats précédens, donne une table de toutes les inégalités séculaires, et en conclut que l'action réciproque des planètes ne peut causer de variation dans leurs moyens mouvemens, au moins aux quantités près de l'ordre $\alpha^2 \delta \mu'$,

Inégalités séculaires de la Terre.

Il passe ensuite à la détermination des inégalités séculaires de la Terre, qu'il croit n'avoir pas été faite encore avec exactitude, en se fondant sur ce qu'Euler, dans sa pièce de 1756, n'a point eu égard à la variation séculaire de l'équation du centre, et sur ce que sa formule du mouvement moyen de l'apogée est incomplète, parce qu'il a négligé les termes multipliés par l'excentricité de la planète troublante, en conservant néanmoins ceux qui sont multipliés par l'excentricité de la planète troublée. L'auteur détermine alors, par ses nouvelles formules, les inégalités séculaires de la Terre produites par l'action de Vénus et de Jupiter, en prenant les élémens des tables de Halley. Il montre que l'équation du centre du Soleil n'est pas constante, et qu'elle va en augmentant d'environ 13" par siècle. Le mouvement moyen de l'apogée du Soleil étant connu avec assez de précision, lui sert ensuite à déterminer la masse de Vénus, qu'il trouve 336399 fois plus petite que celle du Soleil, et de là la diminution de l'obliquité de l'écliptique résultant de l'action des planètes; il indique, pour cette dernière détermination, une nouvelle méthode dont l'exposition termine ce beau Mémoire.

Travail de Lambert sur les inégalités de Jupiter et de Saturne.

Lambert, dont les *Lettres Cosmologiques*, publiées en allemand en 1761, renferment des considérations astronomiques profondes et ingénieuses, inséra aussi, dans les *Mém. de Berl.* pour 1773, un travail important sur les théories de Jupiter et de Saturne. Rebuté de la longueur et de la difficulté des calculs fondés sur la théorie, il s'était déterminé à fixer, par les seules observations, les coefficiens des singulières inégalités qu'on observait dans les mouvemens de ces deux planètes, en leur appliquant ce que l'observation avait indiqué pour la Lune. Il donna à Saturne une évection, une variation et une équation annuelle ou anomalistique; à Jupiter deux évections et une équation anomalistiques; il supposa à chacune une équation séculaire proportionnelle au carré du temps, et parvint à représenter, à moins de 3' près, par ces corrections empiriques, presque toutes les oppositions observées jusqu'alors. C'est à lui qu'on dut la remarque importante que le moyen



mouvement de Saturne, qui, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, paraissait se ralentir de siècle en siècle, semblait au contraire s'accélérer par la comparaison des observations modernes entre elles. Il proposa, dans le vol. II des *Nouvelles Tables astronomiques de Berlin*, d'ajouter, depuis 1640, au moyen mouvement de Saturne supposé uniforme, une équation séculaire de 5',1 pour le premier siècle, et de soustraire, depuis 1657, de celui de Jupiter, une équation séculaire de 3',2 pour le premier siècle, ce qui était contraire à la marche des équations séculaires de Halley.

CHAPITRE IV.

Mémoires donnés en 1774 et 1775, sur les équations séculaires des Planètes, par Lagrange et par M. Laplace.

DANS les chapitres précédens nous avons vu naître la théorie des équations séculaires des planètes; nous avons cherché à faire voir comment Euler, Lagrange et M. Laplace étaient parvenus aux expressions des variations différentielles de chaque élément, qui fournissent les inégalités séculaires pour un temps limité, quoique très considérable. Ces expressions étant compliquées et renfermant à la fois plusieurs variables, on ne pouvait guère se flatter de pouvoir les intégrer complètement. Nous allons montrer maintenant par quel heureux et ingénieux artifice Lagrange parvint à surmonter, d'une manière simple et inespérée, cette grande difficulté pour deux élémens; comment M. Laplace la résolut ensuite pour deux autres, d'une manière analogue, et joignant ces résultats à sa découverte de la constance du moyen mouvement et de la distance moyenne, compléta ainsi la théorie des inégalités seculaires, lorsqu'on se borne au carré des excentricités et des inclinaisons.

Mémoire de Lagrange sur les équations séculaires des nœuds et de l'inclinaison.

Le Mémoire de Lagrange, qui contient l'exposition de sa méthode, est un des plus beaux et des plus lumineux que l'on doive à ce grand géomètre; il a pour titre : *Recherches sur les équations séculaires du mouvement des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes;* on le trouve dans les *Mém. de Par.* pour 1774, et il porte la date du 15 décembre de cette année. L'auteur en donna un autre, sur ce sujet, à l'Académie de Berlin, qui parut dans les Mémoires de la même année, et qui renferme une solution complète du cas où il n'y a que deux orbites mobiles, en supposant que leurs inclinaisons au plan sur lequel on les rapporte, soient quelconques; tandis que le Mémoire dont nous allons nous occuper est fondé sur l'hypothèse, analogue au cas de la nature, que les orbites sont peu excentriques, et que leurs inclinaisons à l'écliptique sont très petites.

On peut y distinguer trois parties. La première, divisée en trois articles, comprend la recherche des formules générales et leur réduction, dans le cas des planètes, à des équations linéaires du premier ordre; la seconde, contenant deux articles, est consacrée à l'intégration complète et rigoureuse de ces équations, et à la détermination des expressions générales qui en résultent pour le mouvement des nœuds et la variation de l'inclinaison; enfin la troisième renferme en trois articles l'application des deux premières

parties à la recherche successive des valeurs numériques des équations séculaires des nœuds et des inclinaisons de toutes les planètes. Nous allons chercher à donner une idée de la marche suivie par l'auteur dans chacune d'elles.

1re Partie. Recherche des équations différentielles du mouvement des nœuds et de l'inclinaison.

Lagrange désigne par x, y, z les coordonnées rectangulaires qui déterminent la position d'un corps animé par des forces quelconques, et par X, Y, Z les composantes de ces forces qui agissent suivant les trois axes. Il part des trois équations du mouvement en coordonnées rectangulaires, où l'élément du temps dt est regardé comme constant, et en tire trois autres équations du premier ordre, dont les seconds membres, qu'il désigne par P, Q, R, sont des fonctions des forces qui restent sous le signe $\int$, tandis que les premiers membres expriment le double des aires décrites dans l'instant dt par les projections du rayon vecteur sur les trois plans coordonnés divisées par dt; enfin, il tire de ces dernières, en les combinant, deux autres formules, dont la seconde est la différentielle de la première, dans la supposition où les quantités P, Q, R seraient constantes (*). Dans ce dernier cas, ou du moins lorsque ces quantités seraient entre elles dans des rapports constans, la première équation serait celle d'un plan fixe passant par l'origine des coordonnées, et elle pourrait servir à déterminer l'angle ω que fait avec l'axe des x l'intersection de ce plan sur le plan des xy, ou la ligne des nœuds, et la tangente θ de l'inclinaison du plan de l'orbite avec le plan des xy. Quoique dans tout autre cas le corps sollicité par les forces X, Y, Z décrive nécessairement une courbe à double courbure, la seconde des deux équations précédentes fait voir que les rapports des quantités P, Q, R pourront être regardés comme constans, pendant que le corps parcourt les espaces infiniment petits dx, dy, dz. Ainsi, le plan représenté par la première équation sera celui dans lequel le corps se meut dans l'instant où il décrit ces espaces infiniment petits; mais la position de ce plan au lieu d'être fixe changera d'un instant à l'autre, à cause de la variabilité des rapports des quantités P, Q, R qui entrent dans les valeurs de θ et de tangω.

Nouvelles variables employées par Lagrange.

L'auteur, pour rendre ces formules plus simples et plus commodes pour le calcul, substitue aux élémens θ et ω deux nouvelles variables, qui sont des fonctions des premières, savoir, $s = \theta \sin \omega$, $u = \theta \cos \omega$; et il est facile de voir que s et u représentent les tangentes des angles que font, avec les axes des x et des y, les intersections du plan de l'orbite avec les plans des xz et des yz (**). Cette transformation sert à réduire les deux

(*) Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -Z;$$

elles donnent, en faisant $\int (Yz - Zy)\,dt = P$, $\int (Xz - Zx)\,dt = Q$, $\int (Xy - Yx)\,dt = R$, et en intégrant, les trois équations suivantes :

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = R, \quad \frac{xdz - zdx}{dt} = Q, \quad \frac{ydz - zdy}{dt} = P;$$

d'où l'on tire, en les multipliant respectivement par z, $-y$ et x, ou par dz, $-dy$ et dx, et en ajoutant séparément les produits,

$$Px - Qy + Rz = 0, \quad Pdx - Qdy + Rdz = 0.$$

(**) En effet, la première des deux équations précédentes donne, en y faisant alternativement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, les valeurs $\frac{y}{x} = \frac{P}{Q}$, $\frac{-z}{x} = \frac{P}{R}$, $\frac{z}{y} = \frac{Q}{R}$, qui expriment les tangentes des angles que font, avec les axes des x et des y, les trois lignes d'intersection du plan de l'orbite avec les plans des xy, des xz et des yz.

équations qui déterminent le plan de l'orbite, de manière à ce qu'elles ne contiennent à la fois qu'une seule des variables, et elle permet de les déterminer en fonction des forces perturbatrices, au moyen des deux équations différentielles du premier ordre (a) et (b). « Pour faire usage de ces équations, dit l'auteur, il faudra substituer à la place » des quantités x, y, z, leurs valeurs $r\cos q$, $r\sin q$, $ru\sin q - rs\cos q$, r étant » le rayon vecteur projeté sur l'écliptique, q la longitude du corps, p la tangente de sa » latitude; et comme dans la recherche du mouvement des nœuds et de la variation » de l'inclinaison, on peut regarder l'orbite projetée sur l'écliptique comme déjà connue, » du moins à très peu près, les quantités r et q seront données en t, et il ne restera d'in- » connues que s et u. »

Développement des formules précédentes, dans le cas des planètes en général.

Lagrange fait ensuite l'application des formules précédentes au cas des planètes. Il désigne leurs masses par T, T′, T″, et adopte pour leurs coordonnées toutes les notations précédentes, en marquant d'un ou de deux traits celles qui se rapportent au corps T′ ou T″, etc. Il obtient les expressions des forces produites sur l'une d'entre elles T, par l'action de toutes les autres, et par celle du Soleil S regardé comme immobile. Ayant ainsi les valeurs des quantités X, Y, Z, il les substitue dans les deux équations (a) et (b), en y transformant les coordonnées rectangulaires en polaires. Il remarque ensuite que, comme les orbites des planètes sont fort peu inclinées à l'écliptique, les quantités θ, θ', etc., et par conséquent aussi u, s, u', etc., seront nécessairement très petites; de sorte qu'on pourra, du moins dans le premier calcul, négliger les termes affectés de ces quantités, dans les expressions des distances des planètes au Soleil. On pourra regarder aussi, du moins dans une première approximation, les orbites comme circulaires, et par conséquent les rayons r, r', etc., comme constans, et les angles q, q', etc., comme proportionnels au temps; ce qui sert à éliminer des premiers membres des équations la quantité $R = \frac{r^2 dq}{dt}$ qui y entrait encore, ainsi que son coefficient différentiel, en y substituant sa valeur constante actuelle μr^2, μt étant le moyen mouvement de la planète T. L'auteur développe, suivant les cosinus des multiples des élongations $q - q'$, $q - q''$, etc., les cubes des distances mutuelles des planètes T′, T″, etc., à la planète T, qui entrent en diviseur dans les expressions des forces; et il désigne (ainsi qu'il l'avait fait pour la première fois dans sa pièce sur les satellites de Jupi-

---

Or, soient (fig. 16) Oa, Oa', Oa'' ces intersections, prises de manière que la seconde soit au-dessous du plan des xy; menons du centre O, avec le rayon Oa, les arcs $a''aa'$, yax, xa', ya'', respectivement situés sur le plan de l'orbite et sur les trois plans coordonnés; les deux triangles sphériques $aa'x$, $aa''y$, rectangles en x et en y, et situés, le premier au-dessous, le second au-dessus du plan des xy, donneront, en remarquant que l'on a $\tang a = \theta$, $ax = \omega$, et en leur appliquant l'analogie $\tang c = \tang C \sin b$ (qui a lieu dans un triangle où l'angle A est droit, et où les côtés adjacens sont b et c, ce dernier opposé à l'angle C), les relations

$$\tang a'x = \theta\cos\omega = s, \quad \tang a''y = \theta\sin\omega = u;$$

d'où l'on tire, en comparant ces valeurs aux précédentes, $Rs = P$, $Ru = Q$; ou, en différenciant par rapport au temps, et en remettant pour dP et dQ leurs valeurs dans les seconds membres,

$$(a)\ldots\; R\frac{ds}{dt} + \frac{dR}{dt}s = Yz - Zy, \quad (b)\ldots\; R\frac{du}{dt} + \frac{dR}{dt}u = Xz - Zx;$$

équations qui servent à déterminer s et u, et de là le lieu du nœud et l'inclinaison par les formules $\tang\omega = \frac{s}{u}$, $\theta = \sqrt{s^2 + u^2}$.

ter) par (r,r'), $(r,r')^1$, $(r,r')^2$, etc., les coefficiens du premier, du second et du troisième terme du premier de ces développemens ; par (r,r''), $(r,r'')^1$, etc., les coefficiens correspondans du second, et ainsi de suite. Il fait ensuite toutes ces substitutions dans les deux équations ci-dessus, en n'ayant égard qu'aux termes qui contiennent les variables s et u, sans aucun sinus ou cosinus, parce que les autres termes dépendent des mouvemens mêmes des planètes dans leurs orbites, dont il fait abstraction ; il obtient alors deux équations linéaires du premier ordre, où les coefficiens différentiels de s et u, par rapport au temps, sont donnés en fonction de quantités qui dépendent des masses et des distances [qui sont les mêmes dans les deux équations, et qu'il désigne par les symboles $(0,1)$, $(0,2)$, etc.], respectivement multipliées par $u-u'$, $u-u''$, etc., dans l'équation en s ; par $s-s'$, $s-s''$, etc., dans l'équation en u. Le même procédé donne des équations semblables pour chacun des autres corps T′, T″ (*), et il ne s'agit plus que d'intégrer ces formules, ainsi réduites, pour avoir une solution complète du problème proposé.

Réduction des équations du premier ordre à la forme linéaire.

Avant d'exécuter ces opérations, Lagrange, pour jeter un plus grand jour sur cette matière, fait quelques remarques sur les équations précédentes. Il imagine qu'il n'y ait que deux planètes T et T′, dont la dernière ait une orbite fixe et immobile, sur le plan de laquelle on rapporte celle de l'autre ; il intègre dans cette supposition, et voit par là que l'inclinaison des deux orbites sera constante, et que le nœud de l'orbite mobile aura sur l'orbite fixe un mouvement rétrograde, dont la vitesse sera exprimée par la quantité $(0,1)$ (**). Appliquant ensuite le même raisonnement à toutes les orbites considérées successivement deux à deux, et supposées alternativement l'une mobile et l'autre fixe, il en conclut, en général, que les quantités $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, etc., $(1,0)$, $(1,2)$, etc., ne sont autre chose que les vitesses rétrogrades des nœuds de l'orbite de la planète T sur les orbites des planètes T′, T″, T‴, etc., considérées comme fixes ; de l'orbite de T′ sur les orbites de T, T″, et ainsi de suite ; d'où il s'ensuit qu'il suffit de connaître ces mouvemens particuliers pour pouvoir déterminer les véritables mouvemens des nœuds et les variations des inclinaisons de chaque orbite relativement à l'écliptique, en intégrant un nombre d'équations linéaires du premier ordre double de celui des orbites mobiles. L'auteur fait voir, à cette occasion, comment on peut parvenir directement aux équations qu'il a déduites immédiatement de la théorie de la gravitation universelle, par la simple considération des mouvemens particuliers des nœuds de chaque orbite sur chacune des autres regardée comme fixe.

Lagrange fait voir ce qu'expriment les coefficiens des variables dans ces équations.

L'article 4 de son Mémoire est consacré à l'intégration des équations linéaires qu'il vient d'obtenir. On voit aisément, d'après leur forme, qu'on peut y satisfaire par les valeurs suivantes : $s=\mathrm{A}\sin(at+\alpha)$, $u=\mathrm{A}\cos(at+\alpha)$, $s'=\mathrm{A}'\sin(at+\alpha)$, etc.,

2ᵉ Partie. Intégration des équations relatives aux nœuds et aux inclinaisons des orbites planétaires.

(*) Ces équations sont :

$$\frac{ds}{dt}+(0,1)(u-u')+(0,2)(u-u'')+\text{etc.}=0,\quad \frac{du}{dt}-(0,1)(s-s')-(0,2)(s-s'')-\text{etc.}=0;$$

$$\frac{ds'}{dt}+(1,0)(u'-u)+(1,2)(u'-u'')+\text{etc.},=0,\quad \frac{du'}{dt}-(1,0)(s'-s)-(1,2)(s'-s'')-\text{etc.}=0,\ \text{etc.};$$

en faisant $\frac{\mathrm{T}'r'(r,r')^1}{4\mu r}=(0,1)$, $\frac{\mathrm{T}''r''(r,r'')^1}{4\mu r}=(0,2)$, $\frac{\mathrm{T}r(r',r)^1}{4\mu' r'}=(1,0)$, $\frac{\mathrm{T}''r''(r',r'')^1}{4\mu' r'}=(1,2)$, etc.

(**) Les équations se réduisent en effet, dans cette hypothèse, à

$$\frac{ds}{dt}+(0,1)u=0,\quad \frac{du}{dt}-(0,1)s=0;\ \text{d'où l'on tire}\ \frac{d^2s}{dt^2}+(0,1)^2s=0,$$

et en intégrant, $s=\mathrm{A}\sin[\alpha-(0,1)t]$, et de là $u=\mathrm{A}\cos[\alpha-(0,1)t]$, $\omega=\alpha-(0,1)t$, $\theta=\mathrm{A}$.

où a et α, A, A′, etc., sont des constantes indéterminées ; en effet, ces substitutions étant faites, on aura un nombre d'équations de condition, entre ces seules constantes, qui sera égal au nombre des orbites mobiles. « Supposons, dit Lagrange, que ce nombre » soit n, on aura donc n constantes indéterminées A, A′, A″, etc., et n équations entre ces » constantes ; mais en éliminant successivement ces mêmes constantes, on verra toujours » que la dernière s'en ira d'elle-même, et l'on trouvera pour équation finale une équation » en a du degré n, qui servira à déterminer a. Il restera donc deux constantes indétermi- » nées : A, par exemple, et α ; l'on aura n valeurs différentes de a, et par conséquent n » valeurs particulières de chacune des $2n$ variables s, s', u, u', etc., lesquelles satisferont » toutes également aux équations différentielles données. Ainsi il est facile de voir, par » la nature même de ces équations, que pour avoir la valeur complète de chacune des » variables dont il s'agit, il n'y aura qu'à prendre la somme des n valeurs particulières » de la même variable, en donnant différentes valeurs aux constantes arbitraires ; et » comme on peut satisfaire aux équations de condition, en faisant $a = 0$, A = A′ = A″, » on voit que $a = 0$ sera nécessairement une des racines de l'équation en a, et que les » valeurs de A, A′, etc., qui répondent à cette racine, seront égales entre elles. » L'auteur conclut de là les valeurs générales et complètes des variables s, u, etc., en dénotant par b, c, etc., les racines de l'équation en a ; par A, B, C, etc., α, β, γ, etc., les n coefficiens et les n angles arbitraires, et en prenant les mêmes notations marquées d'un ou de deux traits, pour les quantités qui sont relatives aux planètes T′ ou T″, etc. (*)

Il remarque que, quoiqu'il ait supposé toutes les racines de l'équation en a réelles et inégales, il peut néanmoins arriver qu'il y en ait d'égales ou d'imaginaires, qui introduisent, les unes des arcs de cercles, les autres des exponentielles dans les valeurs de s, u, s', etc. ; de sorte que, dans l'un et l'autre cas, elles croîtront à mesure que t croît, et la solution cessera d'être exacte au bout d'un certain temps ; mais heureusement, dit-il, ces cas ne paraissent pas avoir lieu dans le système du monde.

Pour déterminer les $2n$ constantes arbitraires A, B, etc., α, β, etc., il faut supposer qu'on connaisse les valeurs des $2n$ variables s, s', u, u', etc., pour une époque quelconque, par exemple lorsque $t = 0$, et les substituer dans les $2n$ équations qui donnent les valeurs générales de ces variables, en y faisant aussi $t = 0$; elles donnent alors $2n$ relations entre les valeurs particulières et les constantes arbitraires, qui suffisent pour déterminer ces dernières. « Quoique cette détermination, dit l'auteur, soit toujours » facile, dans les cas particuliers, au moyen des règles connues de l'élimination, ce- » pendant si on voulait traiter la question en général, pour un nombre quelconque » d'orbites mobiles, on tomberait nécessairement dans des formules très compliquées, » et dont la loi serait difficile à apercevoir ; c'est pourquoi j'ai cru devoir chercher une » méthode particulière pour remplir cet objet ; et je me flatte que celle que je vais » donner pourra mériter l'attention des géomètres, tant par sa simplicité et sa géné- » ralité, que par l'utilité dont elle pourra être dans plusieurs autres occasions. » Nous ne le

Détermination des constantes.

(*) Les équations de condition, produites par la substitution des valeurs particulières, dans les équations différentielles, sont de la forme

$a\mathrm{A} + (0,1)(\mathrm{A} - \mathrm{A}') + (0,2)(\mathrm{A} - \mathrm{A}'') + \text{etc.} = 0$, $a\mathrm{A}' + (1,0)(\mathrm{A}' - \mathrm{A}) + (1,2)(\mathrm{A}' - \mathrm{A}'') + \text{etc.} = 0$, etc.,

et les valeurs générales des variables, ou les intégrales complètes des équations, sont :

$s = \mathrm{A}\sin\alpha + \mathrm{B}\sin(bt+\beta) + \mathrm{C}\sin(ct+\gamma) + \text{etc.}$, $u = \mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\cos(bt+\beta) + \mathrm{C}\cos(ct+\gamma) + \text{etc.}$

$s' = \mathrm{A}\sin\alpha + \mathrm{B}'\sin(bt+\beta) + \mathrm{C}'\sin(ct+\gamma) + \text{etc.}$, $u' = \mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}'\cos(bt+\beta) + \mathrm{C}'\cos(ct+\gamma) + \text{etc.}$

suivrons pas dans l'exposition de cette méthode d'élimination fondée sur la similitude des équations du système, quoique M. Laplace la donne (*Mém. de Par.*, 1772, part. II, p. 306) comme très belle et comme étant ce qu'on peut trouver de plus simple ; et nous passerons à l'article 5, intitulé : *Remarques sur les mouvemens des nœuds et les variations des inclinaisons qui résultent des formules trouvées dans l'article précédent.*

Limites des variations séculaires du nœud et de l'inclinaison.

Les relations primitives établies entre les variables s, u, θ et ω servent à déterminer les valeurs de ces deux-ci, lorsque celles des premières sont connues ; elles ne donnent cependant que la tangente de la longitude du nœud ω au lieu de l'angle lui-même ; mais on peut en tirer facilement l'expression de $d\omega$, et de là, par l'intégration, celle de ω. L'auteur fait voir que si on égale à zéro la valeur du coefficient différentiel de ω, par rapport au temps, on a l'équation qui donne les *maxima* et *minima* de cet angle ; que, lorsque cette équation sera possible, ω sera renfermé dans les limites données, et le nœud n'aura par conséquent qu'un mouvement de libration ; mais que dans le cas contraire, il n'y aura ni *maximum* ni *minimum*, l'angle ω croîtra continuellement, et le nœud aura nécessairement un mouvement continu et progressif.

Lagrange considère en particulier le cas où il n'y a que deux orbites mobiles. Il trouve alors que l'équation du *minimum* ou du *maximum* n'est possible que lorsque B = ou < A, abstraction faite des signes. Il intègre complètement l'expression de $d\omega$, et discute les divers cas où A et B sont de même signe ou de signe différent, et dans lesquels le premier est plus grand ou plus petit que le second (*). Il indique un autre procédé pour

(*) Les valeurs précédentes donnent, dans le cas de deux orbites seulement,

$$\tang\omega = \frac{s}{u} = \frac{A\sin\alpha + B\sin(bt+\zeta)}{A\cos\alpha + B\cos(bt+\zeta)},\ \text{et de là}\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{dt}\frac{d.\tang\omega}{1+\tang^2\omega} = \frac{bB[B + A\cos(bt+\zeta-\alpha)]}{A^2+B^2+2AB\cos(bt+\zeta-\alpha)};$$

l'équation du *maximum* ou *minimum* est donc $B + A\cos(bt+\zeta-\alpha) = 0$. Soit $bt+\zeta-\alpha = \varphi$,

on aura $$d\omega = \frac{(B^2 + AB\cos\varphi)\,d\varphi}{A^2+B^2+2AB\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{2} + d\psi,\ \text{en faisant}\ d\psi = \frac{1}{2}\frac{(B^2-A^2)\,d\varphi}{A^2+B^2+2AB\cos\varphi}.$$

Or l'on voit facilement, en mettant pour $\cos\varphi$ sa valeur en exponentielles imaginaires, que le dénominateur de la valeur de $d\psi$ est égal au produit des deux facteurs $A + Be^{\varphi\sqrt{-1}}$, et $A + Be^{-\varphi\sqrt{-1}}$.

On peut alors mettre cette valeur sous la forme $d\psi = -\frac{1}{2}\frac{Ad\varphi}{A+Be^{\varphi\sqrt{-1}}} + \frac{1}{2}\frac{Be^{-\varphi\sqrt{-1}}}{A+Be^{-\varphi\sqrt{-1}}}\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}}$;

et comme le dernier terme est intégrable immédiatement, et que le premier le devient en le multipliant haut et bas, par $e^{-\varphi\sqrt{-1}}$,

on tire de là $$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{B+Ae^{-\varphi\sqrt{-1}}}{A+Be^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{A+Be^{\varphi\sqrt{-1}}}{B+Ae^{\varphi\sqrt{-1}}}\right);$$

et en repassant aux nombres

$$e^{2\psi\sqrt{-1}} = \frac{A+Be^{\varphi\sqrt{-1}}}{B+Ae^{\varphi\sqrt{-1}}},\quad \tang\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{e^{2\psi\sqrt{-1}}-1}{e^{2\psi\sqrt{-1}}+1} = \frac{B-A}{B+A}\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-1}{e^{\varphi\sqrt{-1}}+1} = \frac{B-A}{B+A}\tang\frac{\varphi}{2}.$$

On aura donc $\omega = \frac{\varphi}{2} + \psi + m$, ψ étant déterminé en fonction de φ par la relation précédente, m étant une constante qui doit être égale à la valeur de ω quand $\varphi = 0$, ou quand on a $bt+\zeta = \alpha$, ce qui donne, en substituant cette valeur dans celle de $\tang\omega$, $m = \alpha$. Dans le cas où A et B sont de même signe, et où l'on a B > A, on peut supposer $\frac{B-A}{B+A} = \cos h$, ce qui donne $\tang\psi = \cos h\,\tang\frac{\varphi}{2}$; d'où l'on voit qu'en prenant h pour l'inclinaison, $\frac{\varphi}{2}$ est l'argument de latitude, ψ la distance au nœud, $\frac{\varphi}{2} - \psi$ la réduction à l'écliptique, et $bt + \zeta$ le lieu moyen du nœud.

trouver la valeur de l'angle ϖ, par le moyen de sa tangente, sans employer aucune différenciation ni intégration (*); il l'applique ensuite au cas général où il y a plus de deux orbites, et obtient une série qui est toujours convergente lorsque le plus grand des coefficiens surpasse la somme de tous les autres pris positivement, et qui donne alors, pour la valeur moyenne de ϖ, l'angle dont le sinus et le cosinus sont multipliés par ce coefficient, dans l'expression de tang ϖ.

Quant à la tangente θ de l'inclinaison de l'orbite, il montre qu'à cause de sa forme radicale, elle sera nécessairement renfermée dans de certaines limites, à moins que les racines b, c, etc., ne deviennent égales ou imaginaires (**); et qu'il sera difficile de résoudre, lorsqu'il y a plus d'un terme, l'équation qui donne les *maxima* et les *minima* de θ.

L'auteur n'a considéré jusqu'alors que la position de l'orbite de la planète T rapportée à l'écliptique; mais il fait voir qu'on peut appliquer immédiatement les valeurs précédentes aux orbites des autres planètes, en marquant chaque lettre d'un ou deux traits, etc., et qu'il est facile d'appliquer la même théorie à la position relative des orbites. Il donne ensuite une manière fort simple de trouver la position de chaque orbite au bout d'un temps quelconque, et d'en représenter les divers mouvemens.

Construction pour déterminer la position des orbites.

« Ayant tracé, dit-il, sur la surface de la sphère, un grand cercle qu'on prendra » pour l'écliptique, on décrira un autre grand cercle qui coupe celui-là, en sorte que » la longitude du nœud soit α, et la tangente de l'inclinaison A; on décrira ensuite un » troisième grand cercle qui coupe le second, en sorte que la longitude de son nœud » sur ce même cercle soit $bt+\beta$, et la tangente de l'inclinaison B; on décrira de même » un quatrième grand cercle qui coupe le troisième, de manière que la longitude du » nœud soit $ct+\gamma$, et la tangente de l'inclinaison C, et ainsi de suite, le nombre des » cercles inclinés au premier devant être égal à celui des orbites mobiles. Le dernier

(*) On a en effet

$$2\varpi\sqrt{-1}=\log e^{\varpi\sqrt{-1}}-\log e^{-\varpi\sqrt{-1}}=\log\left(\frac{1+\tang\varpi\sqrt{-1}}{1-\tang\varpi\sqrt{-1}}\right);$$

et si l'on substitue dans cette formule la valeur de tang ϖ, en faisant $bt+\beta=\zeta$, elle donne

$$\varpi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{Ae^{\alpha\sqrt{-1}}+Be^{\zeta\sqrt{-1}}}{Ae^{-\alpha\sqrt{-1}}+Be^{-\zeta\sqrt{-1}}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left[\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\left(1+\frac{B}{A}e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\alpha\sqrt{-1}}\left(1+\frac{B}{A}e^{-(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}\right)}\right]$$

$$=\alpha+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log\left(1+\frac{B}{A}e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}\right)-\log\left(1+\frac{B}{A}e^{-(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}\right)\right];$$

d'où l'on tire, en développant les logarithmes en séries, et en repassant des exponentielles imaginaires aux sinus et cosinus,

$$\varpi=\alpha+\frac{B}{A}\sin(\zeta-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^2\sin 2(\zeta-\alpha)+\frac{1}{3}\left(\frac{B}{A}\right)^3\sin 3(\zeta-\alpha)+\text{etc.},$$

série qui est toujours convergente lorsque $B<A$, et qui montre que dans ce cas α est la valeur moyenne de ϖ.

(**) S'il n'y a que deux orbites mobiles, on aura

$$\theta=\sqrt{s^2+u^2}=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(bt+\beta-\alpha)},$$

et les deux limites de θ seront $A+B$ et $A-B$. L'équation du *maximum* et du *minimum*, dans le cas général, sera

$$bAB\sin(bt+\beta-\alpha)+cAC\sin(ct+\gamma-\alpha)+\text{etc.}+(b-c)BC\sin[(b-c)t+\beta-\gamma]+\text{etc.}=0.$$

» de tous ces cercles déterminera la position de l'orbite de la planète T ; et son inter-
» section avec le cercle de l'écliptique donnera le lieu du nœud et l'inclinaison cherchée
» de cette orbite (*).

» On fera la même chose pour l'orbite de chacune des autres planètes T′, T″, etc.,
» en conservant les mêmes longitudes des nœuds, mais en prenant pour les tangentes des
» inclinaisons les quantités A′, B′, C′, etc., A″, B″, C″, etc.

» De cette manière, on voit que le mouvement du nœud et la variation de l'inclinai-
» son de chaque planète peuvent être regardés comme le résultat des seuls mouve-
» mens des nœuds des différentes orbites dont chacune serait mue uniformément sur
» la précédente, en gardant toujours la même inclinaison ; et ces mouvemens particuliers
» des nœuds seront les mêmes pour les orbites de toutes les planètes, mais les incli-
» naisons devront être différentes pour chaque planète. »

Lagrange applique ensuite, dans l'article 6, sa méthode générale à la recherche des équations séculaires des nœuds et des inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne. Il désigne leurs masses par T, T′, et leur applique toutes les notations précédentes, en les marquant d'un trait pour Saturne ; et comme les quantités (0,1), (0,2), qui dépendent de ces masses, ont des valeurs considérablement plus grandes que les suivantes, où il y a aussi les chiffres 0 ou 1 avant la virgule, il peut négliger toutes celles-ci et les regarder comme nulles vis-à-vis de celles-là. De cette manière, les quatre premières équations différentielles ne renfermant plus que les quatre variables s, u, s', u', peuvent être traitées à part, et indépendamment de toutes les autres. Il donne à chacune de ces variables des valeurs composées de deux termes périodiques ; les deux équations de condition que donne la substitution, déterminent, par l'élimination, la valeur de b en fonction de (1,0) et (0,1), qui sont des quantités connues, et donnent une relation entre B′ et B. Il ne lui reste donc plus à déterminer que les constantes A, B, α, ζ; il y parvient au moyen des valeurs connues des lieux des nœuds, et des inclinaisons de Jupiter et de Saturne, pour l'époque du 1er janvier 1760, à midi moyen, où il suppose que l'on ait $t = 0$; ce qui lui fournit quatre équations de condition, qui donnent $A = 0{,}029029$, $B = 0{,}006558$, etc., et de là les expressions numériques et rigoureuses des variables. Les valeurs de B et B′, comparées à celle de A, lui montrent que le lieu moyen des nœuds des orbites de Jupiter et de Saturne est fixe, et que les nœuds de ces deux planètes n'ont, autour de ce point de l'écliptique, que des mouvemens de libration dont il fixe la période entière à environ 51150 ans, et l'étendue à 26° 7′ pour Jupiter, et à 64° 8′ pour Saturne ; il trouve la variation totale de l'inclinaison de 45′ 3″ pour Jupiter, et de 1° 45′ 51″ pour Saturne ; leur période est d'ailleurs la même que celle de la variation des nœuds. Il détermine aussi les mouvemens annuels des nœuds et des inclinaisons de ces planètes, d'après les valeurs de $d\omega$, $d\omega'$, $d\theta$, $d\theta'$, quand on y fait $dt = 1$.

3e Partie. Application de la théorie précédente à chaque planète en particulier.

Orbites de Jupiter et de Saturne.

(*) En effet, ne considérons, pour plus de simplicité, que deux orbites mobiles, savoir, celle du plan de l'angle $bt + \zeta$ et celle de la planète. Les formules (a) et (b) de la page 100 nous donneront, en y faisant $\tan \gamma = \theta$, $\tan \gamma' = A$, $\tan \eta = B$, $\alpha = \omega$, $\alpha' = \alpha$, $\varpi = bt + \zeta$,

$$\theta \sin \omega = A \sin \alpha + B \sin (bt + \zeta), \qquad \theta \cos \omega = A \cos \alpha + B \cos (bt + \zeta),$$

relations qui vérifient la construction sur laquelle elles sont fondées, puisqu'elles sont les mêmes que celles que donne dans ce cas la théorie. Voyez pour le cas général la démonstration de Lagrange, *Mém. de Berlin*, 1782, pag. 239.

Orbites de la Terre, Vénus et Mars.

L'article 7 est consacré aux mêmes recherches relativement aux orbites de la Terre, de Vénus et de Mars, dont il désigne les masses par T'', T''', T^{iv}, et les variables par les mêmes lettres que pour les deux premières planètes, marquées de deux, de trois ou de quatre traits. Il néglige l'action de Mercure, et substitue les valeurs précédentes de s, u, s', u' dans les six équations restantes, qui sont linéaires du premier ordre en s'', u'', s''', etc. Il y satisfait en donnant à chaque variable une valeur composée de trois termes périodiques, dont la substitution lui donne, en comparant séparément les termes qui ont en facteur les sin. ou cos. des angles α, $bt + 6$, $ct + \gamma$, six équations de condition; les trois premières servent à déterminer B'', B''', B^{iv}, et les trois autres donnent, par l'élimination, une équation finale du troisième degré en c, qui, ayant trois racines c, d, e, introduit deux nouveaux termes, multipliés par les lettres D et E affectées de deux, trois ou quatre traits, dans les valeurs complètes de chaque variable. Connaissant ces trois racines, on peut déterminer, à l'aide des deux dernières équations de condition, les rapports des trois quantités C'', C''', C^{iv}, en y substituant la valeur de c, et de même ceux des lettres D'', D''', D^{iv}, E'', E''', E^{iv}, en y changeant successivement c en d et en e. L'auteur remarque que, quoiqu'à la rigueur le choix de ces équations de condition soit indifférent pour ces déterminations, il convient de les combiner de manière à ce qu'elles ne donnent pas pour les valeurs des inconnues, des fractions dont le numérateur et le dénominateur soient à la fois des nombres très petits, auquel cas une erreur très petite dans ces nombres en produirait une beaucoup plus grande dans la valeur de leur rapport. Il ne s'occupe pas de déterminer si les angles α'', α''', α^{iv} ont des limites ou non; ce qui serait difficile, dit-il, parce que les expressions des quantités s'', s''', s^{iv} contiennent plusieurs termes; et il termine cet article en donnant les formules des variations annuelles des deux élémens pour les trois planètes. Il passe ensuite à l'orbite de Mercure, dans l'art. 8, et intègre de la même manière les équations différentielles qui s'y rapportent, et qui deviennent très simples, en supposant connus les mouvemens des orbites des autres planètes. Enfin il s'occupe, dans l'art. 9, des changemens de latitude et de longitude des étoiles fixes, causés par le déplacement de l'orbite de la Terre, et il donne des tables qui s'étendent jusqu'à vingt siècles, tant avant qu'après 1760, pour calculer ces variations séculaires, de même que celles de l'obliquité de l'écliptique et de la longueur de l'année tropique. Il en conclut que l'obliquité de l'écliptique a dû diminuer pendant tout cet espace de temps, que sa diminution séculaire actuelle est de 56'', et que l'année tropique est maintenant de 21'',75 plus courte qu'elle ne l'était du temps d'Hipparque.

Orbite de Mercure.

Tables diverses.

2e Mémoire de M. Laplace sur les inégalités séculaires.

Les Mémoires de l'Académie, pour 1772, 1re partie, publiés en 1775, contiennent des *Recherches* de Lagrange *sur la manière de former des tables des planètes d'après les observations*, qui ne sont pas de notre sujet; ils renferment aussi un Mémoire de M. Laplace, *sur les solutions particulières des équations différentielles, et sur les inégalités séculaires des planètes*. « J'ai déjà donné, dit-il, § 13, les expressions différentielles des inégalités séculaires des planètes sous une forme aussi simple qu'on puisse le desirer; je m'étais proposé depuis long-temps de les intégrer; mais le peu d'utilité de ce calcul pour les besoins de l'Astronomie, joint aux difficultés qu'il présentait, m'avait fait abandonner cette idée, et j'avoue que je ne l'aurais pas reprise, sans la lecture d'un excellent Mémoire que M. de la Grange vient d'envoyer à l'Académie. Cet illustre géomètre, au moyen d'une transformation heureuse, réduit le problème des variations du nœud et de l'inclinaison, à l'intégration d'autant d'équa-

» tions différentielles linéaires du premier ordre qu'il y a d'inconnues; il donne ensuite » une méthode fort ingénieuse pour les intégrer, et pour déterminer les constantes que » renferme l'intégrale, quel que soit le nombre des planètes. En employant la même trans» formation, j'ai tiré les mêmes équations de mes formules; j'ai de plus cherché si l'on » ne pourrait pas déterminer d'une manière analogue les inégalités séculaires de l'excen» tricité et du mouvement de l'aphélie, et j'y suis heureusement parvenu. »

Intégration des équations qui donnent les variations de l'excentricité et de l'aphélie.

Pour arriver à ce dernier résultat, l'auteur part des formules différentielles qu'il a obtenues dans son précédent Mémoire, pour les variations de la longitude de l'aphélie L, et du rapport e de l'excentricité au demi-grand axe d'une planète dont la masse est $\delta\mu$. Il fait usage des mêmes notations, en désignant de plus, à l'exemple de Lagrange, par des nombres placés entre deux crochets, les coefficiens de chaque terme (*). Il substitue alors à e et L de nouvelles variables $x = e\sin L$, $y = e\cos L$, et faisant usage des mêmes notations accentuées pour toutes les planètes du système, il obtient sans difficulté les expressions générales de dx, dy, dx', etc., en fonction du temps et des variables x, y, x', etc., multipliées par les coefficiens $(0,1)$, $(\overline{0,1})$, $(0,2)$, etc. (**). Ces formules ont une forme à peu près semblable à celle des équations du mouvement des nœuds et de l'inclinaison auxquelles elles sont réductibles, en supposant $(\overline{0,1}) = (0,1)$, $(\overline{0,2}) = (0,2)$, etc.; s'il y a n planètes, et par conséquent $2n$ variables, on a un nombre $2n$ d'équations différentielles linéaires du premier ordre pour les déterminer; leur intégration est tout-à-fait analogue à celle du premier système; et lorsque x, y, x', etc., sont connus, on en conclut facilement e, L, e', etc., au moyen des relations qui les lient.

L'auteur ayant envoyé à Lagrange ses Recherches sur les inégalités séculaires des Planètes, lorsqu'elles furent imprimées, celui-ci lui communiqua, dans une lettre datée du 10 avril 1775, une méthode très élégante pour trouver directement les équations différentielles de l'excentricité et de l'aphélie, en employant la solution du problème des trois corps de Clairaut, et la même tranformation de coordonnées que M. Laplace. Ce dernier la fit paraître textuellement dans des *Additions* à son Mémoire, que l'on trouve à la fin du volume cité. Il y ajouta l'exposition succincte d'une nouvelle méthode d'approxi-

---

(*) L'auteur suppose $\frac{a}{a'} = z$, $(1 - 2z\cos\theta + z^2)^{-\frac{3}{2}} = b + b_1\cos\theta +$ etc.; il désigne par $\frac{di.360^\circ}{dt}$ le rapport du temps de la révolution de la Terre à celui de la planète troublée; et faisant

$$\frac{1}{4} z b_1 \delta\mu' \frac{di.360^\circ}{dt} = (0,1), \quad \frac{1}{2}[b_1(1+z^2) - 3bz]\delta\mu' \frac{di.360^\circ}{dt} = (\overline{0,1}), \quad \text{etc.},$$

ses formules deviennent

$$dL = (0,1)dt - (\overline{0,1})\frac{e'}{e}\cos(L'-L)dt + \text{etc.}, \quad de = (\overline{0,1})e'dt\sin(L'-L) + \text{etc.}$$

(**) Soit fait $x = e\sin L$, $y = e\cos L$, $x' = e'\sin L'$, $y' = e'\cos L'$, etc., d'où l'on tire

$$e = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tang}\,L = \frac{x}{y}, \; dL = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}, \quad \cos(L'-L) = \frac{xx'+yy'}{ee'}, \quad \text{etc.};$$

les formules précédentes deviennent alors

$$ydx - xdy = (x^2+y^2)(0,1)dt - (\overline{0,1})dt(xx'+yy') + \text{etc.}, \quad xdx + ydy = (\overline{0,1})dt(yx' - xy') + \text{etc.};$$

d'où l'on tire facilement, par l'élimination, les équations

$$dx = dt\left\{[(0,1) + (0,2) + \text{etc.}]y - (\overline{0,1})y' - (\overline{0,2})y'' - \text{etc.}\right\},$$
$$dy = -dt\left\{[(0,1) + (0,2) + \text{etc.}]x - (\overline{0,1})x' - (\overline{0,2})x'' - \text{etc.}\right\},$$

auxquelles on satisfait en posant $x = A\sin(ht+\alpha)$, $y = A\cos(ht+\alpha)$, $x' = A'\sin(ht+\alpha)$, etc.

Méthode pour faire disparaître les arcs de cercle.

mation à laquelle les recherches précédentes l'avaient conduit. « Elle est générale, dit-il, » et sur-tout fort simple, quel que soit le nombre des variables, tandis que les méthodes » déjà connues mènent à des calculs impraticables lorsque le nombre des variables est » indéfini. Elle consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales ap- » prochées, et à faire disparaître, par ce moyen, les arcs de cercle, lorsque cela est » possible. Cette manière de faire ainsi varier les constantes arbitraires, est, si je ne me » trompe, absolument nouvelle, et d'une grande fécondité dans l'analyse. Elle est très » utile lorsque les variables sont fonctions de quantités périodiques, et d'autres quantités » croissant très lentement, ce qui est le cas de toutes les questions relatives à l'Astronomie » physique. »

Nous avons déjà vu que, lorsque dans une équation différentielle du second ordre en y, par rapport au temps t, il se rencontre des termes qui contiennent les puissances de y, ou leurs produits par les fonctions périodiques de t, multipliées par un coefficient très petit α; si, après avoir supposé $\alpha = 0$ et intégré, l'on substitue dans le terme de l'ordre α la valeur obtenue pour y, une nouvelle intégration introduit dans cette valeur des termes où les sin. et cos. de t sont multipliés par la première puissance du temps. Si l'on pousse l'approximation jusqu'à l'ordre α^2, on voit naître de la même manière des termes qui contiennent le carré du temps en dehors des signes périodiques, et ainsi de suite. Pour remédier à cette introduction, M. Laplace, après avoir intégré à deux reprises, ainsi que nous venons de l'indiquer, avec deux constantes arbitraires p et q, qu'on détermine par les valeurs de y et de sa dérivée quand $t = 0$, fait ensuite $t = T + t_1$, dans l'équation différentielle, T étant constant, et intègre de nouveau celle-ci, ainsi modifiée, avec deux constantes p_1, q_1, jusqu'à l'ordre α inclusivement. Si l'on avait $\alpha = 0$, la comparaison des deux valeurs de y provenant de l'intégration, donnerait $p_1 = p$, $q_1 = q$; ainsi ces constantes ne diffèrent que de quantités de l'ordre α. L'auteur suppose alors qu'on ait $p_1 = p + \delta p$, $q_1 = q + \delta q$; il retranche la première valeur de y de la seconde, après avoir substitué dans celle-ci $t - T$ au lieu de t_1; et comme elles doivent être identiques, il en tire une équation de condition; celle-ci se partage, à cause de t variable et de T supposé constant, en deux autres qui lui donnent les valeurs de δp et δq en fonction de q et de p multipliés par αT. Il conclut de là que p et q sont fonctions de αT, et que p_1 et q_1 peuvent être développés par la série de Taylor, suivant les coefficiens différentiels de p et de q, par rapport à αT, multipliés par les puissances de αT. Il réduit ainsi les deux relations trouvées, en y comparant les termes multipliés par αT, à deux équations linéaires du premier ordre. L'intégration de celles-ci avec deux nouvelles constantes f et f_1, lui donne les expressions de p et de q après le temps T, ou, ce qui est la même chose, les valeurs de p_1 et de q_1; il les substitue dans la dernière valeur de y, en y supposant $t_1 = 0$; et détruisant ainsi les arcs de cercle, en faisant rentrer αT sous les signes sin. et cos., il obtient la véritable expression de y après le temps quelconque T, lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre α^2 (*). Si l'on voulait porter la

(*) Soit, par exemple, l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y \cos 2t$ à intégrer jusqu'à l'ordre α inclusivement.

On a, quand $\alpha = 0$, $y = p \sin t + q \cos t$; soit maintenant $y = p \sin t + q \cos t + \alpha z$; on obtiendra, en intégrant l'équation en z,

$$y = \left(p + \frac{\alpha}{4} qt\right) \sin t + \left(q + \frac{\alpha}{4} pt\right) \cos t - \frac{\alpha p}{16} \sin 3t - \frac{\alpha q}{16} \cos 3t.$$

précision jusqu'aux quantités de cet ordre, il faudrait opérer de la même manière, en faisant varier les nouvelles arbitraires f, f_1, et ainsi de suite.

La méthode précédente se trouve développée avec plus d'étendue, et appliquée au mouvement des planètes, dans un grand Mémoire de M. Laplace, compris dans ceux de l'Académie, pour 1772, 2ᵉ part., et intitulé : *Recherches sur le Calcul intégral, et sur le système du Monde.* L'auteur, après avoir fait, dans le préambule de cet ouvrage, une exposition rapide et lumineuse des principales méthodes par lesquelles on a intégré par approximation les équations du mouvement des planètes, et des difficultés de cette théorie, applique sa nouvelle méthode à trois différens exemples, en allant, dans le dernier, jusqu'aux quantités de l'ordre α^2, et en déterminant à chaque approximation les constantes arbitraires, de manière à faire disparaître les arcs de cercle. Il expose ensuite un nouveau procédé dans lequel, au lieu de répéter l'opération autant de fois qu'il y a d'approximations, on intègre l'équation différentielle en poussant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre auquel on veut s'arrêter, et en conservant d'abord les arcs de cercle, que l'on fait disparaître ensuite par une seule opération.

Nouveau Mémoire de M. Laplace sur la théorie des planètes.

Première partie. Méthodes générales.

Supposant, par exemple, que l'on veuille aller jusqu'à l'ordre α^2 inclusivement, il pose $y = z + \alpha z' + \alpha^2 z''$; il substitue cette valeur de y dans l'équation différentielle ; et comparant séparément les termes sans α, ceux de l'ordre α et ceux de l'ordre α^2, il obtient trois équations du second ordre, qui lui donnent, en les intégrant successivement, les valeurs de z, z', z'', et de là celle de y. Celle-ci comprend deux constantes p et q, et contient des termes où $\sin t$ et $\cos t$ sont multipliés par t et t^2, et d'autres de la forme $\alpha^2 t \sin 2t$, $\alpha^2 t \cos 2t$. Ce sont tous ces termes qu'il s'agit de faire disparaître. L'auteur suit alors la méthode dont nous venons de parler; il fait voir qu'on peut, sans intégrer une seconde fois, conclure de l'intégrale précédente celle qui se rapporte au cas où l'on a $t = \mathrm{T} + t_1$, en changeant dans la première p en p_1, q en q_1, t en t_1, et en mettant $\mathrm{T} + t_1$ au lieu de t sous les sinus et les cosinus. Il compare, dans l'une et dans l'autre valeur de y, les coefficiens de $\sin t$ et $\cos t$, et obtient ainsi deux équations où il fait $t_1 = 0$, et où il substitue pour p_1 et q_1 leurs développemens. Il obtient ensuite, en

---

Soit maintenant $t = \mathrm{T} + t_1$; l'équation générale devient $\frac{d^2 y}{dt_1^2} + y = \alpha y \cos 2(\mathrm{T} + t_1)$, et donne, en l'intégrant, $y = \left(p_1 + \frac{\alpha}{4} q_1 t_1\right) \sin(\mathrm{T} + t_1) + \left(q_1 + \frac{\alpha}{4} p_1 t_1\right) \cos(\mathrm{T} + t_1) + \text{etc.}$

Si l'on substitue dans cette valeur $t - \mathrm{T}$ au lieu de t_1, $p + \delta p$, $q + \delta q$ au lieu de p_1 et q_1, et qu'on en retranche la précédente, on aura, en égalant séparément à zéro les coefficiens de $\sin t$ et $\cos t$,

$$\delta p = \frac{\alpha}{4} \mathrm{T} q, \qquad \delta q = \frac{\alpha}{4} \mathrm{T} p;$$

et comme l'on a, en faisant $\frac{\alpha}{4} \mathrm{T} = x$: $\delta p = x \frac{dp}{dx} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2 p}{dx^2} + \text{etc.}$, $\delta q = x \frac{dq}{dx} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2 q}{dx^2} + \text{etc.}$, les équations précédentes deviendront, en y comparant les quantités de l'ordre x,

$$\frac{dp}{dx} = q, \qquad \frac{dq}{dx} = p;$$

d'où l'on tire, en faisant $p = f e^{nx}$, $q = g e^{nx}$, et en substituant : $f = g$, $n = \pm 1$, et de là

$$p = f e^{\frac{1}{4}\alpha \mathrm{T}} + f_1 e^{-\frac{1}{4}\alpha \mathrm{T}}, \qquad q = f e^{\frac{1}{4}\alpha \mathrm{T}} - f_1 e^{-\frac{1}{4}\alpha \mathrm{T}};$$

ce qui donne

$$y = f e^{\frac{1}{4}\alpha \mathrm{T}} \left\{ \sin \mathrm{T} + \cos \mathrm{T} - \frac{\alpha}{16} (\sin 3\mathrm{T} + \cos 3\mathrm{T}) \right\} + f_1 e^{-\frac{1}{4}\alpha \mathrm{T}} \left\{ \sin \mathrm{T} - \cos \mathrm{T} - \frac{\alpha}{16} (\sin 3\mathrm{T} - \cos 3\mathrm{T}) \right\}.$$

comparant séparément les termes multipliés par T, deux équations du premier ordre, qu'il combine et transforme pour les rendre linéaires, et d'où il tire, par l'intégration, les valeurs de p et de q; et comme les coefficiens de T, ceux de T^2, etc., doivent être égaux séparément, ces valeurs satisfont aux équations qui résulteraient de la comparaison des coefficiens de T^2, et des puissances supérieures s'il y en entrait, dans les valeurs de y; il les substitue alors dans la dernière, en y supposant $t_{,}=0$, et obtient une expression qui est tout-à-fait la même que celle à laquelle il était parvenu par le procédé successif.

Eclaircissement d'une difficulté.

Avant de suivre l'auteur dans les nouvelles applications qu'il fait de sa méthode, nous devons dire un mot d'une remarque sur ce sujet, qu'il a insérée dans des *Additions* à la suite de ce Mémoire. Il observe, p. 534, que p, q, et leurs coefficiens différentiels étant les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$, etc. lorsque $x=0$, ne sont point fonctions de x; et que cependant, en intégrant les équations $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=p$, il a regardé ces quantités comme des fonctions de x. Pour résoudre cette difficulté, il reprend le premier exemple cité, il fait... $t=T+T'+t_{,,}$, il parvient à l'expression de y, qui résulte de cette supposition, en désignant par $p_{,,}$ et $q_{,,}$ les nouvelles constantes arbitraires; il la compare ensuite à l'expression obtenue dans le cas de $t=T+t_{,}$, et en déduit, en faisant $\frac{1}{4}\alpha T'=x'$, $dx'=dx$, les deux équations $\frac{dp_{,}}{dx}=q$, $\frac{dq_{,}}{dx}=p$, qui lui montrent que les relations précédentes ont lieu, x étant quelconque, et qu'ainsi on peut, en les intégrant, regarder p et q comme fonctions de x. Ce raisonnement pouvant s'appliquer à tous les exemples que l'auteur a donnés, sert, dit-il, non-seulement à mettre sa méthode hors de toute atteinte, mais encore à présenter une idée nette du principe métaphysique sur lequel elle est fondée. Il ajoute que l'ayant envoyée à M. de Lagrange, celui-ci lui répondit qu'il en avait pareillement imaginé une qui y avait rapport. M. Laplace la donne telle que l'auteur la lui avait communiquée, et il remarque que, quoiqu'elle conduise à deux équations différentielles du second ordre entre p et q, on voit, avec un peu d'attention, que les coefficiens différentiels du second ordre sont d'un ordre de grandeur moindre que ceux du premier, et peuvent être négligés, ce qui abaisse les équations au premier ordre, et les fait rentrer dans celles que donne sa méthode.

Intégration d'un système d'équations analogues à celles des planètes.

Dans les deux premiers articles du Mémoire dont nous nous occupons, l'auteur n'a considéré que les équations différentielles à deux variables; il s'occupe, dans l'article 3, d'un système de n équations symétriques, du second ordre entre n variables y, y', etc. et le temps t. Ces équations, qui sont à peu près du même genre que celles du mouvement des planètes, mèneraient à des calculs impraticables si elles étaient traitées par les méthodes déjà connues. L'application qu'il fait alors de son nouveau procédé, en poussant l'approximation jusqu'à l'ordre α, le conduit à un nombre d'équations linéaires du premier ordre, qui est égal à celui des constantes h, l, h', etc., devenues variables; il intègre ces équations, qui sont tout-à-fait analogues à celles qui donnent les inégalités séculaires, par un procédé semblable à celui qu'on emploie pour celles-ci. La substitution des valeurs périodiques $b\sin(fx+\varpi)$, $b'\sin(fx+\varpi)$, etc., supposées à h, h', etc., donne des équations de condition d'où l'on peut tirer par l'élimination la valeur de f. L'auteur cite la règle donnée pour cet

objet par M. Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes;* il reprend ensuite cette matière, et donne quelques procédés plus simples que ceux qui sont déjà connus pour éliminer entre un nombre quelconque d'équations du premier degré.

Deuxième partie. Théorie des planètes.

La seconde partie de ce Mémoire commence à l'article 8, intitulé : *Application de la méthode précédente à la théorie des planètes :* « Je me propose, dit l'auteur, » de considérer toutes les inégalités, tant périodiques que séculaires, du mouvement » de ces corps; on verra avec quelle facilité la méthode précédente donne ces inéga- » lités; et j'ose me flatter que cette discussion intéressera les géomètres par sa généralité, » et sur-tout par l'exactitude de ses résultats. » Nous avons déjà dit un mot, p. 103, de la manière dont il parvient ici, de même que dans le tome 7 des *Sav. Etrangers*, p. 167, aux équations générales du mouvement d'un point sollicité par des forces quelconques, en fonction des coordonnées polaires; il en tire celles qui déterminent séparément chacune de ces coordonnées, en prenant pour variable indépendante l'angle φ, que fait la projection r du rayon vecteur avec l'axe des x; et il les applique, dans l'article 9, à la recherche du mouvement des planètes autour du Soleil, en négligeant leur action les unes sur les autres. Il suppose d'abord que le plan fixe des xy soit celui de l'orbite, et détermine complètement toutes les circonstances du mouvement elliptique. Nous citerons, comme digne d'être remarqué, le procédé par lequel il obtient immédiatement par l'intégration la valeur approchée de φ en fonction des cosinus des divers multiples du moyen mouvement nt, et de là celle du rayon vecteur en fonction des sinus des mêmes angles, sans avoir recours au retour des suites (*). L'auteur suppose ensuite que l'on veuille rapporter le mouvement de la planète à un autre plan très peu incliné à celui de son orbite et passant par le centre du Soleil; il modifie ses formules suivant cette supposition, et calcule ce qu'on appelle la *réduction à l'écliptique*.

Mouvement elliptique.

Mouvement troublé.

L'article 10 et les neuf suivans sont consacrés au calcul du mouvement des planètes autour du Soleil, en ayant égard à leur action les unes sur les autres. M. Laplace y reprend les trois équations générales qui déterminent en fonction du temps les coordonnées de la planète troublée; il en différencie, par rapport à δ, la partie elliptique, et y ajoute les termes qui dépendent des forces perturbatrices, dont il détermine les valeurs; α étant ici fort petit, il n'a égard qu'aux quantités des ordres α et α^2; et parmi

(*) L'équation qui détermine φ en fonction de t dans l'orbite elliptique, est

$$d\varphi = \frac{hdt}{r^2} = ndt\,(1 - \alpha^2 e^2)^{-\frac{3}{2}}\,(1 - \alpha e \cos\varphi)^2,$$

en supposant l'origine des angles φ et nt à l'aphélie, et en désignant par αe l'excentricité. M. Laplace pose $\varphi = nt + \alpha z + \alpha^2 z' +$ etc., et il en tire, par la différenciation, une valeur de $d\varphi$. Il substitue la valeur supposée de φ dans le second membre de l'équation ci-dessus, et le développe en suites ascendantes par rapport à α, en s'arrêtant à α^2; il compare séparément les termes de l'ordre α, et ceux de l'ordre α^2 de cette seconde valeur de $d\varphi$, avec ceux de la première, et en conclut

$$dz = -2endt \cos nt, \quad dz' = ndt\left(2e^2 + 2ez \sin nt + \frac{e^2}{2} \cos 2nt\right);$$

d'où il tire, par l'intégration et la substitution,

$$\varphi = nt - 2\alpha e \sin nt + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 \sin 2nt + \text{etc.},$$

et de là

$$r = \sqrt{\frac{hdt}{d\varphi}} = a\left(1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e \cos nt - \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cos 2nt + \text{etc.}\right).$$

les termes de ce dernier ordre, il ne considère que ceux qui peuvent produire, dans la valeur de $\delta\varphi$, des quantités de la forme $\delta\mu'\alpha^2ht^2$, d'où résulterait une équation séculaire dans le moyen mouvement de la planète. Il distingue alors, par des variables particulières, les parties des valeurs de $\delta\varphi$ et δr qui sont sans α, de l'ordre α, ou de l'ordre α^2 (*); il substitue ces valeurs dans les équations, en remplaçant partout φ, r, s, φ', r', s' par leurs expressions elliptiques, ce qui est permis lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre $(\delta\mu')^2$; il compare ensuite séparément les termes de chaque ordre; et l'équation du premier ordre, qui détermine $\delta\varphi$, en donne alors trois autres entre les nouvelles variables x, x' et ζ; celle du second ordre, qui détermine δr, se partage de même en trois autres, entre y, y' et λ; enfin l'équation du second ordre en δs en donne une autre, où z est la variable principale, et où, comme dans les précédentes, aucun terme ne se trouve plus multiplié par α ou par la masse perturbatrice $\delta\mu'$.

Développement de la fonction irrationnelle.

L'article 13 de ce Mémoire est remarquable, parce qu'il contient des procédés nouveaux sur le développement du facteur irrationnel introduit, par la substitution de la valeur de la distance rectiligne v des deux planètes, dans les termes qui proviennent des forces. L'auteur ayant remplacé les inclinaisons par leurs valeurs en fonction des latitudes, désigne par q une fonction de celles-ci et des rayons vecteurs r, r', symétrique par rapport à ces derniers. Il a alors à développer le facteur $[1 - q\cos(\varphi' - \varphi)]^{-\frac{3}{2}}$ en une suite de termes de la forme $b + b_1 \cos(\varphi' - \varphi) + b_2 \cos 2(\varphi' - \varphi) + \text{etc.}$; et comme les quantités b, b_1, b_2 sont fonctions de la variable q, dont les variations sont de l'ordre α, et que l'on veut porter dans certains cas la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^2, il fait $q = h + \alpha h'$, h étant constant, et réduit b, b_1, etc., d'après la série de Maclaurin, en suites ascendantes par rapport à α, et de la forme.....

$$(b) + \alpha h'\left(\frac{db}{dq}\right) + \frac{\alpha^2 h'^2}{2}\left(\frac{d^2b}{dq^2}\right) + \text{etc.}, \quad (b_1) + \alpha h'\left(\frac{db_1}{dq}\right) + \text{etc.},$$

où les quantités, multipliées par les puissances de αh, sont ce que deviennent..... b, $\frac{db}{dq}$, $\frac{d^2b}{dq^2}$, etc., b_1, $\frac{db_1}{dq}$ etc., lorsqu'on y substitue h au lieu de q. Il ne s'agit plus alors que d'avoir les valeurs de ces derniers coefficiens différentiels. L'auteur parvient bien simplement à des relations qui déterminent ceux du premier ordre relatifs à b_2, b_3, etc., lorsqu'on connaît ceux qui se rapportent à b et b_1; la différenciation de la valeur de b_2, en fonction des deux premiers coefficiens de la série, lui sert à déterminer aussi les dérivées de b et de b_1 en fonction des mêmes coefficiens (**), et il en conclut facilement,

---

(*) Il fait

$$\delta\varphi = \delta\mu'(x + \alpha x' + \alpha^2\zeta . n^2t^2), \quad \delta r = \alpha\delta\mu'(y + \alpha y' + \alpha^2\lambda nt), \quad \delta s = \alpha z . \delta\mu'.$$

(**) En effet, soit

$$\frac{2rr'}{r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2} = q; \quad \left(1 + \frac{a'^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{[1 - q\cos(\varphi' - \varphi)]^{\mu}} = b + b_1\cos(\varphi' - \varphi) + b_2\cos 2(\varphi' - \varphi) + \text{etc.};$$

l'équation identique

$$\left(1 + \frac{a'^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} [1 - q\cos(\varphi' - \varphi)] \frac{d[1 - q\cos(\varphi' - \varphi)]^{-\mu}}{dq} = \left(1 + \frac{a'^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\mu\cos(\varphi' - \varphi)}{[1 - q\cos(\varphi' - \varphi)]^{\mu}}$$

donne, en y substituant de part et d'autre, pour $[1 - q\cos(\varphi' - \varphi)]^{-\mu}$, et pour sa différentielle par rap-

par la différenciation, les valeurs des dérivées du second ordre, qui, étant déjà multipliées par α^2, sont les dernières auxquelles il ait égard.

Nous n'entrerons pas dans le détail du développement des divers termes des équations différentielles suivant les cosinus des multiples des moyens mouvemens et de leurs combinaisons, auquel l'auteur consacre les trois articles suivans, et d'où il tire par l'intégration les valeurs de δr, $d.\delta\varphi$ et δs, aux quantités près de l'ordre α^2. Nous devons remarquer cependant que jamais peut-être des calculs analytiques aussi pénibles n'avaient encore été faits avec tant de soin et exposés avec tant de détails. C'est à l'auteur de ce travail qu'on doit, plus qu'à tout autre, d'avoir introduit dans les recherches de ce genre cette précieuse exactitude qui, sans diminuer l'éclat du génie, consolide si puissamment les résultats qu'il fait atteindre.

Variations différentielles des élémens.

M. Laplace détermine, dans l'article 17, les termes de l'ordre α^2 qui sont proportionnels à t, dans les expressions de $d.\delta\varphi$ et δr, et vérifie, en trouvant $c = 0$ après toutes les réductions, que l'équation séculaire du moyen mouvement de la planète est nulle dans cette limite. Il parvient ensuite, dans l'article 18, aux variations différentielles des autres élémens, en mettant les expressions de r et de s sous une forme analogue à celle de leurs valeurs elliptiques, et en les comparant mutuellement; et la troisième loi de Kepler, indiquant que si après plusieurs siècles les grands axes des orbites devenaient plus ou moins grands, les révolutions deviendraient moins ou plus rapides, lui fait voir qu'on peut conclure, de la constance du moyen mouvement, que la variation du grand axe est nulle; le calcul lui prouve en effet que les termes proportionnels au temps qui se trouvent dans l'expression de r, ne sont dus qu'aux variations de l'excentricité et de l'inclinaison, dont le carré se trouve dans la valeur de r, lorsqu'on suppose $\delta\mu' = 0$.

Remarque sur l'ordre des coefficiens des termes périodiques.

L'auteur remarque, dans l'article suivant, que si l'on a un argument tel que...... $\cos q\,(n't - nt + B)$, q étant un nombre entier quelconque, on verra aisément qu'il faut porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^2 pour en retrouver un pareil, et que si l'on en considère un autre de la forme $\alpha e \cos(n't - 2nt + B - \theta)$, il faut, pour retrouver

---

port à q, leurs valeurs, et en comparant séparément les coefficiens constans, ceux des cosinus de l'angle $\varphi' - \varphi$ et de ses multiples,

$$2\frac{db}{dq} = \mu b_1 + q\frac{db_1}{dq}, \qquad 2\frac{db_1}{dq} = 2\left(\mu b + q\frac{db}{dq}\right) + \mu b_2 + q\frac{db_2}{dq}, \quad \text{etc.}$$

On a d'ailleurs $b_2 = \frac{2(\mu bq - b_1)}{(\mu - 2)q}$; cette valeur étant substituée, ainsi que sa dérivée par rapport à q, dans la seconde des équations précédentes, la réduit à $\frac{db_1}{dq} = 2\mu b - \frac{b_1}{q} + 2q\frac{db}{dq}$; et l'on tire de là

$$\frac{db}{dq} = \frac{b_1(\mu - 1) + 2\mu bq}{2(1 - q^2)}, \qquad \frac{db_1}{dq} = \frac{2\mu bq + b_1(\mu q^2 - 1)}{q(1 - q^2)};$$

ce qui donne, dans le cas où $\mu = \frac{3}{2}$, en remarquant que la partie constante de la valeur de q est $\frac{2aa'}{a^2 + a'^2} = h$, et en faisant $\frac{a'}{a} = i$, $q = h = \frac{2i}{1 + i^2}$,

$$(b_2) = \frac{2(b_1)(1 + i^2) - 6(b)i}{i}, \quad \left(\frac{db}{dq}\right) = \frac{(b_1)(1 + i^2)^2}{4(1 - i^2)^2} + \frac{3(b)i(1 + i^2)^2}{(1 - i^2)^2},$$

$$(b_3) = \frac{4(b_2)(1 + i^2) - 5(b_1)i}{3i}, \quad \left(\frac{db_1}{dq}\right) = \frac{3(b)(1 + i^2)^2}{(1 - i^2)^2} - \frac{(b_1)(1 + i^2)(1 - 4i^2 + i^4)}{2i(1 - i^2)^2}, \quad \text{etc.}$$

son pareil, porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^3; c'est ce qui prouve que l'équation séculaire du moyen mouvement est nulle, même en ayant égard aux termes de l'ordre $\alpha^3\delta\mu'$. De là on peut conclure généralement que le même argument ne peut être reproduit que par les quantités des ordres α^2, α^4, etc., s'il se trouve pour la première fois parmi les termes des ordres α^0, α^2, etc., ou par les quantités des ordres α^3, α^5, etc., s'il se trouve pour la première fois parmi des termes des ordres α, α^3, etc. Nous verrons dans la suite l'importance de cette remarque.

Application de la méthode pour faire disparaître les arcs de cercle.

L'article 20 a pour objet l'application aux valeurs obtenues pour r, s, et $\frac{d\varphi}{dt}$, qui renferment chacune des sin. ou cos. multipliés par nt, de la méthode exposée dans la première partie, pour faire disparaître les arcs de cercle. Pour cela, au lieu de chercher, comme dans ce qui précède, à faire entrer sous les signes périodiques la plupart des termes variables comme facteurs de nt, l'auteur décompose les sin. et cos. qui se trouvent multipliés par nt dans les expressions précédentes, de manière à les réduire à la forme $\cos(nt+B_1)$ et $\sin(nt+B_1)$, B_1 étant l'angle compris, à l'origine du mouvement, entre la projection de la planète troublée P et la ligne fixe d'où l'on commence à compter les longitudes; il désigne par p, q, h, l, p', q', etc., les quantités $\alpha e \sin A$, $\alpha e \cos A$, $\alpha\gamma \sin C$, $\alpha\gamma \cos C$, $\alpha e' \sin A'$, etc., où A, A', etc., sont les distances des projections des aphélies de P, P', etc., à la ligne fixe, et C, C', etc., les distances de leurs nœuds à la même ligne. Ces transformations sont les mêmes que celles dont nous avons vu l'introduction au commencement de ce chapitre, et l'emploi que l'auteur fait ensuite de sa méthode pour faire disparaître les arcs de cercle, le conduit aussi aux mêmes équations que celles que Lagrange et lui avaient déjà trouvées d'une autre manière pour déterminer les inégalités séculaires des mouvemens des nœuds et de l'aphélie, de l'inclinaison et de l'excentricité (*).

Variations séculaires de l'aphélie et de l'excentricité de Jupiter et de Saturne.

« Il me resterait, dit-il ensuite dans l'article 21, à appliquer la théorie précédente » aux différentes planètes; mais la longueur déjà trop grande de ce Mémoire m'oblige » de renvoyer ces applications à un autre temps; je me bornerai donc ici à déterminer

(*) En effet, les valeurs définitives de r et de s sont :

$$r = a\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\frac{1}{4}(h^2+l^2)+\overline{(0,1)}\,u\,(p'q-pq')+\frac{1}{2}(0,1)\,u\,(h'l-hl') \\ +[p+(0,1)qu-\overline{(0,1)}q'u]\sin(nt+B_1)+[q-(0,1)pu+\overline{(0,1)}p'u]\cos(nt+B_1)+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

$$s=[l+(0,1)hu-(0,1)h'u]\sin(nt+B_1)-[h-(0,1)lu+(0,1)l'u]\cos(nt+B_1)+\text{etc.},$$

en supposant $\frac{1}{4}i(b_1)\delta\mu'.nt=(0,1)u$, $\frac{1}{2}[(b_1)(1+i^2)-3i(b)]\delta\mu'.nt=\overline{(0,1)}\,u$; si l'on fait

$$\frac{da}{du}+a\left(p\frac{dp}{du}+q\frac{dq}{du}-\frac{1}{2}h\frac{dh}{du}-\frac{1}{2}l\frac{dl}{du}\right)=a\left[\overline{(0,1)}(p'q-q'p)+\frac{1}{2}(0,1)(h'l-hl')\right],$$

$$\frac{dp}{du}=(0,1)\,q-\overline{(0,1)}\,q',\quad \frac{dq}{du}=-(0,1)p+\overline{(0,1)}p',\quad \frac{dl}{du}=(0,1)\,h-(0,1)\,h',\quad \frac{dh}{du}=(0,1)\,l'-(0,1)\,l,$$

la première équation donne, en y substituant pour $\frac{dp}{du}$, $\frac{dl}{du}$, etc. leurs valeurs tirées des quatre autres, $\frac{da}{du}=0$, ce qui sert à vérifier que la variation de la moyenne distance est nulle. Si l'on suppose autant de termes et autant d'équations de condition analogues qu'il y a de planètes, on aura, en intégrant ces équations, les valeurs de p, q, p', etc., qui serviront à déterminer les inégalités séculaires de quatre élémens, et qui, étant substituées dans les expressions de r, s et $\frac{d\varphi}{dt}$, permettront d'effacer les arcs de cercle qui s'y rencontrent.

» les inégalités séculaires de Jupiter et de Saturne, et parmi ces inégalités je ne considérerai que celles du mouvement des aphélies et des excentricités. » Il trouve, en exécutant tous les calculs qui se rapportent à ce cas, que les excentricités de ces deux planètes sont soumises à de petites variations, dont la période est de 34723 ans, et que les moyens mouvemens de leurs aphélies ont pour expressions 3",888 x et 22",550 x, en désignant par x le nombre d'années écoulées depuis le commencement de 1750.

L'auteur détermine enfin le mouvement des planètes, en supposant qu'elles se meuvent dans un milieu très peu résistant, pendant un temps quelconque illimité, ce que personne n'avait encore fait.

Le tome 16 des *Novi Commentarii* de l'Académie de Pétersbourg, qui contient les Mémoires de 1771, en renferme un d'Euler, *sur les inégalités de la Terre causées par l'action de Vénus*. Après y avoir développé par ordres successifs les équations différentielles en coordonnées rectangulaires, par la méthode de sa seconde théorie de la Lune, qu'il a appliquée aussi, en 1778, à la recherche de l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne, l'auteur désespérant de réduire l'expression de la distance mutuelle w des deux planètes en série convergente, a recours à la quadrature mécanique des courbes pour la déterminer. Pour cela, il divise en intervalles de 5° l'espace compris entre deux conjonctions consécutives de ces planètes, et il prescrit de calculer la quantité w pour toutes les valeurs successives données à l'élongation p, de tirer de là celles des forces perturbatrices qui y correspondent, de regarder ensuite ces quantités comme les ordonnées consécutives d'une courbe, et d'en conclure les valeurs de son aire par la sommation arithmétique des accroissemens élémentaires. Il confia l'exécution de ce travail numérique à Lexell, qui construisit une table des perturbations qui en résultaient. Euler ayant repris ce sujet dans la première partie des *Acta Petr.* pour 1778, et comparé la table précédente avec celles que Lacaille et Mayer avaient déduites de la théorie de Clairaut, trouva entre elles de très grandes différences, qu'il attribua à l'insuffisance de la méthode du développement en séries convergentes, dont il était cependant l'auteur. Il entreprit, pour s'en assurer, le calcul des mêmes perturbations, en suivant cette dernière méthode, et il chargea Fuss de la construction de la table qui résultait de ses formules. Ce fut alors que Lexell, ayant repris, sur l'invitation de M. Laplace, l'examen des calculs sur lesquels la sienne était fondée, s'aperçut qu'il lui était échappé des fautes graves, et qu'il avait pris entr'autres une des intégrales avec un signe opposé à celui qu'elle devait avoir; il en convint avec franchise; il recommença d'après cela toutes les opérations, et parvint alors, par la méthode des quadratures, à des expressions numériques qui s'accordèrent assez bien avec les nombres que celle des séries avait donnés à Fuss. Celui-ci ayant refait aussi ses calculs, dans un Mémoire qui se trouve dans le volume de 1780, partie I, obtint encore un plus grand accord, et fit voir l'avantage de son procédé pour la facilité et la brièveté du travail.

Mémoires d'Euler, Lexell et Fuss sur la théorie de la Terre.

On trouve aussi dans le même volume de ce Recueil, deux Mémoires d'Euler : l'un sur les différens genres de mouvement qui peuvent avoir lieu dans les satellites des planètes, et sur les caractères qui distinguent les planètes primaires des secondaires; l'autre sur les mouvemens irréguliers qui peuvent exister dans le système du monde, et sur le moyen de les déterminer pendant un long espace de temps; mais ces recherches étant de simple curiosité, sortent par là de notre sujet.



CHAPITRE V.

Mémoires de Lagrange insérés dans le Recueil de l'Académie de Berlin, de 1776 à 1784, etc., etc.

Démonstration générale de la périodicité des inégalités du grand axe et du moyen mouvement.

Après avoir vu M. Laplace parvenir, par le calcul, à l'invariabilité des moyens mouvemens des planètes et de leurs distances moyennes au Soleil, en négligeant les quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites, et les carrés des masses perturbatrices, nous arrivons à l'époque mémorable où Lagrange, auquel ce résultat donna occasion de reprendre ce sujet, prouva, par une analyse à la fois simple et lumineuse, que, quel que soit l'ordre auquel on s'arrête par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et par la nature même de notre système planétaire, les variations du grand axe sont périodiques.

M. Playfair s'exprime à peu près en ces termes à ce sujet (*Edimb. Rev.*, janvier 1808, page 264) : « La découverte de ce grand principe, que nous pouvons considérer comme » le boulevard qui assure la stabilité de notre système, et qui ferme tout accès à la con- » fusion et au désordre, doit rendre le nom de Lagrange immortel, et digne de la véné- » ration de ceux qui se plaisent à contempler tout ce qui est excellent et sublime. Après » la découverte faite par Newton, de la loi générale des mouvemens des corps célestes, » celle de Lagrange est sans doute la plus belle de l'Astronomie physique; et, sous » le rapport des causes finales, elle peut être envisagée comme la plus grande de » toutes. »

Principes sur lesquels elle est fondée.

C'est dans un Mémoire de quatorze pages, compris dans ceux de Berlin pour 1776, daté du 24 octobre de cette année, et intitulé : *Sur l'altération des moyens mouvemens des planètes*, que Lagrange parvient à ce grand résultat, et qu'il expose la méthode si remarquable sur laquelle il repose. L'auteur considère, avec Euler, l'orbite des planètes comme une ellipse dont les dimensions et la position varient d'un instant à l'autre; il remarque que, comme dans les orbites invariables la durée des révolutions dépend uniquement du grand axe de l'ellipse, il est naturel d'en conclure que dans les orbites variables, quand les variations sont très petites, on peut, sans erreur sensible, imaginer que les élémens demeurent les mêmes durant chaque révolution, et qu'ils ne changent que d'une révolution à l'autre, d'où il résulte évidemment que les variations du temps périodique ne peuvent venir que de celles du grand axe. Il réduit ainsi la question proposée « à déterminer les variations que doit subir le grand axe de l'orbite elliptique d'un » corps mu autour d'un centre fixe, en vertu d'une force réciproquement proportion- » nelle au carré de la distance, et dérangé en même temps par des forces perturbatrices » données, très petites vis-à-vis de la force principale. »

L'auteur désigne par x, y, z les coordonnées rectangulaires du mobile au bout du temps t par rapport au corps central, par r la distance de ces deux corps, par X, Y, Z les composantes des forces perturbatrices dirigées suivant les trois axes, et par F l'attraction principale à l'unité de distance. Il obtient alors les trois équations générales du

mouvement en coordonnées rectangulaires, où l'élément dt du temps est regardé comme constant (*).

Variation des élémens par l'effet des forces perturbatrices.

« Lorsque les forces perturbatrices sont nulles, dit-il, ces équations s'intègrent complète-
» ment, et donnent alors les valeurs finies de x, y, z en fonction de t, avec six constantes
» arbitraires qui sont les élémens mêmes du mouvement elliptique. Si l'on différencie les
» trois intégrales dont il s'agit, on aura six équations, à l'aide desquelles on pourra
» déterminer les six constantes arbitraires en x, y, z, t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et l'on aura
» ainsi six équations différentielles du premier ordre, dont chacune renfermera une cons-
» tante arbitraire, et sera par conséquent une intégrale première des trois équations dif-
» férentio-différentielles proposées.

» Soit donc $V = k$ une de ces équations du premier ordre, k étant la constante
» arbitraire, on aura, par la différenciation, $dV = 0$, équation différentielle du se-
» cond ordre, qui, ne contenant plus de constantes arbitraires, devra être identique
» avec les équations proposées; d'où il s'ensuit que si dans l'expression de dV on
» substitue à la place des différentielles secondes $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$, leurs valeurs ti-
» rées des équations dont il s'agit, cette expression devra devenir identiquement nulle;
» et la même chose aura lieu à l'égard de chacune des six équations du premier ordre
» qu'on aura trouvées.

» Cela posé, si l'on veut maintenant avoir égard aux forces perturbatrices, il n'y aura
» qu'à considérer que l'effet de ces forces consiste en ce que les valeurs des différentielles
» secondes de x, y, z augmentent des quantités $-Xdt$, $-Ydt$, $-Zdt$; si donc on
» substitue ces valeurs ainsi augmentées dans l'expression de dV, il arrivera nécessai-
» rement que tous les termes de cette expression se détruiront, à l'exception de ceux
» qui viennent des forces perturbatrices; et si l'on veut que l'effet de ces forces consiste à
» faire varier les élémens, il n'y aura qu'à regarder k comme variable, et à égaler dk
» à la partie de la valeur de dV qui provient des forces perturbatrices. On connaîtra
» ainsi les variations de k en vertu des forces X, Y, Z, et on aura des formules sem-
» blables pour les variations des six élémens de l'orbite du corps, supposée elliptique.

» On voit par là que les six équations différentielles du premier ordre, telles que
» $V = k$, seront de la même forme, soit que les forces perturbatrices soient nulles ou
» non, la seule différence étant dans la valeur des quantités k, qui sont constantes dans
» le premier cas et variables dans le second; donc, si on élimine les trois différences
» premières, on aura les trois équations finies, qui seront encore de la même forme
» dans les deux cas; ainsi les valeurs finies de x, y, z, et celles de leurs différences
» premières seront toujours exprimées de la même manière par le temps t et par les
» six élémens de l'orbite; par conséquent on pourra toujours regarder ces élémens comme
» constans pendant un temps infiniment petit. »

L'auteur applique ensuite cette belle théorie, devenue depuis si féconde entre ses

(*) Ces équations sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3} + X = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3} + Y = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3} + Z = 0.$$

Application de la théorie précédente aux variations du grand axe.

mains, à la recherche des variations du grand axe $2a$ de l'orbite elliptique. Il tire de l'équation polaire de l'ellipse et de l'intégrale des aires, une autre intégrale première qui donne la valeur de cet axe (*). Il la différencie en ne faisant varier que les dérivées de x, y, z; il substitue ensuite, pour leurs différentielles, les parties de leurs valeurs qui proviennent des forces perturbatrices, et il obtient ainsi, pour la variation de l'inverse du grand axe, une formule très simple, savoir, la somme des produits de chacune des forces par l'élément de sa direction, divisée par F (**). Il ne s'agit donc plus que de déterminer les valeurs de ces forces. Lagrange y parvient facilement pour le cas d'un nombre quelconque de planètes; et il obtient, après les avoir substituées dans la formule, une fonction qui est différentielle exacte par rapport aux variables x, y, z. Il désigne par Ω son intégrale prise relativement à ces seules quantités; c'est cette fonction des coordonnées et des distances, multipliées par les masses perturbatrices, qui réduit le calcul analytique, relatif à un nombre quelconque de planètes, à la même simplicité qu'il a dans le cas où il n'y en a qu'une, et qui depuis sa découverte, dont nous venons de voir l'occasion, a joué un si grand rôle dans la théorie des planètes, sous le nom de *Fonction perturbatrice* (***).

(*) On trouve facilement cette valeur au moyen des équations précédentes, en y faisant X, Y, Z égaux à zéro. En effet, si on les multiplie alors respectivement par dx, dy, dz, qu'on les ajoute, et qu'on intègre avec une constante C, on obtient l'équation

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}-\frac{F}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dr^2+r^2dv^2}{2dt^2}-\frac{F}{r}+C=0,$$

et l'on détermine C, en remarquant que l'on a à l'aphélie, dans le cas du mouvement elliptique, $r=a(1+e)$, $\frac{dr}{dt}=0$; que l'équation des aires donne alors $\frac{r^2dv^2}{dt^2}=\frac{F(1-e)}{a(1+e)}$, et que l'on tire de là, par la substitution, $C=\frac{F}{2a}$.

(**) Lagrange y parvient en comparant la valeur trouvée pour $\frac{1}{2a}$, avec l'équation $k=V$, et en mettant ensuite, pour le second membre de l'équation $dk=-\left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}X+\frac{dV}{d\frac{dy}{dt}}Y+\frac{dV}{d\frac{dz}{dt}}Z\right)dt$, sa valeur dans le cas actuel.

On obtient le même résultat, en considérant qu'une intégration semblable à celle qui a produit, dans le cas du mouvement elliptique, l'équation $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}-\frac{F}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{F}{2a}=0$, donnerait, dans le cas du mouvement troublé,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}-\frac{F}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\int(Xdx+Ydy+Zdz)+C'=0,$$

C' étant une constante.

Si donc l'on veut que la première équation soit toujours satisfaite, et que la seconde y soit réductible, il faut qu'on ait $\frac{F}{2a}=C'+\int(Xdx+Ydy+Zdz)$, d'où l'on tire, en différenciant et en regardant le grand axe comme variable, $d\frac{1}{2a}=\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{F}$.

(***) En effet, reprenons les expressions des forces perturbatrices que nous avons déjà trouvées (Note VII, pag. 122), et appliquons-les à un système de planètes T, T', T'', etc., dont les distances au Soleil S sont r, r', r'', etc., et les distances à l'une d'entre elles T sont δ', δ'', etc., nous aurons $F=S+T$,

$$X=T'\left(\frac{x-x'}{\delta'^3}+\frac{x'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{x-x''}{\delta''^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)+\text{etc.}, \quad Y=T'\left(\frac{y-y'}{\delta'^3}+\frac{y'}{r'^3}\right)+\text{etc.},$$

$$Z=T'\left(\frac{z-z'}{\delta'^3}+\frac{z'}{r'^3}\right)+\text{etc.}; \text{ en supposant } r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\ \delta'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

Ayant ainsi réduit l'expression de la variation de l'inverse du grand axe à la différentielle de Ω, par rapport aux seules coordonnées de la planète troublée, divisée par la somme des masses de cette planète et du Soleil, Lagrange fait voir que l'on peut, à cause de la petitesse des excentricités des orbites, développer, d'après les formules elliptiques, les valeurs des distances au Soleil r, r', etc., des coordonnées, et des distances mutuelles δ', δ'', etc., de chaque planète, en séries de sinus et cosinus des multiples de son moyen mouvement, et réduire ainsi la fonction Ω à une suite de termes de la forme M sin ou cos $(m\theta + n\theta' + p\theta'' + \text{etc.})$, θ, θ', θ'', etc., étant les moyens mouvemens des planètes T, T', T'', etc. autour du Soleil, durant le temps t.

Or, comme toutes les quantités qui se rapportent à la planète T sont exprimées par le seul angle θ, tandis que celles qui se rapportent à T', T'', etc., le sont par les angles θ', θ'', etc., il s'ensuit que pour avoir la différentielle de Ω, telle qu'elle a été définie, il faut faire varier simplement l'angle θ. Si l'on veut aussi négliger les quantités de l'ordre des carrés et des produits des forces perturbatrices, on pourra regarder comme constans les élémens qui entrent dans les différens termes de Ω; ainsi, la quantité M sera constante, et la valeur de $d\Omega$ se composera d'une suite de termes de la forme.................. $mMd\theta$ cos ou sin $(m\theta + n\theta' + p\theta'' + \text{etc.})$, où l'on pourra substituer à la place de θ', θ'', etc., leurs valeurs, données par la troisième loi de Kepler, en fonction de θ et du rapport des moyennes distances regardées comme constantes (*). Si l'on intègre ensuite complètement l'expression obtenue pour $d\Omega$, l'on ne changera pas sa nature; les inégalités qui en résulteront, dans la valeur du grand axe, seront donc toujours proportionnelles à des sinus ou cosinus d'angles, et seront par conséquent nécessairement périodiques.

Cas de la commensurabilité du rapport des moyens mouvemens.

Lagrange observe cependant qu'il y a un cas où cette valeur pourrait contenir des arcs de cercle, c'est celui où les rapports des moyens mouvemens seraient commensurables entre eux, de telle manière qu'on aurait $m + n\mu' + p\mu'' = 0$, en supposant $\theta' = \mu'\theta$, $\theta'' = \mu''\theta$, etc., ce qui réduirait à $mMd\theta$ le terme correspondant de $d\Omega$, et produirait un terme séculaire dans la valeur du grand axe; mais il montre que, puisque les nombres m, n, p, etc. doivent être entiers, il faudrait pour que l'équation dont il

---

d'où l'on tire

$$Xdx + Ydy + Zdz = T'\left(\frac{(x-x')dx + (y-y')dy + (z-z')dz}{\delta'^3} + \frac{x'dx + y'dy + z'dz}{r'^3}\right) + \text{etc.},$$

et de là, en faisant

$$T'\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{1}{\delta'}\right) + T''\left(\frac{xx'' + yy'' + zz''}{r''^3} - \frac{1}{\delta''}\right) + \text{etc.} = \Omega : d.\frac{1}{2a} = \frac{d\Omega}{S+T},$$

en indiquant par la caractéristique d mise devant Ω, sa différenciation par rapport aux seules coordonnées x, y, z.

(*) On a en effet, par les théorèmes connus, $\theta : \theta' : \theta'' :: \sqrt{\frac{S+T}{a^3}} : \sqrt{\frac{S+T'}{a'^3}} : \sqrt{\frac{S+T''}{a''^3}}$; d'où l'on tire, en négligeant T, T', etc., vis-à-vis de S, $\theta' = \theta\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}}$, $\theta'' = \theta\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}}$, etc. On peut ainsi réduire un terme quelconque de $d\Omega$ à la forme $\pm mMd\theta \frac{\cos}{\sin}\left(m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \text{etc.}\right)\theta$; et il en résulte, dans la valeur de $\frac{1}{2a}$, quand on intègre, en regardant a, a', etc. comme constans sous les signes périodiques, la quantité $\dfrac{mM \frac{\sin}{\cos}\left(m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \text{etc.}\right)\theta}{m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \text{etc.}}$

*

s'agit pût être vérifiée, que les valeurs de $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a'^3}$, etc., fussent commensurables entre elles, ce qui n'a pas lieu dans notre système.

Les grands axes des planètes ne sont donc soumis, lorsqu'on se borne à la première approximation, par rapport aux forces perturbatrices, à aucune variation qui croisse avec le temps; et cette conclusion a lieu, en général, quel que soit le nombre des corps qui réagissent les uns sur les autres, et quelle que soit la forme de leurs orbites, pourvu que celles-ci soient renfermées dans un espace fini, en sorte que leurs coordonnées rectangles soient uniquement des fonctions de sinus et de cosinus.

Nouveaux Mémoires de MM. Laplace et Lagrange, sur les méthodes d'approximation.

Les Mémoires de l'Académie de Paris, pour l'année 1777, renferment de nouvelles recherches de M. Laplace *sur l'intégration des équations différentielles par approximation.* Le but de l'auteur, dans ce Mémoire, est d'exposer plus simplement sa méthode pour faire disparaître les arcs de cercle qui entrent dans les intégrales approchées des équations qui n'en renferment point elles-mêmes, et de donner une nouvelle théorie de ce genre d'équations différentielles. Il remarque que si après avoir, par des intégrations successives, obtenu la valeur de la variable y, et l'avoir rendue complète par l'addition d'autant de constantes arbitraires qu'en comporte l'ordre de l'équation, on substitue cette valeur dans l'équation différentielle, on aura une équation identiquement nulle, et dans laquelle par conséquent les termes semblables se détruiront réciproquement. Si donc on change en $t - \theta$ l'arc t qui s'y trouve hors des signes périodiques, θ étant arbitraire, l'équation restera toujours identiquement nulle. Or, il est visible que ce changement revient à en faire un semblable dans l'expression de y, qui se trouve alors renfermer l'arbitraire θ de plus qu'auparavant, et qui n'est cependant pas plus générale. Il est donc possible de faire coïncider ces deux valeurs de y; et c'est cette considération qui fournit à M. Laplace le moyen d'en faire disparaître les arcs de cercle. Nous devons renvoyer, pour l'exposition des procédés délicats par lesquels l'auteur parvient à ce but, au n° 43 du livre II de la *Mécanique céleste*, où il a repris cette théorie, en la perfectionnant.

Il donne ensuite une méthode générale pour obtenir des intégrales de plus en plus approchées. « M. de la Grange, dit-il, a déjà rempli cet objet d'une manière très simple » et très ingénieuse, dans les *Mém. de Berl.* pour l'année 1775; mais la méthode que » j'expose ici a, si je ne me trompe, l'avantage d'être plus directe. » Il y est également revenu dans les n°s 41 et 42 de l'ouvrage cité.

Lagrange a donné aussi, dans un Mémoire intitulé : *Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes* (*Mém. de Berl.*, 1783), une méthode très remarquable et très simple pour faire disparaître les arcs de cercle par la variation des constantes arbitraires, et qui a, suivant lui, l'avantage de s'appliquer, avec une égale facilité, au cas où l'une des constantes arbitraires de l'intégrale multiplie l'arc sous les signes de sin. et cos. ou d'exponentielles; mais l'auteur ne l'ayant pas appliquée au système du monde, il nous suffira de l'avoir citée.

C'est dans le Recueil de l'Académie de Berlin, pour l'année 1781, que Lagrange fit paraître le premier de ses cinq beaux Mémoires sur les inégalités séculaires et périodiques des planètes, qui font époque dans l'histoire de la science (*). Ce grand travail, le plus vaste

(*) C'est aussi dans l'année 1781 que Herschel découvrit le mouvement d'une petite étoile, qu'il prit d'abord pour une comète; mais l'on a reconnu depuis qu'elle devait être mise au rang des planètes principales, et elle a reculé de plus de trois cent millions de lieues les limites présumées de notre système planétaire.

Mémoires de Lagrange sur la théorie des planètes, donnés de 1781 à 1784.

qui eût encore été entrepris sur cet objet, ne renferme pas de découvertes proprement dites; mais il contient l'ensemble des méthodes déjà données par l'auteur, et leur application à toutes les planètes; on y trouve un grand nombre de procédés nouveaux, et on peut y voir le germe de la plupart des idées heureuses que l'auteur a développées dans la suite. Nous allons chercher à faire remarquer les principales, et à donner une légère idée du plan de cet ouvrage et de son exécution.

Division de ce travail.

L'auteur paraît n'avoir eu d'abord d'autre but, en l'entreprenant, que de donner une théorie complète des variations séculaires des élémens des planètes, qui forment la partie la plus importante et la plus difficile du calcul de leurs perturbations, et de reprendre cette matière en entier pour la traiter d'une manière plus directe et plus rigoureuse qu'il ne l'avait encore fait. Quoique ses recherches appartinssent au volume de 1782, il crut, à cause de leur étendue, devoir en insérer, dans celui de 1781, imprimé en 1783, la première partie, contenant, en deux sections, les principes et les formules générales pour déterminer les variations séculaires; et il ne conserva pour l'autre volume que la seconde partie, renfermant, en trois sections, la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales. Il voulut ensuite compléter son travail, en appliquant, pour la première fois, la méthode de la variation des élémens à la recherche des inégalités périodiques de chacun d'eux; et il divisa aussi cette théorie en deux parties, dont la première, contenant les formules générales, parut dans les Mémoires de 1783, et dont la seconde, renfermant en cinq sections le calcul des variations périodiques indépendantes des excentricités et des inclinaisons, pour chacune des six planètes principales, parut dans ceux de l'année suivante. Enfin, ayant vérifié par ces opérations, qu'on trouvait, en portant la précision jusqu'aux secondes dimensions des excentricités et des inclinaisons, des termes qui donnaient des équations séculaires dans le moyen mouvement, il consacra à leur examen et à la détermination de leurs valeurs, dans le cas de Saturne et de Jupiter, un Mémoire particulier, inséré dans ceux de 1783, et qu'il donna comme un supplément à sa théorie des variations séculaires.

Mémoire de 1781. 1re section. Méthodes générales.

Dans le premier de ces Mémoires, Lagrange reprend d'abord la méthode qu'il avait donnée en 1774, pour parvenir aux variations du nœud et de l'inclinaison de l'orbite, au moyen des fonctions des forces perturbatrices, désignées par les lettres P, Q, R, et il cherche ensuite à exprimer, au moyen des mêmes quantités et de leurs différentielles, les trois coordonnées x, y, z du corps troublé, en désignant par ρ le rayon vecteur, par g la force principale à la distance 1, et par L, M, N des fonctions de P, Q, R et de leurs différentielles, précédées du signe $\int$, et qui deviennent constantes dans le cas où les forces X, Y, Z sont nulles (*). Il obtient ensuite, en combinant ces valeurs, une équation qui détermine ρ, et qui donne, pour la projection

(*) Nous avons déjà trouvé, p. 167, les équations

$$(B)\ldots\quad \frac{xdy - ydx}{dt} = R,\qquad \frac{xdz - zdx}{dt} = Q,\qquad \frac{ydz - zdy}{dt} = P;\qquad Px - Qy + Rz = 0.$$

Si l'on différencie les quantités $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et que l'on substitue pour... $ydx - xdy$, etc., $\frac{x}{\rho^3}$, etc., leurs valeurs tirées des équations précédentes et de celles du mouvement,

Nœuds et inclinaison.

de celle-ci, et prend simplement $g = S = 1$. Supposant alors que λ, θ, ϖ et z soient des quantités très petites du premier ordre, il montre que P, Q, M, N seront aussi du premier ordre, L du second; qu'en négligeant les quantités du second ordre, la valeur de R ne dépendra plus que de Δ (*); et qu'ainsi, puisqu'on a trouvé relativement aux équations séculaires $d\Delta = 0$, on aura aussi $d\mathrm{R} = 0$. Il développe ensuite les valeurs de $d\mathrm{P}$ et de $d\mathrm{Q}$, comme dans le Mémoire de 1774, et parvient, par la même transformation, aux équations linéaires du premier ordre, qu'il avait déjà obtenues, et qui déterminent les variations séculaires de la position des orbites planétaires.

Excentricité et aphélie.

Il ne lui reste plus qu'à développer et à réduire d'une manière semblable les valeurs de $d\mathrm{N}$ et de $d\mathrm{M}$. Pour cela, l'auteur reprend l'expression de Ω, et représente par r, r', etc., p, p', etc., les distances et les longitudes moyennes; les valeurs des rayons vecteurs ρ, ρ', et des longitudes vraies q, q', sont alors de la forme $r\,(1 + \mathrm{M} \sin p + \mathrm{N} \cos p)$, etc., $p + 2m \cos p - 2m \sin p$, etc.; et il faut les substituer dans Ω, qui est une fonction de ces variables. Au lieu de le faire directement, Lagrange considère les différentielles partielles de Ω par rapport à ρ et à q, comme fonctions de quantités r, r', p, p', etc., qui ont subi des accroissemens $r\,(\mathrm{M} \sin p + \mathrm{N} \cos p)$, etc.; il les développe alors, d'après la série de Taylor, en se bornant aux premières puissauces des accroissemens (**); et il les substitue dans les valeurs de $d\mathrm{M}$ et $d\mathrm{N}$, en ne conservant que les termes qui peuvent en produire de non périodiques.

Développement des fractions irrationnelles, et calcul des coefficiens.

Il développe ensuite les fractions irrationnelles $[r^2 - 2rr' \cos(p-p') + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$ etc., qui entrent dans la valeur de Ω, en séries de la forme $\mathrm{A}' + \mathrm{B}' \cos(p-p') + \mathrm{C}' \cos 2(p-p') + \text{etc.}$; il en prend les dérivées, en ayant soin de ne différencier A′, B′, etc., que par rapport aux élémens r et r' qui entrent seuls dans leurs valeurs; et puisque ces coefficiens résultent du développement d'une fonction homogène de r et r' de la dimension -1, ils sont aussi nécessairement de pareilles fonctions de r et r' de la dimension -1; ainsi, la propriété connue de ces sortes de fonctions permet d'éliminer les différentielles prises par rapport à r' (***);

(*) En effet, ayant trouvé, p. 168, $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}} = \theta \sin \varpi$, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} = \theta \cos \varpi$, on voit que ces rapports sont des quantités très petites du premier ordre; et comme on a d'ailleurs $\Pi = \mathrm{R}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{R}^2} + \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{R}^2}}$, $\Delta = \frac{g^2 - \lambda^2}{\Pi^2}$, on tire de là, en négligeant les quantités du second ordre, et en faisant $g = 1$, $\Delta = \frac{1}{\mathrm{R}^2}$.

(**) Ainsi il substitue, au lieu de $\frac{d\Omega}{dq}$, par exemple, le développement

$$\frac{d\Omega}{dp} + \frac{2d^2\Omega}{dp^2}(m \cos p - n \sin p) + \frac{2d^2\Omega}{dp\,dp'}(m' \cos p' - n' \sin p') + \text{etc.} + \frac{r\,d^2\Omega}{dr\,dp}(\mathrm{M} \sin p + \mathrm{N} \cos p)$$
$$+ \frac{r'd^2\Omega}{dr'dp}(\mathrm{M}' \sin p' + \mathrm{N}' \cos p') + \text{etc.};$$

et il remarque que lorsque Ω sera développé en une série de cosinus d'angles multiples de $p - p'$, $p - p''$, etc., les fonctions $\frac{d\Omega}{dp}$, $\frac{d^2\Omega}{dp\,dr}$, etc., ne donneront de termes non périodiques qu'autant qu'elles seront multipliées par des sinus de $p - p'$, $p - p''$, etc., ou de leurs multiples, et que $\frac{d\Omega}{dr}$, $\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}$, $\frac{d^2\Omega}{dp^2}$, $\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}$, etc., n'en donneront qu'autant qu'elles seront multipliées par des cosinus des mêmes angles; d'où il suit que ces quantités sont les seules auxquelles il faudra avoir égard dans les substitutions.

(***) En effet, dit-il, soit φ une fonction homogène des variables x, y, z, etc., qui forment partout la même dimension du degré m; si l'on substitue ax, ay, az au lieu de x, y, z, la fonction deviendra $a^m\varphi$; et si l'on fait $a = 1 + \alpha$, α étant infiniment petit, il faudra qu'en faisant croître les variables de αx, αy, αz,

et la même chose ayant lieu pour les coefficiens des autres séries, on peut ne conserver que des différentielles relatives à r. L'auteur indique enfin comment on parvient aux relations qui déterminent tous les coefficiens et leurs différentielles par rapport à r, en fonction de deux d'entre eux, tels que A′ et B′, et comment on obtient les valeurs de ces derniers en décomposant le radical en deux facteurs, et en développant ceux-ci en séries, au moyen des exponentielles imaginaires; il donne aussi les formules par lesquelles, connaissant les valeurs des deux premiers coefficiens du développement de la puissance s de l'inverse du carré de la distance mutuelle, on peut avoir celles qui conviendront à l'exposant $s+1$; et comme les séries qui expriment ces coefficiens ne sont pas très convergentes, lorsqu'on a $s=\frac{3}{2}$, ainsi que cela a lieu dans le cas actuel, il prescrit de les calculer d'abord en y supposant $s=-\frac{1}{2}$, d'en déduire les coefficiens qui se rapportent à l'exposant $-\frac{1}{2}+1$ ou $\frac{1}{2}$, et de faire ensuite $s=\frac{1}{2}$ dans les mêmes formules, qui donnent alors les valeurs cherchées(*).

« Jusqu'à présent, dit l'auteur, nous n'avons mis aux formules des variations séculaires qu'une seule limitation; c'est que l'on puisse négliger les carrés et les produits de plusieurs dimensions des excentricités et des inclinaisons. Cela supposé, nos équations sont entièrement rigoureuses; et comme elles sont linéaires et ont tous leurs coefficiens constans, elles peuvent toujours être intégrées exactement par les méthodes connues. Mais, dans le cas du système solaire, on peut les simplifier encore beaucoup, en négligeant les termes où les masses des planètes montent au-dessus de la première dimension.... Les équations qui donnent les valeurs de dM et dN, ou dx et dy, servent alors à déterminer les variations séculaires des excentricités et des aphélies, comme les précédentes donnent celles des inclinaisons et des nœuds...... L'analogie des deux systèmes est telle, qu'après avoir trouvé les intégrales de celui-là on aura, sans aucun autre calcul, celles de l'autre, en changeant seulement les lettres x, y en s, u, les crochets carrés en crochets ronds, etc. »

L'intégration immédiate donne les mêmes formules pour les variations séculaires.

Lagrange, après avoir développé cette théorie, fait voir l'accord des formules qu'il a trouvées avec celles qui résultent de l'intégration immédiate des équations du mouvement en coordonnées polaires. Pour cet effet, il désigne le rayon vecteur par $r(1+\xi)$, la longitude vraie par $p+\psi$, l'ordonnée z par $r\zeta$, et obtient trois équations du second ordre en ξ, ψ et ζ. Après les avoir intégrées dans le cas où les forces perturbatrices sont nulles, il suppose en général, dans les deux premières, $\xi = F\cos(p-at-\alpha)$, $\psi = f\sin(p-at-\alpha)$, en marquant d'un, de deux traits, etc., ce qui se rapporte aux autres planètes. Pour vérifier ces suppositions et déterminer en même temps les constantes arbitraires, il substitue ces valeurs dans les équations relatives à ξ et à ψ; et après avoir égalé entre eux les

---

la fonction φ croisse en même temps de $ma\varphi$; ce qui donne évidemment l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx}x + \frac{d\varphi}{dy}y + \frac{d\varphi}{dz}z + \text{etc.} = m\varphi;\ \text{d'où l'on tire dans le cas actuel}$$

$$r'\frac{dB'}{dr'} = -B' - r\frac{dB'}{dr},\quad r'\frac{d^2B'}{dr'^2} = -2\frac{dB'}{dr} - r\frac{d^2B'}{dr^2},\ \text{et ainsi de suite.}$$

(*) Il trouve par là en supposant

$$\sqrt{r^2 - 2rr'\cos u + r'^2} = A + B\cos u + \text{etc.},\ (r^2 - 2rr'\cos u + r'^2)^{-\frac{3}{2}} = (r, r') + (r, r')^1\cos u + \text{etc.}$$

$$A = r\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r'^2}{r^2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2\frac{r'^4}{r^4} + \text{etc.}\right\},\ B = -2r\left\{\frac{1}{2}\frac{r'}{r} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{r'^3}{r^3} - \text{etc.}\right\},$$

$$(r, r') = \frac{A}{(r^2 - r'^2)^2},\quad (r, r')^1 = -\frac{3B}{(r^2 - r'^2)^2}.$$

termes constans, et développé les produits des sinus et cosinus, il égale à zéro, dans la première, la somme des coefficiens de cos $(p - at - \alpha)$, dans la seconde celle des coefficiens de sin $(p - at - \alpha)$, et retrouve par là, toutes réductions faites, les mêmes équations de condition entre les coefficiens et les multiples qui avaient servi à les déterminer dans l'autre méthode. L'application du même procédé à l'équation en ζ, lui donne un semblable résultat. « Cette manière de résoudre le problème des variations » séculaires est, dit-il, plus courte et plus facile que celle que nous avons suivie ; mais » d'un autre côté elle ne paraît pas tout-à-fait si lumineuse ni si directe ; d'ailleurs elle » demande qu'on connaisse déjà la forme générale des intégrales ; et si on voulait cher- » cher directement cette forme, ainsi que nous l'avons fait dans le chapitre 4 des » *Recherches sur les satellites de Jupiter*, on retomberait dans une analyse plus ou moins » longue et compliquée. »

Mémoire de 1782. 1re sect. Formules différentielles des variations séculaires de chacune des planètes principales.

Nous passons à la seconde partie de la théorie des variations séculaires, où Lagrange fait une application détaillée de ses formules à chacune des planètes principales, en représentant par les mêmes lettres, sans trait ou marquées d'un, deux, trois, quatre et cinq traits, les quantités qui se rapportent à Saturne, Jupiter, Mars, la Terre, Vénus et Mercure. Les données astronomiques dont il a besoin sont, 1°. les distances moyennes des planètes au Soleil ; 2°. les rapports des masses des planètes à celle du Soleil ; 3°. les excentricités et les inclinaisons des orbites, ainsi que les lieux des aphélies et des nœuds, pour une époque donnée. Les données de la première et de la seconde espèce entrent dans les équations différentielles mêmes, et sont par conséquent la base de tout le calcul ; les autres ne sont nécessaires que pour déterminer les constantes arbitraires des intégrales, et ce n'est qu'après l'intégration qu'on en a besoin. L'auteur prend, dans les Tables de Halley, les premières et les dernières, qui sont les seules sur l'exactitude desquelles on puisse compter jusqu'à un certain point ; et quant aux masses des planètes, il entre dans une discussion étendue sur leurs valeurs, dans le but de déterminer de nouveau celles qui sont connues d'après les élémens qui paraissent les plus sûrs, et d'en conclure les autres par analogie.

« On sait, dit-il, par les théorèmes de Newton, que la force attractive absolue d'un » corps autour duquel un autre corps décrit une ellipse quelconque, est en raison » directe du cube de la distance moyenne et inverse du carré du temps périodique, » et cette proposition est vraie aussi lorsqu'on a égard aux variations séculaires des » élémens. Or, les forces attractives absolues étant proportionnelles aux masses ou » quantités de matière, on tire facilement de là l'expression du rapport de la masse P » d'une planète principale à celle du Soleil S, et celle de la densité D de la pla- » nète (*). » Ces formules lui montrent que les densités de la Terre, de Jupiter et de

(*) En effet, soit r la distance moyenne de la planète au Soleil et t son temps périodique ; soit, de plus, ρ la distance moyenne d'un satellite de la même planète à celle-ci, et θ son temps périodique, on aura

$$S = \frac{r^3}{t^2}, \quad P = \frac{\rho^3}{\theta^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{S} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{\theta}\right)^2;$$

et puisque les volumes des sphères sont comme les cubes des rayons, en nommant d le demi-diamètre de la planète : d^3 sera proportionnel au volume de la planète P, et D sera proportionnelle à $\left(\frac{\rho}{d}\right)^3 \frac{1}{\theta^2}$.

Dans le cas où P est la Terre, il fait $\frac{\rho}{r} = \frac{\sin 8'',5}{\sin 57' 3''}$, et tire de là, $T^{♁} = \frac{1}{365361}$, en faisant $S = 1$;

Saturne sont comme les nombres 1, 0,20155 et 0,11215 ; et comme ces nombres sont à peu près en raison inverse des distances moyennes (la différence étant moindre qu'un vingtième de la densité pour Jupiter, et étant environ d'un quinzième pour Saturne), il regarde cette loi comme la plus plausible, tant par sa simplicité que par son accord avec les densités connues, et il l'adopte aussi pour Mars, Vénus et Mercure, ce qui, avec les diamètres observés, lui donne les masses de ces planètes exprimées en parties de celles du Soleil. Mais comme dans les équations différentielles, dont ces quantités doivent être les coefficiens, la variable t est l'angle du mouvement moyen de la Terre autour du Soleil, et qu'il est plus commode d'exprimer le temps en années Juliennes de 365 jours 6 heures, il change t en αt, ce qui revient à multiplier les masses par l'angle α, que la Terre ou le Soleil parcourt, relativement aux étoiles fixes, dans une année Julienne ; et comme ces valeurs pourraient encore avoir besoin de quelque correction, il les multiplie aussi par des coefficiens indéterminés m, m', etc., et obtient ensuite les valeurs numériques de tous les coefficiens marqués par des crochets, qui entrent dans les vingt-quatre équations linéaires du premier ordre que l'on a dans le cas dont il s'agit ; équations séparées en deux systèmes indépendans, dont l'un donne les variations des aphélies et des excentricités des six planètes, et l'autre celles de leurs nœuds et de leurs inclinaisons. Il fait voir ensuite comment ces formules, où l'on suppose les orbites rapportées à une écliptique fixe, peuvent servir à déterminer directement, selon l'usage des astronomes, la position de ces orbites par rapport au vrai plan de l'écliptique, au moyen des relations (a) et (b) auxquelles nous sommes parvenus page 100.

2e Section. Variations annuelles des élémens.

Les formules précédentes donnent immédiatement les valeurs des variations annuelles des élémens, puisque ces variations étant très petites, il est permis de les supposer égales aux rapports de leurs différentielles à celle du temps ; on peut même regarder ces variations comme constantes pendant un ou deux siècles. Lagrange les détermine pour le commencement du 18e siècle, en exécutant en entier les calculs laborieux qui se rapportent à cette application ; il fait ensuite $m = 1 + \mu$, $m' = 1 + \mu'$, etc. ; et, comparant les valeurs qu'il vient d'obtenir par la théorie avec celles qui résultent des observations bien discutées, il en conclut les petites corrections μ, μ', etc., qu'il faut faire aux masses pour que les valeurs s'accordent entre elles. Il propose cependant de s'en rapporter uniquement à celles que donne la théorie, d'après les valeurs les plus probables des masses, à l'égard des mouvemens des aphélies et des nœuds, sur lesquels les observations laissent encore trop d'incertitude.

3e Section. Valeurs générales et complètes de ces variations pour un temps indéfini.

L'auteur passe ensuite à l'intégration complète des équations différentielles qui renferment la loi des variations séculaires, afin de déterminer la période de ces variations, leurs limites et la valeur des élémens au bout d'un temps quelconque. Il commence par se livrer, sur la forme des intégrales et la nature des variations qui en résultent, à quelques considérations générales qu'il avait déjà en partie présentées dans son Mémoire de 1774, et qu'il étend en outre aux variations de l'aphélie et de l'excentricité. Il s'occupe ensuite de l'intégration des huit équations relatives à Saturne et à Jupiter,

---

il obtient de même $T' = \frac{1}{1067,195}$, $T = \frac{1}{3358,4}$, et conclut de la loi des densités,

$$T'' = \frac{1}{1846082}, \quad T^{\text{IV}} = \frac{1}{278772}, \quad T^{\text{V}} = \frac{1}{2025810}.$$

et il constate par là, que les plus grandes et les plus petites excentricités et inclinaisons de la première, répondent aux plus petites et aux plus grandes de la seconde; que ces élémens demeurent toujours très petits, et que leurs variations ne consistent que dans des espèces d'oscillations. Il fait voir aussi que les coefficiens de t, sous les signes de sinus et de cosinus, sont nécessairement toujours réels, quelques valeurs qu'on donne aux masses de ces deux planètes, puisqu'en augmentant ou diminuant ces masses, on ne fait qu'augmenter ou diminuer proportionnellement les coefficiens, sans en changer les signes. Il en conclut que le système de Saturne et de Jupiter, en tant qu'on le regarde comme indépendant des autres corps, est de lui-même dans un état stable et permanent.

Lagrange considère ensuite, comme il l'avait fait en 1774, l'action mutuelle et simultanée de Mars, la Terre, Vénus et Mercure, qui, à cause de l'éloignement des deux autres planètes, lui paraissent constituer aussi un groupe à part. L'intégration des huit équations de chaque système le conduit à une autre équation du quatrième degré, pour déterminer le multiple c; équation qu'il réduit au troisième degré, après avoir fait disparaître son second terme, et qu'il résout ensuite par les tables trigonométriques, en la ramenant à la trisection de l'angle, ce qui permet de pousser l'approximation aussi loin qu'on veut. Il voit par là que les racines de cette équation sont toutes réelles, et que les expressions des variables ne sauraient contenir d'arcs de cercles. « Comme les racines » que nous venons de trouver, dit-il page 265, dépendent des valeurs supposées aux » masses des planètes, on pourrait douter si en changeant ces valeurs on ne tombe- » rait pas dans des racines égales ou imaginaires. Il est vrai que dans le cas présent, » les racines trouvées sont trop différentes entre elles pour qu'un petit changement » dans les masses puisse produire cet effet; mais, pour lever tout-à-fait ce doute, il » faudrait pouvoir démontrer que, quelles que soient les valeurs des masses, pourvu » seulement qu'elles soient positives, les racines de l'équation dont il s'agit sont toujours » nécessairement réelles et inégales, et il ne paraît pas impossible de parvenir, par » quelqu'artifice particulier, à résoudre cette question d'une manière générale. » Nous verrons bientôt M. Laplace réaliser cette conjecture avec un grand succès. Lagrange ajoute que, quoiqu'on puisse avoir des expressions générales et directes des quatre élémens, il serait fort difficile, peut-être même impossible, de déterminer exactement leurs valeurs moyennes, leurs *maxima* et *minima* et les périodes de leurs variations, comme il l'a fait pour Saturne et Jupiter; mais que l'on peut du moins, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, fixer des limites au-delà desquelles il sera impossible qu'elles puissent croître, et qui sont données par la somme des coefficiens de tous les sinus ou cosinus, pris chacun positivement. La petitesse de ces valeurs extrêmes justifie la supposition d'où l'on est parti sur ces élémens, pour simplifier les équations, et permet, sous ce rapport, de prononcer que la constitution du système solaire est inaltérable. L'auteur s'attache particulièrement à la détermination du déplacement de l'écliptique, et il prouve que la longueur de l'année ne peut varier par l'effet du mouvement des équinoxes en longitude, que d'une quantité moindre que 3′ 40″.

Mémoire de 1783. Formules générales des variations périodiques des élémens.

Après avoir très rapidement passé en revue les deux Mémoires précédens, dont le premier a 78, et le second 124 pages, nous arrivons à celui de 1783, qui, n'ayant que 30 pages, est peut-être, sous le rapport analytique, le plus intéressant de tous, comme contenant le premier et l'unique essai qu'on ait encore fait dans la théorie des

planètes, pour calculer les variations périodiques de chaque élément en particulier. » Plusieurs géomètres, dit-il, se sont déjà occupés de cette classe d'inégalités; mais » leurs travaux se trouvent épars dans divers ouvrages, et les résultats de ces travaux » dépendent de méthodes et de données différentes; d'ailleurs on n'y a point tenu compte » de l'effet des variations séculaires, et quoique cet effet ne puisse être que très petit, » la rigueur ne permet pas de le négliger, sans avoir auparavant démontré qu'il n'en sau- » rait résulter que des altérations insensibles dans le mouvement des planètes.

» L'analyse par laquelle nous avons déterminé les variations séculaires, donne aussi » directement les variations périodiques; car nous avons commencé par réduire tout l'effet » des perturbations à la variation des élémens des orbites; nous avons ensuite séparé ce » qui, dans ces variations, n'était que périodique, de ce qui était indépendant des lieux des » planètes. Il ne s'agit donc que d'avoir égard à la partie périodique des variations de » ces mêmes élémens, et de tenir compte des termes négligés dans le premier calcul, » pour avoir leurs variations totales dues à l'attraction mutuelle des planètes; et en » employant les élémens corrigés par ces variations, on pourra calculer, pour chaque » instant, les lieux des planètes par les règles ordinaires.

» A la vérité, comme les variations périodiques demeurent toujours très petites, et » n'ont pour ainsi dire qu'un effet passager et alternatif, il est peu important pour l'As- » tronomie de connaître en particulier les altérations qui en résultent dans chacun des » élémens des orbites, et il suffit d'avoir l'effet total de ces variations sur les lieux des » planètes.... Mais après avoir déterminé par nos formules générales la partie périodique » des variations des élémens, rien ne sera plus facile que d'en conclure les inégalités » du rayon vecteur de la longitude et de la latitude. Il est vrai qu'on peut calculer ces » inégalités d'une manière plus simple, en les déduisant immédiatement des équations » différentielles de l'orbite; mais cette méthode a, d'un autre côté, l'inconvénient de » ne donner les variations séculaires qu'indirectement et par des réductions particu- » lières; et ne doit-il pas être plus satisfaisant de trouver toutes les inégalités du » mouvement des planètes par une même analyse, et par des procédés directs et uni- » formes? »

Variation de l'époque.

Lagrange commence par faire un changement dans la manière dont il a déterminé l'anomalie vraie q par la moyenne p dans l'ellipse variable, afin de rendre les formules plus simples et plus exactes, sans que cela influe d'ailleurs en rien sur les résultats trouvés pour les équations séculaires. Pour cet effet, il laisse le premier membre de l'intégrale, qui est une fonction de q, composée de plusieurs termes multipliés par des coefficiens qui sont des fonctions des élémens, sous la forme qu'il aurait si ces élémens étaient constans; et il applique à la valeur de p, qui constitue le second membre, les corrections résultant de la variabilité des mêmes élémens. Il désigne par Σ la somme de ces corrections (*); Σ devient alors la variation du mouvement moyen due aux forces perturbatrices : variation indépendante du grand axe de l'ellipse, et qu'on pourra rapporter à l'époque du moyen mouvement, laquelle, dans les orbites invariables, contient la sixième constante arbitraire des intégrales, et par conséquent le sixième élément du

(*) Ainsi, au lieu de faire usage de l'équation $q-(\zeta)\cos q+(\gamma)\sin q-\text{etc.}=p$, où (ζ), (γ), etc. sont variables, il emploie celle-ci : $q-\zeta\cos q+\gamma\sin q-\text{etc.}=p+\Sigma$, en regardant ζ, γ, etc. comme étant constans dans le premier membre, et en supposant $d\Sigma=-\cos q\,d\zeta+\sin q\,d\gamma-\text{etc.}$

mouvement elliptique. Pour avoir la formule de cette variation, l'auteur substitue dans l'expression de $d\Sigma$ les valeurs des variables qui y entrent et qu'il avait déterminées dans son premier Mémoire, de manière à la réduire à une suite de différentielles partielles de Ω par rapport à r, q, etc., multipliées par ces mêmes élémens et par les lettres M, N, etc., en se bornant à leurs premières dimensions (*). Il désigne par $p_,$ la valeur moyenne de l'angle $p + \Sigma$, c'est-à-dire la partie indépendante des sinus et cosinus et proportionnelle au temps; par $r_,$ le demi-grand axe de l'ellipse invariable dans lequel le moyen mouvement serait $p_,$; et, reprenant les valeurs de q et r en fonction de p et des sin. et cos. de p, pour les substituer dans la valeur de $d\Sigma$, il remplace, dans les termes dus aux forces perturbatrices, $p + \Sigma$ par $p_,$, et le demi-grand axe par $r_,$; ce qui revient à négliger le carré de ces forces. Il remarque alors que si l'on réduit en série les radicaux qui entrent dans l'expression de Ω, qu'on la substitue ensuite dans $d\Sigma$, et qu'on intègre, on n'aura jamais, en fait de quantités non périodiques, que des termes qui, étant joints à un terme semblable provenant de la valeur de p, se réduiront au terme unique $p_,$, et cela tant qu'on n'a égard qu'aux premières dimensions des excentricités et des inclinaisons. L'auteur néglige, dans l'expression de $d\Sigma$, les termes dus aux excentricités; il substitue dans ceux en cos $(p_, - p_,')$, cos $(p_, - p_,'')$, etc., au lieu de $dp_,$ son expression en fonction de $dp_, - dp_,'$, ou de $dp_, - dp_,''$, etc., donnée par le rapport des moyens mouvemens; et l'équation lui donne alors, en l'intégrant, la valeur cherchée de Σ. Il observe que si l'on voulait aussi tenir compte des excentricités, il faudrait substituer les valeurs de x, y, x', etc., déterminées dans la théorie des variations séculaires, ce qui ne donnerait que des termes en sinus et cosinus d'angles proportionnels à t ou p, et par conséquent tous intégrables; mais que, pour simplifier le calcul, on pourrait regarder les quantités x, y, etc. comme constantes, puisque leurs différentielles étant du premier ordre des forces perturbatrices, se trouveraient aussi multipliées par Ω, qui est du même ordre. Il fait voir qu'à cause de la petitesse des termes dont il s'agit, il suffirait d'avoir égard à ceux qui, contenant des sin. ou cos. d'angles dont la variation est très petite vis-à-vis celle de l'angle $p_,$, peuvent augmenter beaucoup par l'intégration, à cause du carré du multiple qu'ils acquièrent en diviseur; et que ce n'est que par les rapports connus des moyens mouvemens des planètes, qu'on peut juger, dans chaque cas, de la valeur du rapport des variations.

Grand axe et moyen mouvement.

Lagrange considère ensuite les variations périodiques du demi-grand axe r, qui sont exprimées en fonction de la différentielle partielle de Ω, relativement aux seules variables de la planète troublée. Il développe son expression, qui devient rigoureusement intégrable quand on néglige les excentricités, puisqu'elle se réduit alors à la différentielle de Ω par rapport à $p_,$ seulement; il développe son intégrale en série suivant les cosinus de $p_, - p_,'$, $p_, - p_,''$, etc.; et comme la troisième loi de Kepler établit un rapport entre les grands axes et les moyens mouvemens, il obtient à la fois les expressions des quan-

(*) Il obtient $d\Sigma = 2r^2 \frac{d\Omega}{dr} dq + 2 \frac{d\Omega}{dq} dr + 3r \frac{d\Omega}{dq} (\text{N} \sin q - \text{M} \cos q) dq + \text{etc.}$, et il en tire après le développement et l'intégration, en faisant $(r_,^2 - 2r_, r_,' \cos(p_, - p_,') + r_,'^2)^{-\frac{1}{2}} = [r_,, r_,'] + [r_,, r_,']_1 \cos(p_, - p_,')$

$$\Sigma = -2r_,^2 \left(\text{T}' \frac{d[r_,, r_,']}{dr_,} + \text{etc.}\right) p_, - \frac{2r_,^2 \text{T}'}{n'} \left(\frac{d[r_,, r_,']_1}{dr_,} - \frac{1}{r_,'^2}\right) \sin(p_, - p_,') + \text{etc.}$$

tités ρ et ϖ, qui expriment la partie périodique des variations du grand axe et du moyen mouvement (*).

Il passe de là à la recherche de celles des excentricités et des aphélies, et reprend, pour cet effet, les formules qui donnent les variations des quantités M et N ou x et y. Si on y substitue la valeur de Ω en série, de même que celles de q et de r, en fonction de $p_,$ et de $r_,$, et qu'on développe les divers produits de sinus et de cosinus, on aura des termes proportionnels à $\sin p_,$ et $\cos p_,$, lesquels, étant ensuite multipliés par $\sin p_,$ et $\cos p_,$, donneront dans les valeurs de dx et dy des termes sans sinus ni cosinus ; ce sont ceux auxquels on s'est borné dans la théorie des variations séculaires. Maintenant il faut aussi tenir compte des autres termes qui restent affectés des sinus ou cosinus des multiples de $p_,$, $p_,'$, etc. ; leur introduction ne change pas la nature des équations qui déterminent x et y, et y fait naître seulement des seconds membres composés de termes tous périodiques, que l'auteur désigne par (X) et (Y). « Comme dans les premiers membres de ces équations, dit-il, les variables sont linéaires, et que les seconds » membres peuvent être regardés comme des fonctions connues de la variable t, l'intégration est toujours possible par les méthodes connues. Dans la théorie précédente, » nous avons donné les intégrales complètes pour le cas où les seconds membres seraient » nuls ; et ces mêmes intégrales, en y faisant varier les constantes arbitraires, donneront celles des équations dont il s'agit (**). » Lagrange suppose ensuite qu'on fasse abstraction des excentricités, et intègre alors sans difficulté les équations qui donnent les parties périodiques des valeurs de x et de y. Il ne lui reste plus maintenant qu'à déterminer les inégalités des nœuds et des inclinaisons, au moyen des valeurs de ds et du, qui sont données en fonctions de P, Q, R, et de leurs différentielles dont on a déjà les expressions générales. Il commence par réduire les équations qui donnent ds et du, à une forme

Excentricité et aphélie.

Nœud et inclinaison.

(*) En effet, soient toujours $p_,$ et $r_,$ les parties constantes de p et de r, l'équation $d\frac{1}{r} = 2(d\Omega)$ donne ... $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_,} - 2\int(d\Omega)$; et de là en faisant $r = r_, + \rho$, et en négligeant ρ^2, $\rho = -2r_,^2\int(d\Omega)$.

On a alors $dp = \frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{dt}{r_,^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\rho\, dt}{2r_,^{\frac{5}{2}}}$, et en intégrant, $p = p_, - \frac{3}{2r_,^{\frac{5}{2}}}\int\rho\, dt = p_, + 3r_,\int dp_,\int(d\Omega)$; d'où l'on tire, en faisant $p + \Sigma = p_, + \varpi$, $\varpi = \Sigma + 3r_,\int dp_,\int(d\Omega)$, et il faudra ; que dans cette expression il n'entré aucun terme proportionnel à $p_,$.

Si l'on suppose ensuite $dp_, = \frac{dp_, - dp_,'}{n} = \frac{dp_, - dp_,''}{n'} =$ etc., on aura

$$\int(d\Omega) = \frac{T'}{n'}\left(\frac{r\cos(p_, - p_,')}{r_,^2} - \frac{1}{\sqrt{r_,^2 - 2r_,r_,'\cos(p_, - p_,') + r_,'^2}}\right) + \text{etc.} + \chi,$$

χ étant une constante arbitraire qu'on déterminera en égalant à zéro la somme des coefficiens de $p_,$ dans la valeur de ϖ.

(**) Ces équations étant

$$\frac{dx}{dt} - [(0,1) + \text{etc.}]y + [0,1]y' + \text{etc.} = \frac{(X)}{r^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{dy}{dt} + [(0,1) + \text{etc.}]x - [0,1]x' - \text{etc.} = \frac{(Y)}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

Soient ξ et ψ les parties périodiques de x et de y, on aura, en se bornant à ces parties, et en négligeant les carrés des forces perturbatrices, $\frac{d\xi}{dt} = \frac{(X)}{r^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d\psi}{dt} = \frac{(Y)}{r^{\frac{3}{2}}}$, d'où l'on tire $\xi = \int(X)\,dp_,$, $\psi = \int(Y)\,dp_,$; valeurs qui se réduisent à la forme $\xi = \Xi\sin p_, - \Psi\cos p_,$, $\psi = \Xi\cos p + \Psi\sin p_,$, en désignant par Ψ et Ξ des suites de sin. et de cos. des multiples de $p_, - p_,'$, $p_, - p_,''$, etc.

plus simple et plus générale, à quelques égards; il y fait ensuite les mêmes substitutions que dans le cas précédent, en négligeant les quantités du second ordre, et en développant les produits des sinus et cosinus (*); et comme l'analyse dont il fait usage est indépendante de la condition $dR = 0$, qu'il avait employée d'abord, il s'ensuit que les équations dont il s'agit auraient également lieu quand même le grand axe de l'orbite serait sujet à des variations séculaires; et qu'ainsi la théorie des nœuds et des inclinaisons des orbites planétaires subsiste indépendamment de l'inaltérabilité des distances moyennes. Les expressions des variations périodiques auxquelles il parvient, ont une forme tout-à-fait analogue à celle des formules qui se rapportent aux deux élémens précédens, si ce n'est qu'elles sont nulles lorsqu'on fait abstraction, dans l'effet des forces perturbatrices, des inclinaisons des orbites. Connaissant la longitude du nœud ω, dans le plan de projection, sa longitude dans l'orbite sera donnée par la formule $\int \cos i d\omega$, i étant l'angle d'inclinaison; car il est évident que tandis que le nœud avance de l'angle $d\omega$ dans le plan de projection, il n'avance dans le plan de l'orbite que de l'angle $\cos i d\omega$, qui est le côté adjacent à l'angle i, dans le triangle rectangle dont $d\omega$ est l'hypothénuse.

Coordonnées polaires.

Lagrange indique enfin comment, lorsqu'on connaît les altérations que les élémens doivent subir par l'effet des variations périodiques, on peut déterminer celles qui en résultent dans la distance accourcie r, la longitude vraie q, et la tangente l de la latitude, en substituant dans leurs expressions, calculées pour une ellipse invariable, les valeurs des élémens augmentées des corrections dues aux forces perturbatrices (**); et il exécute ces opérations dans le cas où l'on néglige les excentricités et les inclinaisons des orbites, ce qui rend nulle la correction de la latitude.

2e Mémoire de 1783. 1re section. Formules générales pour la variation séculaire du moyen mouvement.

Avant de passer à l'application que Lagrange a faite de toutes ces formules à chaque planète, nous devons dire un mot du Mémoire *sur les variations séculaires des moyens mouvemens des planètes*, qui se trouve à la suite du précédent, et dans lequel l'auteur reprend la recherche de l'expression de $d\Sigma$, en faisant d'abord abstraction de l'inclinaison de l'orbite, et en poussant le calcul jusqu'aux secondes dimensions de M, N, M', N' ou x, y, x', y'. Il représente par $r(1+\alpha)$, $p+6$, $r'(1+\alpha')$, $p'+6'$ les valeurs des rayons vecteurs ρ, ρ' et des longitudes vraies q, q' des planètes troublée et troublante; il change alors dans Ω, ρ, ρ' en r, r'; q, q' en p, p', et y fait croître ensuite r de $r\alpha$, r' de $r'\alpha'$, p de 6, p' de $6'$, en poussant la série de Taylor jusqu'aux secondes dimen-

(*) Soit $Z = T'\left(\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{\sigma'^3}\right)[(u-u')y' - (s-s')x'] + \text{etc.}$; on aura $ds = Zy\frac{dt}{R}$, $du = Zx\frac{dt}{R}$; si l'on désigne par (S) et (V) les termes en sinus et cosinus de la valeur de $r_,^2 Z \sin p_,$, $r_,^2 Z \cos p_,$, les équations deviendront $\frac{ds}{dt} + (0,1)(u-u') + \text{etc.} = \frac{(S)}{r^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{du}{dt} - (0,1)(s-s') - \text{etc.} = \frac{(V)}{r^{\frac{3}{2}}}$, et se réduiront à $\sigma = \int (S)\, dp_,$, $v = \int (V)\, dp_,$, en représentant par σ et v les parties périodiques des valeurs de s et de u.

(**) En effet, soient toujours ρ, ξ, ψ, σ, v et π les corrections des élémens $r_,$, $x_,$, $y_,$, $s_,$, $u_,$, et de la longitude moyenne $p_,$; celles de la longitude, du rayon vecteur et de la tangente de la latitude seront, en négligeant les carrés de ρ, ξ, etc.,

$$\frac{dq}{dp_,}\pi + \frac{dq}{dx_,}\xi + \frac{dq}{dy_,}\psi + \frac{dq}{ds_,}\sigma + \frac{dq}{du_,}v, \quad \frac{dr}{dp_,}\pi + \frac{dr}{dx_,}\xi + \text{etc.}, \quad \frac{dl}{dp_,}\pi + \text{etc.};$$

et les deux premières se réduisent, quand on néglige les excentricités et les inclinaisons, à

$$\pi + 2\xi \cos p_, - 2\psi \sin p_, = \pi - 2\Psi, \text{ et à } \rho + r_,(\xi \sin p_, + \psi \cos p_,) = \rho + r_,\Xi.$$

sions de α, β, α', β'. Il tire de là les valeurs des différentielles partielles de Ω, par rapport à ρ et à q, transformées de la même manière, et les substitue dans $d\Sigma$, en ne conservant, parmi leurs multiplicateurs, que les termes de la forme de ceux qui entrent dans les expressions de ces différentielles, lorsqu'on y développe la fraction irrationnelle; il obtient par là une expression qui ne contient plus de sinus et de cosinus des multiples de p, p', etc., mais qui est affectée des carrés et des produits de x, y, x', y' (*). Lorsqu'on y met pour ces variables leurs valeurs A sin $(at+\alpha)$ + B sin $(bt+\beta)$ + etc., A cos $(at+\alpha)$ + etc., données par la théorie des variations séculaires, et contenant autant de termes qu'il y a de planètes qui agissent les unes sur les autres, cette formule donne pour Σ une valeur composée de deux sortes de termes : les uns sont proportionnels à p, et se confondent avec le moyen mouvement; les autres, proportionnels aux sinus des angles $(a-b)\,t+\alpha-\beta$, $(a-c)t+\alpha-\gamma$, etc., ont des coefficiens beaucoup plus grands que ceux des cosinus correspondans dans l'équation différentielle, parce que l'intégration les a augmentés dans la raison de $a-b$, $a-c$, etc. à 1. Ces termes donnent donc de véritables équations séculaires dans le mouvement moyen de la planète, et il ne s'agit plus que de voir si elles sont assez sensibles pour être appréciées par les observations.

L'auteur examine aussi ce qui peut résulter de l'inclinaison mutuelle des orbites, et sur-tout de la variation de cette inclinaison, en considérant immédiatement l'orbite réelle de la planète, et en cherchant la variation du mouvement moyen d'après celles des élémens de cette orbite. Il indique à cette occasion une nouvelle méthode pour déterminer les variations de ces élémens, et ne trouve qu'un seul terme, provenant de l'inclinaison, à ajouter à la valeur de $d\Sigma$ déjà déterminée. Il applique ensuite cette formule à la recherche de la variation du mouvement moyen de Saturne produite par l'action de Jupiter, et trouve par là un terme donnant une équation séculaire dont la période est de 70414 ans, mais dont la quantité est presqu'insensible; il en est de même de celle de Jupiter produite par l'action de Saturne; et quoique, par une erreur de calcul numérique assez singulière, sur laquelle nous reviendrons peut-être par la suite, Lagrange ait trouvé ces quantités bien plus petites qu'elles ne le sont en effet, les inégalités qui en résultent seront fort long-temps inappréciables par les observations.

2e et 3e sections. Application à Saturne et Jupiter.

Il ne nous reste plus à parler que de la seconde partie de la théorie des variations périodiques, qui date de l'année même où M. Laplace publia sa *Théorie du mouvement elliptique et de la figure des planètes*, et dans laquelle Lagrange traduit ses formules en nombres pour chacune des planètes principales. « Un défaut commun à toutes les méthodes déjà suivies, dit-il, est de donner, dès la seconde approximation, une expression » inexacte du rayon vecteur, en y introduisant des termes proportionnels au temps, qui » ne doivent point s'y trouver sous cette forme; et parmi les différens moyens qu'on a » employés pour se débarrasser de ces sortes de termes, et les faire servir à la détermi» nation des variations séculaires, les uns sont ou trop compliqués ou trop indirects, et

Mémoire de 1784. Calcul des variations périodiques de chaque planète.

(*) Cette équation est $\frac{d\Sigma}{dp}=(0)+(1)(x^2+y^2)+(2)(x'^2+y'^2)+(3)(xx'+yy')$,

en supposant $(0)=-T'\frac{2r^2d[r,r']}{dr}$, $(1)=-T'\left\{\frac{r^2d[r,r']}{2dr}+\frac{7r^3d^2[r,r']}{4dr^2}+\frac{r^4d^3[r,r']}{2dr^3}\right\}$, etc.; les symboles $[r,r']$, etc. étant les coefficiens du développement de l'inverse de la distance mutuelle.

Le terme provenant de l'inclinaison est de la forme $+(4)[(s-s')^2+(u-u')^2]$.

» les autres ne sont pas assez rigoureux.... Nous commencerons par calculer, à l'aide des » formules qui donnent les corrections de la longitude et du rayon vecteur, les variations » périodiques qui dépendent uniquement de la distance ou commutation des planètes » entre elles, et qui auraient lieu également si leurs orbites étaient sans excentricité et » sans inclinaison. Nous pourrons même négliger entièrement les corrections du rayon » vecteur, comme inutiles pour les applications astronomiques, tant à cause de leur » petitesse, que parce que les observations immédiates des longitudes sont les seules dont » on fasse usage, et sur lesquelles on puisse compter. Nous passerons ensuite à la déter- » mination des autres variations qui dépendent tout-à-la-fois des distances des planètes et » de leurs excentricités et inclinaisons..... » L'auteur n'a exécuté que la première partie de ces calculs. Chacune des six sections qui composent son Mémoire est consacrée à la détermination des variations périodiques de l'une des six planètes principales, depuis Saturne jusqu'à Mercure, dépendantes de ses distances héliocentriques aux autres planètes; et Lagrange y calcule les termes qui sont affectés des cosinus des huit premiers multiples de ces distances.

Ce travail, utile pour l'Astronomie pratique, est intéressant aussi pour la théorie, soit parce qu'il fait voir la convergence des séries qui expriment les inégalités, soit par la comparaison que l'auteur y donne de ses résultats avec ceux obtenus par les autres géomètres, dans leurs recherches sur le même sujet. Ainsi Lagrange vérifie que les calculs d'Euler, Clairaut et Lalande, sur les théories de la Terre et de Mars, s'accordent assez bien avec les siens, lorsqu'on les corrige de l'erreur commise par les premiers dans l'évaluation de la parallaxe du Soleil. Il obtient un terme sensible, de plus que Lalande, dans la formule qui exprime l'action de Mars sur Vénus. Il trouve $\pm 33''$ pour le *maximum* de la correction de la longitude de Saturne, qui provient de l'action de Jupiter, tandis qu'Euler trouvait pour le coefficient de cette inégalité, $4''$ dans sa première pièce, et $-12''$ dans la seconde. Il obtient un plus grand accord pour les inégalités du mouvement de Jupiter, en ayant égard à la différence de la valeur de la masse de Saturne, et il calcule les inégalités qui en résultent dans les éclipses des satellites de Jupiter; enfin, quant à Mercure, il trouve les corrections trop petites pour qu'on pût y avoir égard dans l'état d'imperfection où étaient encore les tables de cette planète.

CHAPITRE VI.

Travaux remarquables sur la Théorie des Planètes, qui datent des dernières années du 18e siècle.

Recherches de M. Laplace sur les inégalités séculaires (*Mém. de Par.*, 1784.)

AVANT de nous occuper de la grande découverte qui fait le sujet principal de ce chapitre, nous devons dire un mot de la méthode ingénieuse et indépendante de toute hypothèse, par laquelle M. Laplace est parvenu, dans les *Mém. de Paris*, pour 1784, a établir d'une manière générale, qu'en vertu de l'action mutuelle des planètes, les excentricités et les inclinaisons de leurs orbites sont toujours peu considérables.

Il reprend, pour cet effet, le principe du chevalier d'Arcy; il l'applique aux aires



Relations entre les élémens qui prouvent que leurs variations sont très-petites.

décrites sur les trois plans coordonnées par les projections des rayons vecteurs de chaque planète, et en conclut trois équations auxquelles leurs élémens doivent satisfaire après un temps quelconque (*); les deux dernières lui donnent, en se bornant au second ordre, deux relations très simples entre les variables dont nous avons vu l'introduction dans l'intégration des équations séculaires relatives aux nœuds et aux inclinaisons. La première équation est la même que celle que l'auteur avait déjà obtenue en 1773; il la développe en négligeant les quatrièmes dimensions des excentricités et des inclinaisons; et comme les moyennes distances des planètes au Soleil n'éprouvent, par leur action mutuelle, aucune variation séculaire, la partie où ces distances entrent seules reste constante, et peut être comprise dans le second membre de l'équation. Les autres termes forment deux groupes distincts, l'un contenant les carrés des excentricités, l'autre les carrés des inclinaisons; et comme ces variables sont données par des équations indépendantes les unes des autres, en sorte que les formules qui déterminent les excentricités sont les mêmes que si les inclinaisons étaient nulles, on voit que chaque groupe doit satisfaire séparément à l'équation dont il s'agit; ce qui fournit deux relations, l'une qui exprime que la somme des produits des carrés des excentricités de chaque planète, par sa masse et par la racine carrée de sa moyenne distance, est une quantité constante; l'autre, qui établit le même rapport pour les inclinaisons. Or, les planètes étant supposées circuler dans le même sens, tous les termes des premiers membres de ces équations sont positifs, et par conséquent chacun d'eux est moindre que la constante des seconds membres. Il suffit donc qu'à une époque quelconque les excentricités et les inclinaisons se soient trouvées très petites, et que leurs valeurs, à cette époque, aient servi à

(*) En effet, soient a et ae le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite d'une planète dont la masse est m, θ la tangente de son inclinaison b au plan des xy, I l'angle de la ligne des nœuds avec l'axe des x; enfin désignons par b, b', b'' les angles du plan de l'orbite avec les trois plans des coordonnées, nous aurons $\cos b = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$; et la considération des deux triangles $aa'x$, $aa''y$ de la figure 16, donnera aussi

$$\cos b' = \sin b \cos \mathrm{I} = \frac{\theta \cos \mathrm{I}}{\sqrt{1+\theta^2}}, \quad \cos b'' = \sin b \sin \mathrm{I} = \frac{\theta \sin \mathrm{I}}{\sqrt{1+\theta^2}}.$$

Si l'on représente par les mêmes lettres, accentuées, les variables relatives aux autres planètes, et que l'on fasse $\theta \sin \mathrm{I} = p$, $\theta \cos \mathrm{I} = q$, etc., le principe des aires rapporté page 163, fournira les trois équations

$$m\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}} + m'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}} + \text{etc.} = \mathrm{C}, \quad mq\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}} + m'q'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}} + \text{etc.} = \mathrm{C}',$$

$$mp\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}} + m'p'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}} + m''p''\sqrt{\frac{a''(1-e''^2)}{1+\theta''^2}} + \text{etc.} = \mathrm{C}''.$$

Les deux dernières donnent, en négligeant pe^2, $p\theta^2$, qe^2, etc.,

$$qm\sqrt{a} + q'm'\sqrt{a'} + q''m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = \text{const.}, \quad pm\sqrt{a} + p'm'\sqrt{a'} + p''m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = \text{const.}$$

La première devient, en négligeant les e^4, $e^2\theta^2$, etc.,

$$m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + m''\sqrt{a''} + \text{etc.} - \tfrac{1}{2}m\sqrt{a}(e^2+\theta^2) - \tfrac{1}{2}m'\sqrt{a'}(e'^2+\theta'^2) - \tfrac{1}{2}m''\sqrt{a''}(e''^2+\theta''^2) - \text{etc.} = \mathrm{C},$$

et se décompose en ces trois équations: $m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = \text{const.}$

$$e^2m\sqrt{a} + e'^2m'\sqrt{a'} + e''^2m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = \text{const.}, \quad \theta^2m\sqrt{a} + \theta'^2m'\sqrt{a'} + \theta''^2m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = \text{const.}$$

(Voyez *Méc. céleste*, tome I, pages 311 et 315.)



déterminer ces constantes, pour qu'on en puisse conclure que chacun des termes des premiers membres de ces équations restera toujours fort petit, qu'il ne pourra pas croître indéfiniment, et que par conséquent les orbites seront toujours à fort peu de chose près circulaires, et leurs plans peu inclinés à l'écliptique.

M. Laplace se sert de ces relations pour démontrer généralement que les expressions des excentricités et des inclinaisons des orbites des planètes ne renferment ni arcs de cercle, ni exponentielles réelles. Pour y parvenir, il suppose, pour un moment, qu'il se trouvât des termes de ce genre dans les valeurs des excentricités; il les substitue dans la relation obtenue entre ces élémens; cette équation devant avoir lieu, quel que soit le temps t, il est nécessaire que les coefficiens des exponentielles, et des puissances semblables de t, disparaissent d'eux-mêmes; et cette considération lui sert à prouver que les coefficiens de ces quantités, dans les valeurs supposées, doivent être nuls chacun séparément (*), ou, ce qui revient au même, que ni les exponentielles, ni les arcs de cercle, ne se rencontrent dans les vraies valeurs des excentricités; et il en est de même pour les inclinaisons. « Ainsi, dit l'auteur, en vertu de l'action mutuelle des planètes, leurs » orbites s'aplatissent plus ou moins, mais en ne s'écartant que très peu de la forme circu» laire, et en conservant toujours les mêmes grands axes; les positions respectives de leurs » plans et de leurs aphélies varient sans cesse, elles s'inclinent plus ou moins les unes » aux autres, mais elles sont toujours renfermées dans une zone d'un petit nombre » de degrés, et tout le système planétaire est contenu dans des limites invariables. »

Annonce de la vraie cause des grandes inégalites de Saturne et Jupiter.

C'est dans le Mémoire qui contient ces recherches de M. Laplace, et qui renferme aussi la démonstration de deux théorèmes bien remarquables, relatifs aux premiers satellites de Jupiter, que se trouve l'un des plus beaux titres de ce grand géomètre à l'admiration et à la reconnaissance du monde savant; je veux parler de la véritable explication des grandes inégalités de Saturne et de Jupiter, qu'il donna à l'Académie des Sciences le 10 mai 1787, à l'époque même où l'on commençait à désespérer de pouvoir jamais y parvenir par l'attraction Newtonienne. Voici comment il s'énonce à ce sujet dans le Mémoire actuel, page 4:
» Une propriété générale de l'action des planètes entre elles, est que, si l'on n'a égard qu'aux » quantités qui ont de très longues périodes, la somme des masses de chaque planète, » divisées respectivement par les grands axes de leurs orbites, reste toujours à très peu

---

(*) En effet soit

$$e \sin V = \alpha f^{it} + \gamma t^r + \text{etc.} + h, \quad e \cos V = \mu f^{it} + \varphi t^r + \text{etc.} + l, \text{etc.},$$

on aura $$e^2 = (\alpha^2 + \mu^2) f^{2it} + (\gamma^2 + \varphi^2) t^{2r} + \text{etc.} + h^2 + l^2, \quad e'^2 = (\alpha'^2 + \mu'^2) f^{2it} + \text{etc.};$$

valeurs qui étant substituées dans l'avant-dernière équation, la réduiront à

$$\left\{ m\sqrt{a}(\alpha^2 + \mu^2) + m'\sqrt{a'}(\alpha'^2 + \mu'^2) + \text{etc.} \right\} f^{2it} + \left\{ m\sqrt{a}(\gamma^2 + \varphi^2) + m'\sqrt{a'}(\gamma'^2 + \varphi'^2) + \text{etc.} \right\} t^{2r}$$
$$+ m\sqrt{a}(h^2 + l^2) + m'\sqrt{a'}(h'^2 + l'^2) + \text{etc.} = \text{const.}$$

Or, celle-ci se décompose d'elle-même en trois autres, savoir:

$$m\sqrt{a}(\alpha^2 + \mu^2) + m'\sqrt{a'}(\alpha'^2 + \mu'^2) + \text{etc.} = 0, \quad m\sqrt{a}(\gamma^2 + \varphi^2) + m'\sqrt{a'}(\gamma'^2 + \varphi'^2) + \text{etc.} = 0,$$
$$m\sqrt{a}(h^2 + l^2) + m'\sqrt{a'}(h'^2 + l'^2) + \text{etc.} = 0;$$

et comme $m\sqrt{a}$, $m'\sqrt{a'}$, etc., sont des quantités positives, et que α, μ, γ, α', etc., sont des quantités réelles, les deux premières équations ne peuvent subsister, à moins qu'on n'ait séparément $\alpha = 0$, $\mu = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha' = 0$. (Voyez *Mécanique céleste*, tom. I, pag. 306.)

» près constante (*); d'où il suit que les carrés des moyens mouvemens étant réciproques
» aux cubes de ces axes, si le mouvement de Saturne se rallentit par l'action de Jupiter,
» celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui est conforme à ce qu'on
» observe. On trouve de plus, en employant les valeurs des masses de ces planètes,
» données par M. de la Grange, que le retardement de Saturne doit être à l'accélération
» de Jupiter, à très peu près comme 7 est à 3; ainsi, l'équation séculaire de Saturne étant
» supposée de 9° 16′, celle de Jupiter doit être de 3° 58′, ce qui ne diffère que de 9′ du
» résultat de Halley. Il est donc fort probable que les variations observées dans les
» mouvemens de Jupiter et de Saturne sont un effet de leur action mutuelle; et puis-
» qu'il est constant que cette action ne peut y produire aucune inégalité, soit cons-
» tamment croissante, soit périodique, mais d'une période très longue et indépendante de
» la situation de ces planètes, et qu'elle n'y cause que des inégalités dépendantes de
» leur configuration entre elles, il est naturel de penser qu'il existe, dans leur théorie,
» une inégalité considérable de ce genre, dont la période est fort longue, et d'où résultent
» ces variations.

» En examinant les circonstances du mouvement de Jupiter et de Saturne, on aperçoit
» aisément que leurs moyens mouvemens approchent beaucoup d'être commensurables,
» et que cinq fois le moyen mouvement de Saturne est à très peu près égal à deux
» fois celui de Jupiter; d'où j'ai conclu que les termes qui, dans les équations différen-
» tielles du mouvement de ces planètes, ont pour argument cinq fois la longitude
» moyenne de Saturne moins deux fois celle de Jupiter, pouvaient devenir sensibles
» par les intégrations, quoique multipliés par les cubes et les produits de trois dimen-
» sions des excentricités et des inclinaisons des orbites. J'ai regardé conséquemment ces
» inégalités comme une cause très vraisemblable des variations observées dans les mou-
» vemens de Jupiter et de Saturne. La probabilité de cette cause et l'importance de cet

---

(*) En effet, l'équation générale des forces vives, pour un système de planètes m, m', m'', etc., qui tournent autour d'un corps central dont la masse est prise pour unité, se réduit, lorsqu'on néglige les carrés et les produits des masses de ces planètes, à

$$m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}+\text{etc.}-2\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}+\text{etc.}\right)+f=0,$$

f étant une constante arbitraire.

Or, les équations du mouvement troublé de la planète m donnent aussi

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{2(1+m)}{r}-\frac{1+m}{a}+\psi;$$

a étant le demi-grand axe de son orbite, ψ une fonction périodique de l'ordre des masses perturbatrices; et l'on a des équations semblables pour chaque planète. Si l'on substitue pour les premiers membres leurs valeurs dans l'équation générale, elle donnera, en négligeant les quantités de l'ordre m^2 qui ne sont que périodiques ou constantes, la relation $\frac{m}{a}+\frac{m'}{a'}+\frac{m''}{a''}+\text{etc.}=f$, qui se réduit dans le cas de deux planètes à $mn^{\frac{2}{3}}+m'n'^{\frac{2}{3}}=f$, en faisant $\frac{1}{a^3}=n^2$, $\frac{1}{a'^3}=n'^2$; elle donne alors, en la différenciant par rapport à δ, l'équation $\frac{2}{3}mn^{-\frac{1}{3}}\delta n+\frac{2}{3}m'n'^{-\frac{1}{3}}\delta n'=0$; d'où l'on tire, entre les variations à longues périodes des moyens mouvemens, qui dépendent du premier ordre des masses perturbatrices, la relation

$$\delta n'=-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\delta n.$$ (Voyez *Méc. céleste*, tome I, page 334.)

» objet, m'ont déterminé à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'en » assurer. Le résultat de ce calcul a pleinement confirmé ma conjecture, et l'accord » entre mes formules et les observations m'a fourni une nouvelle preuve de l'admirable » théorie de la pesanteur universelle. ».

Nouvelle théorie de Jupiter et de Saturne donnée par M. Laplace. (*Mém. de Par.*, 1785 et 1786.)

L'auteur poursuit en ces termes, dans les Mémoires de l'année de 1785, pag. 35 : « La » plus considérable de toutes les inégalités de Saturne, dépend de cinq fois le moyen mou- » vement de Saturne moins deux fois celui de Jupiter; sa période est d'environ 919 ans, » et sa valeur, qui diminue par des degrés insensibles, était, au milieu de ce siècle, » de 48′ 44″. Le mouvement de Jupiter est soumis à une inégalité correspondante, dont » la période est exactement la même, mais dont la valeur, affectée d'un signe contraire, » est d'environ 20′ 49″. On doit rapporter à ces deux grandes inégalités, jusqu'à pré- » sent inconnues, le ralentissement apparent de Saturne, et l'accélération apparente » de Jupiter. Ces phénomènes ont atteint leur *maximum* vers 1560 : depuis cette » époque, les moyens mouvemens apparens des deux planètes se sont rapprochés » sans cesse de leurs véritables moyens mouvemens. Voilà pourquoi, lorsque l'on a » comparé les observations modernes aux anciennes, le moyen mouvement de Saturne » a paru plus lent, et celui de Jupiter plus rapide, que par la comparaison des obser- » vations modernes entre elles; tandis que ces dernières ont indiqué une accélération » dans le mouvement de Saturne, et un ralentissement dans celui de Jupiter. Si l'As- » tronomie eût été renouvelée trois siècles plus tard, les observations auraient présenté » des phénomènes contraires. Les mouvemens que l'Astronomie d'un peuple assigne » à Jupiter et à Saturne peuvent donc nous éclairer sur le temps où elle a été » fondée.....

» La théorie de Saturne renferme encore une inégalité remarquable dont la valeur » est à peu près de 10′, et qui coïnciderait avec les inégalités du mouvement elliptique, » si le double du moyen mouvement de Jupiter était parfaitement égal à cinq fois celui » de Saturne. C'est d'elle que vient en grande partie le dérangement observé par M. de » la Lande, dans le mouvement de Saturne, et qui rend, depuis un siècle, son moyen » mouvement, conclu des oppositions de cette planète vers l'équinoxe du printemps, plus » rapide que celui qui résulte des oppositions observées vers l'équinoxe d'automne; c'est » aussi à cela que tient le peu d'accord des variations de l'aphélie de Saturne avec la » théorie de ses inégalités séculaires. »

Préambule et division de ce travail.

Le Mémoire qui contient le passage précédent, et dont la seconde partie se trouve dans le Recueil de l'*Acad. de Paris*, pour 1786, comprend, outre le développement des calculs relatifs à la belle découverte de M. Laplace, la première théorie complète de Jupiter et de Saturne qui ait paru, la seule à laquelle on n'ait rien ajouté depuis, et dont les formules générales aient été appliquées dès-lors aux autres planètes. L'auteur y a fait usage de tous ses travaux précédens, en adoptant aussi quelques procédés de Lagrange : « Cet ouvrage, dit-il, est divisé en trois sections. J'expose dans la première, » une théorie analytique des inégalités périodiques et séculaires de Jupiter et de Saturne, qui » naissent de leur action mutuelle. La seconde section a pour objet la théorie de Saturne, » la troisième la théorie de Jupiter; on y trouve l'application, à ces deux planètes, des for- » mules analytiques de la première, la correction des élémens de leurs orbites, et la compa- » raison des résultats avec les observations anciennes et modernes. Je me suis sur-tout

» attaché à donner à mes résultats, une forme simple et commode pour le calcul; et, comme » je les ai vérifiés avec beaucoup de soin et par différentes méthodes, je crois pouvoir ré- » pondre de leur exactitude. Ce qui distingue principalement cette théorie de celles » qui l'ont précédée, est la considération des inégalités dépendantes des carrés et des » puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites, que j'ai cal- » culées en poussant l'approximation jusqu'au quatrième ordre.... Les méthodes ordi- » naires conduiraient, pour les déterminer, à des calculs d'une excessive longueur; » heureusement la même considération qui force de recourir à ces inégalités, simplifie » leur détermination, et j'expose une méthode facile et très approchée pour y parvenir. » Nous allons nous borner à donner une idée générale de ce beau travail, en entrant cependant dans quelques détails au sujet des inégalités à longue période.

L'auteur, après avoir déduit des équations générales du mouvement de deux planètes, les quatre intégrales premières, qui sont les seules qu'on puisse obtenir, et après en avoir conclu, comme dans son Mémoire de 1784, les équations de condition qui en résultent entre les élémens, transforme les coordonnées rectangulaires en polaires, en désignant, comme dans son Mémoire de 1773, par $m'\delta r$, $m'\delta v$, $m'\delta s$, les accroissemens du rayon vecteur, de la longitude sur le plan de l'orbite, et du sinus de la latitude au-dessus de l'orbite primitive, dus à l'action réciproque des planètes, et en représentant par R la fonction Ω de Lagrange, sans y comprendre la masse perturbatrice m'. Il obtient alors, par le procédé que nous avons indiqué page 123, les expressions générales de ces accroissemens en fonction des élémens elliptiques, et des différentielles partielles de R par rapport à x, y, z, précédées d'un ou de deux signes d'intégration (*). Le calcul se trouve par là réduit à des quadratures que l'on peut toujours obtenir par les méthodes connues d'interpolation, ce qui est avantageux dans la recherche des perturbations des comètes dues à l'action des planètes; mais dans la théorie des planètes, la considération des orbites peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres, peut conduire à des expressions analytiques de ces perturbations, et faire connaître la nature des orbites qu'elles décrivent, par des équations fort approchées qui embrassent les siècles passés et à venir.

1re section. Théorie analytique des perturbations mutuelles de deux planètes.

L'auteur reprend, pour y parvenir, les deux premières équations précédentes, en laissant celle en δr sous la forme d'une équation du second ordre; il prend pour plan fixe des xy celui de l'orbite primitive de m, et désigne par v l'angle formé par le rayon r et par l'axe des x; et par v' l'angle que fait avec cet axe la projection de r' sur le plan fixe.

(*) Ces valeurs sont, en supposant $\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3} - \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)+(z'-z)}} = \text{R}$,

$$\frac{d\text{R}}{dx}dx + \frac{d\text{R}}{dy}dy + \frac{d\text{R}}{dz}dz = d\text{R},\ x\left(\frac{d\text{R}}{dx}\right) + y\left(\frac{d\text{R}}{dy}\right) + r\left(\frac{d\text{R}}{dz}\right) = r\left(\frac{d\text{R}}{dr}\right):$$

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\cos v\int ndt.r\sin v\left[2\int d\text{R} + r\left(\frac{d\text{R}}{dr}\right)\right] - \sin v\int ndt.r\cos v\left[2\int d\text{R} + r\left(\frac{d\text{R}}{dr}\right)\right]\right\},$$

$$\delta v = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{2rd.\delta r + \delta rdr}{a^2ndt} + 3a\int ndt\int d\text{R} + 2a\int ndt.r\left(\frac{d\text{R}}{dr}\right)\right\},$$

$$\delta s = a(1-e^2)\sqrt{\frac{1+\theta^2}{1-e^2}}\left\{s\int ndt\left[x\left(\frac{d\text{R}}{dy}\right) - y\left(\frac{d\text{R}}{dx}\right)\right] + \frac{y}{r}\int ndt\left[z\left(\frac{d\text{R}}{dx}\right) - x\left(\frac{d\text{R}}{dz}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{x}{r}\int ndt\left[z\left(\frac{d\text{R}}{dy}\right) - y\left(\frac{d\text{R}}{dz}\right)\right]\right\}.$$

Il s'occupe ensuite du développement de la fonction R, qu'il réduit à une série dont le premier terme S, est ce que devient R quand on y met, pour r, r', v, v', leurs valeurs constantes a, a', $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$, et dont les termes suivans sont les différentielles du premier, par rapport à r, r', v, v', ou simplement par rapport à a et à $nt - n't$; quant au terme S, il le développe suivant les cosinus de l'angle $n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon$, en remarquant qu'on peut mettre son expression sous la forme $\frac{1}{2} \Sigma A^{(i)} \cos i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, dans laquelle Σ est le signe intégral des différences finies, qui, dans ce cas, se rapporte à la variable i, et qui embrasse toutes ses valeurs entières depuis $i = -\infty$ jusqu'à $i = \infty$; de manière que $A^{(-i)}$ soit égal à $A^{(i)}$. Il considère d'abord à part les termes indépendans des excentricités, et il obtient, par l'intégration, les parties u et V des valeurs de δr et de δv qui s'y rapportent. Il traite de même séparément ensuite les termes qui dépendent de la première puissance des excentricités, et dont la détermination exige de très grands calculs.

Détermination de l'ordre des termes périodiques.

« Les différens termes des expressions complètes de r, v et s, dit-il page 63, sont » compris dans la forme K sin ou cos $[i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + rnt + r\varepsilon]$; i étant un » nombre entier positif ou négatif, ou zéro, et r étant un nombre entier positif, ou zéro; » K est une fonction des excentricités et des inclinaisons des orbites, de l'ordre r. On » peut juger par là de quel ordre est un terme qui dépend d'un angle donné. Pour savoir, par exemple, dans la théorie de Jupiter et de Saturne, de quel ordre est le terme » qui dépend de l'angle $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$ on mettra cet angle sous cette forme, » $5 (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon$; et comme alors $r = 3$, il en résulte que le terme » dont il s'agit est du troisième ordre, ou qu'il dépend des cubes et des produits de trois » dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites. »

Avant de passer à l'examen particulier de ces termes, M. Laplace s'occupe, dans les articles 13 — 15, de la détermination numérique des coefficiens $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, etc., des séries qui expriment l'inverse de la distance mutuelle des deux planètes et l'inverse de son cube; il expose avec étendue les diverses propriétés de ces fonctions, et présente cette théorie d'une manière analogue à celle qu'il a employée depuis dans la *Mécanique céleste*. Il détermine ensuite les inégalités séculaires de l'une et de l'autre planète, en faisant disparaître les arcs de cercle par la méthode qu'il avait donnée dans les volumes de 1772; et il fait usage des équations de condition entre les élémens, pour prouver la constance des grands axes aux quantités près du quatrième ordre.

Inégalités des ordres supérieurs au premier, qui acquièrent de très petits diviseurs par l'intégration.

Les rapports des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne rendant insuffisantes les approximations précédentes, l'auteur consacre les articles 21 — 28 à la détermination des perturbations qui dépendent des ordres de petitesse supérieurs au premier. « Représentons, dit-il, les valeurs précédentes de δr et δv, et supposons que dR renferme ou un » terme constant, ou le sinus d'un angle proportionnel au temps, et croissant avec une » grande lenteur, en sorte qu'en exprimant cet angle par $\alpha t + 6$, α soit un très petit coefficient; la double intégrale $\int ndt \int d\text{R}$ renfermera un terme proportionnel au carré du » temps, ou un terme dépendant de l'angle $\alpha t + 6$, et qui aura α^2 pour diviseur. Il est » clair qu'en faisant $\alpha = 0$, ce second cas rentrera dans le premier; ainsi nous considérerons, pour plus de généralité, le cas dans lequel α est quelconque, mais très » petit; et nous chercherons les termes de δr et de δv, qui dépendent de l'angle $\alpha t + 6$, » et qui ont α^2 pour diviseur. » Il est évident que ces termes ne peuvent résulter que

d'une double intégration; l'examen de tous ceux de l'expression de δr ne lui en fournit qu'un seul qui soit dans le cas dont il s'agit (*), et il en conclut que, pour avoir égard à la partie des perturbations du rayon vecteur et de la longitude de m, qui est divisée par α^2, il suffit d'augmenter de la quantité $3am'\int ndt\int d\mathrm{R}$, la longitude moyenne $nt+\varepsilon$ des expressions de ces variables dans l'hypothèse elliptique. Si $d\mathrm{R}$ renfermait un terme constant, cela produirait une équation séculaire, et ce serait le cas de la commensurabilité des moyens mouvemens, qui n'a pas lieu dans notre système; mais si les moyens mouvemens approchent beaucoup de cette commensurabilité; si, par exemple, $5n'-2n$ est seulement $\frac{1}{74}$ de n, comme dans la théorie de Saturne et Jupiter, la double intégration des termes qui auront cet argument, amènera le très petit diviseur $(5n'-2n)^2$, qui rendra ces termes très grands quoiqu'ils soient du troisième ordre.

Pour déterminer ces inégalités, l'auteur suppose que la partie de R, dépendante de l'angle $5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon$, que nous représenterons, pour abréger, par ζ, soit $k\sin\zeta-k'\cos\zeta$; et il voit ce que cela produit dans $3am'\int ndt\int d\mathrm{R}$. Les coefficiens k et k' étant des fonctions des excentricités, des inclinaisons, des positions du nœud et de l'aphélie, doivent varier avec ces élémens; et vu la lenteur avec laquelle croît ζ, il n'est pas permis de les regarder comme constans dans la double intégrale ci-dessus; mais leurs périodes étant beaucoup plus longues que celles de cet angle, on peut n'avoir égard qu'aux diffé-

(*) En effet, si l'on fixe l'origine de l'angle v à l'aphélie de la planète m, on a, par la nature du mouvement elliptique,

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos v},\quad n^2a^3=1,\quad r^2dv=a^2ndt\sqrt{1-e^2},\quad \text{et de là}\quad \sin v=-\frac{a(1-e^2)dr}{er^2dv}=-\frac{\sqrt{1-e^2}dr}{aendt};$$

on a aussi, en désignant par χ une suite de cosinus des multiples de l'angle $nt+\varepsilon$,

$$r=a\left(1+\frac{1}{2}e^2+e\chi\right),\quad \text{d'où}\quad r\cos v=\frac{r-a(1-e^2)}{e}=a\left(\frac{3}{2}e+\chi\right).$$

On tire de là

$$\int ndt.r\sin v\int d\mathrm{R}=-\frac{1}{ae}\sqrt{1-e^2}\int rdr\int d\mathrm{R}=-\frac{1}{2ae}\sqrt{1-e^2}\left(r^2\int d\mathrm{R}-\int r^2d\mathrm{R}\right),$$

$$\int ndt.r\cos v\int d\mathrm{R}=a\int ndt\left(\frac{3}{2}e+\chi\right)\int d\mathrm{R}=\frac{3}{2}ae\int ndt\int d\mathrm{R}+a\left(\chi'\int d\mathrm{R}-\int\chi'd\mathrm{R}\right),$$

en faisant $\chi'=\int n\chi dt$; ce qui amène dans la valeur de $\frac{\delta r}{a}$ du bas de la page 207, le terme

$$-\frac{3ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}\int ndt\int d\mathrm{R}=\frac{3dr}{ndt}\int ndt\int d\mathrm{R},$$

qui est le seul qui conserve le double signe intégral, et d'où puissent résulter par conséquent, dans l'expression du rayon vecteur de la planète troublée, des termes qui aient α^2 pour diviseur.

Si l'on met cette valeur de δr dans l'expression de δv, on aura, en n'ayant égard qu'aux termes divisés par α^2, $\delta v=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{2rd^2r+dr^2}{a^2n^2dt^2}+1\right)3a\int ndt\int d\mathrm{R}$; et comme l'on a

$$\frac{dr}{andt}=-\frac{e\sin v}{\sqrt{1-e^2}},\qquad \frac{rdv}{andt}=\frac{1-e\cos v}{\sqrt{1-e^2}},\qquad \frac{(1-e\cos v)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dv}{ndt},$$

cette expression devient

$$\delta v=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{e^2\sin^2v-2e\cos v(1-e\cos v)}{1-e^2}+1\right]3a\int ndt\int d\mathrm{R}=\frac{dv}{ndt}3a\int ndt\int d\mathrm{R}.$$

(Voyez *Méc. cél.*, t. I, p. 291—293.)

rentielles premières de k et k', par rapport au temps, qui ont le cube de $5n' - 2n$ en diviseur; et négliger les différentielles des ordres supérieurs, ainsi que les termes qui n'ont en diviseur que la première puissance de cette quantité (*).

Quoique les valeurs générales de R soient différentes, dans la théorie de Jupiter et dans celle de Saturne, les termes par lesquels elles diffèrent ne peuvent en produire aucun qui ait ζ pour argument, lorsqu'on n'a égard qu'aux cubes ou aux produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites. On voit alors que l'expression de la correction $3a'm\int n'dt\int d\mathrm{R}$ de la longitude moyenne de Saturne, est à celle de Jupiter dans le rapport de $5n'^2a'm'$ à $2n^2am$, ou de 7 à 3; ce qui permet de conclure immédiatement des termes qui ont $(5n' - 2n)^2$ en diviseur, dans le cas de Jupiter, ceux de la même espèce qui se rapportent à Saturne. Il ne reste donc plus qu'à déterminer les valeurs générales de k, k', et de leurs premières différences. L'auteur y parvient en reprenant l'expression de la fonction R; et en n'en considérant que la partie qui est symétrique par rapport aux coordonnées de l'une et de l'autre planète, il y substitue, pour ces variables, leurs valeurs elliptiques, et trouve que l'angle ζ peut entrer sous le signe cosinus, dans les termes du troisième ordre, de six manières différentes, et qu'il y est suivi de différentes combinaisons des premiers multiples des longitudes ϖ et ϖ' des aphélies, ou de celle du nœud de Saturne Π. Il décompose alors ces cosinus de manière à mettre en évidence $\cos\zeta$ et $\sin\zeta$, dont les coefficiens lui donnent les valeurs générales de k et k' (**); et obtient ensuite, en développant les divers termes de la valeur de R, et par un calcul très laborieux, dont il ne donne que le résultat, les valeurs des coefficiens constans de chaque combinaison différente.

L'auteur passe de là à la recherche des inégalités sensibles qui dépendent du rapport approché de commensurabilité des moyens mouvemens des deux planètes. Telle est celle qu'introduit le terme A sin ou cos $(3nt - 5n't + 3\epsilon - 5\epsilon')$ dans l'équation différentielle

---

(*) Comme la différentielle de R n'est prise que par rapport aux coordonnées de m, ou à nt, on a $d\mathrm{R} = -2kndt\cos\zeta - 2k'ndt\sin\zeta$, d'où $3am'\int ndt\int d\mathrm{R} = -6am'\int\int n^2dt^2(k\cos\zeta + k'\sin\zeta)$.
Or, l'intégration par parties donne en général

$$\int u\cos mv.dv = \frac{1}{m}u\sin mv + \frac{1}{m^2}\left(\frac{du}{dv}\right)\cos mv - \frac{1}{m^3}\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)\sin mv + \text{etc.},$$

$$\int\int u\cos mv.dv^2 = -\frac{1}{m^2}u\cos mv + \frac{2}{m^3}\left(\frac{du}{dv}\right)\sin mv + \text{etc.},$$

et de même $$\int\int u\sin mv.dv^2 = -\frac{1}{m^2}u\sin mv - \frac{2}{m^3}\left(\frac{du}{dv}\right)\cos mv + \text{etc.};$$

on aura donc, dans le cas actuel, en intégrant par rapport aux nt et aux $n't$, et en négligeant les différentielles du second ordre de k et k',

$$3am'\int ndt\int d\mathrm{R} = \frac{6am'n^2}{(5n'-2n)^2}\left\{\left[k' - \frac{2}{5n'-2n}\left(\frac{dk}{dt}\right)\right]\sin\zeta + \left[k + \frac{2}{5n'-2n}\left(\frac{dk'}{dt}\right)\right]\cos\zeta\right\}.$$

On trouvera aussi, pour la correction $3a'm\int n'dt\int d\mathrm{R}$ relative à m', en supposant que la valeur de R reste la même, et en ne la différenciant que par rapport à $n't$, une formule tout-à-fait semblable, à l'exception du coefficient $6am'n^2$ qui se trouvera changé en $-15a'mn'^2$.

(**) En effet, la valeur de R est, en n'ayant égard qu'aux termes qui ont ζ pour argument, de la forme

$$\mathrm{R} = \mathrm{M}^{(0)}e'^3\cos(\zeta - 3\varpi') + \mathrm{M}^{(1)}e'^2e\cos(\zeta - 2\varpi' - \varpi) + \mathrm{M}^{(2)}e'e^2\cos(\zeta - \varpi' - 2\varpi) + \mathrm{M}^{(3)}e^3\cos(\zeta - 3\varpi)$$
$$+ \mathrm{M}^{(4)}e'\gamma^2\cos(\zeta - 2\Pi - \varpi') + \mathrm{M}^{(5)}e\gamma^2\cos(\zeta - 2\Pi - \varpi),$$

ce qui donne

$k = \mathrm{M}^{(0)}e'^3\sin 3\varpi' + \mathrm{M}^{(1)}e'^2e\sin(2\varpi' + \varpi) + \text{etc.}$, $k' = -\mathrm{M}^{(0)}e'^3\cos 3\varpi' - \mathrm{M}^{(1)}e'^2e\cos(2\varpi' + \varpi) - \text{etc.}$,
et il ne reste plus à calculer que les valeurs numériques de $\mathrm{M}^{(0)}$, $\mathrm{M}^{(1)}$, etc. en fonction des demi-grands axes.



en $d^2.r\delta r$, relative à Jupiter, qui acquiert, par l'intégration, le diviseur $n^2-(3n-5n')^2$, ou $(5n'-2n)$ $(4n-5n')$; et comme ce terme n'est que de l'ordre des carrés des excentricités, on voit qu'il peut en résulter des inégalités sensibles dans les valeurs de δr et δv. Ces inégalités sont liées à celle qui dépend de l'angle ζ, par un rapport assez remarquable, qui les donne fort simplement au moyen des valeurs de k et de k'. Les termes qui dépendent de l'angle $2nt-4n't+2\epsilon-4\epsilon'$, acquérant par l'intégration le diviseur $n'^2-(2n-4n')^2$, ou $(2n-3n')$ $(5n'-2n)$, deviennent sensibles aussi dans la théorie de Saturne, et résultent, comme les premiers, des variations de l'excentricité et de l'aphélie de Saturne qui dépendent de l'angle ζ. L'auteur détermine leurs coefficiens par le même procédé. Il s'occupe ensuite des termes correspondans qui entrent dans les expressions de δs et $\delta s'$, et qui dépendent des carrés et des produits des excentricités, et des inclinaisons; il remarque enfin, que la substitution de la longitude moyenne corrigée, dans les expressions du mouvement elliptique des deux planètes, produit des inégalités dont les argumens sont, $5n't-nt+5\epsilon'-\epsilon$, $6n't-2nt+6\epsilon'-2\epsilon$, et qui sont fort sensibles, quoiqu'elles dépendent des quatrièmes puissances et des produits de quatre dimensions des excentricités et des inclinaisons; ce qui prouve la nécessité de pousser l'approximation jusqu'aux quantités du quatrième ordre. « Toutes ces inégalités, dit-il, » peuvent être considérées comme le résultat de variations dans les élémens des orbites » elliptiques, dépendantes de l'angle $5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon$.

» Pour réduire en nombres les inégalités précédentes, il faut connaître les constantes » arbitraires qui entrent dans leurs expressions analytiques, ou les élémens du mou- » vement elliptique de Jupiter et de Saturne. Les observations ne donnent que les » mouvemens vrais des planètes; pour en conclure les élémens précédens, il faudrait » connaître d'avance l'effet des perturbations, et le retrancher du résultat des observa- » tions; ainsi, la détermination des inégalités, et celle des élémens des orbites, dépendent » réciproquement l'une de l'autre, et l'on ne peut parvenir à les bien connaître, que » par des approximations successives. C'est dans cette vue, que j'ai commencé par tirer » de l'analyse précédente, une formule de correction des Tables de Saturne de Halley. » En comparant ensuite cette formule à un grand nombre d'oppositions, je suis parvenu » à les représenter avec exactitude, et j'ai reconnu en même temps, que les élémens des » Tables de Halley avaient besoin de corrections considérables. Quant à Jupiter, j'ai suivi » une marche différente : les Tables de Wargentin représentaient assez bien, à l'époque » où elles ont paru, les observations faites depuis un siècle; ce savant astronome a eu » égard aux inégalités indépendantes des excentricités des orbites, et à celles qui ne » dépendent que de leurs premières puissances; mais les grandes inégalités qui altèrent » le moyen mouvement, l'excentricité et la position de l'aphélie, lui étant inconnues, » il a dû les comprendre dans les élémens elliptiques de ses Tables. Ainsi, pour corriger » ces élémens, il suffit d'en retrancher l'effet de ces inégalités. »

2e Section. Détermination numérique des inégalités de Saturne.

L'auteur rapporte ensuite les élémens qui sont le résultat de ces calculs, en prenant pour époque le commencement de 1750, à Paris, temps moyen; il adopte la valeur de la masse de Saturne, donnée par Lagrange, et qui réduit à 13 jours la différence de 23j trouvée par Clairaut, entre l'instant calculé et l'instant observé du passage de la comète de 1759, par son périhélie. Il détermine ensuite les inégalités séculaires des deux planètes, en cherchant leurs variations annuelles pour 1750 et pour l'an 750, et en concluant de là



les deux premiers termes de leurs valeurs générales, développées suivant les puissances du temps : ce qui donne des formules qui peuvent s'étendre à plus de deux mille ans avant, et à mille ou douze cents ans après l'époque que l'on prend pour origine (*). Il passe de là aux inégalités périodiques de Saturne, et en conclut les perturbations $m\delta r'$ et $m\delta v_{,}'$ du rayon vecteur, et de la longitude comptée sur l'orbite, en négligeant celles dont l'effet est au-dessous de 8″. Comme le terme qui dépend de l'angle $2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon$ est à peu près de 7′ dans ce siècle, et que les changemens des excentricités et des aphélies altèrent sensiblement sa valeur, il l'évalue aussi pour deux époques différentes, afin d'en avoir une expression qui puisse s'étendre à un grand nombre de siècles. Il détermine d'une manière analogue les différentielles premières de k et k' par rapport au temps, en substituant alternativement, dans les expressions de k et k', les valeurs des élémens pour 1750 et 1950, et en prenant la différence des résultats correspondans. Il calcule de plus la grande inégalité de Saturne pour deux autres époques, afin d'en conclure la loi des accroissemens de son coefficient et de son argument; il trouve que ce dernier diminue de 58″,88 par année julienne; et comme l'accroissement de l'angle ($\zeta - i.58''{,}88$) est de 1410″,6 par an, il en résulte qu'il faudra 918 ans $\frac{3}{4}$ pour que cet angle soit égal à 360°, ce qui donne la période de l'inégalité. L'auteur réduit aussi en nombres l'inégalité qui dépend de l'angle $2nt - 4n't + 2\epsilon - 4\epsilon'$; il examine ensuite les termes de la valeur de $\delta v'$, qui, étant dépendans de l'angle ζ, ont pour diviseur $5n' - 2n$, et il prouve qu'il suffit pour y avoir égard, dans l'expression de la grande inégalité de Saturne, d'augmenter a' de sa 225e partie, ce qui montre qu'ils n'ont qu'une influence très petite et du même ordre que les carrés des excentricités. Il fait voir enfin que, dans le calcul de la latitude de Saturne, il suffit d'avoir égard aux inégalités séculaires de la position de son orbite.

Comparaison des calculs et des observations

Les articles 42 — 48, qui terminent cette deuxième section, contiennent la comparaison de la théorie de Saturne avec les observations modernes et anciennes. L'auteur choisit d'abord vingt-quatre oppositions de Saturne, observées depuis 1598 à 1785, et disposées d'une manière avantageuse, pour les comparer avec les longitudes calculées à chaque époque, et il en déduit des équations de condition qui servent à déterminer les corrections des élémens de cette planète. Il vérifie par là que ses formules font presque entièrement disparaître les grandes erreurs des tables, et les réduisent à moins de 2′; il trouve aussi qu'elles représentent, avec une grande précision, une observation faite par les Chaldéens, 228 ans avant notre ère, et quelques autres oppositions de Ptolémée; d'où il conclut que le moyen mouvement sidéral de Saturne est uniforme, qu'il faut bannir de la théorie des planètes les équations séculaires des moyens mouvemens, et que les comètes n'ont point d'influence sensible sur notre système planétaire.

Travail de M. Delambre sur cet objet.

M. Laplace s'exprime en ces termes, dans le préambule du Mémoire, imprimé dans le volume de 1786, qui est la continuation du précédent : « Il était à désirer qu'un astro-

---

(*) En effet, soient δe la variation cherchée d'un élément correspondante au nombre i d'années juliennes, et $\frac{de_{,}}{di}$, $\frac{de}{di}$ les variations annuelles de cet élément, à deux époques éloignées de 1000 ans; on a, par la théorie des suites,

$$\frac{de_{,}}{di} = \frac{de}{di} - \frac{1}{1000}\,\frac{d^2e}{di^2},\quad \delta e = i\frac{de}{di} + \frac{i^2}{2}\frac{d^2e}{di^2} + \text{etc.} = i\frac{de}{di} + \frac{i^2}{2000}\left(\frac{de}{di} - \frac{de_{,}}{di}\right).$$

» nome, exercé dans le calcul des observations, reprît toutes les oppositions de Jupiter » et de Saturne, observées dans le dernier siècle et dans celui-ci, et qu'il les discutât » de nouveau, en y appliquant les corrections dues au mouvement des étoiles, et à leurs » positions aujourd'hui mieux connues. M. de Lambre a bien voulu entreprendre cette » discussion pénible et délicate ; il l'a faite avec tout le soin qu'exige l'importance de ce » travail ; et je reconnais avec plaisir, que si mes recherches sont utiles aux astronomes, » c'est principalement à lui qu'elles devront cet avantage. De mon côté, j'ai déterminé » les petites inégalités de Saturne, que j'avais d'abord négligées, et j'ai calculé avec » précision celles de Jupiter. En comparant ensuite mes formules à un grand nombre » d'observations, M. de Lambre en a conclu les élémens elliptiques des orbites de ces » deux planètes, et il a dressé, sur ces formules, des tables de leurs mouvemens. Ces » tables sont uniquement fondées sur la loi de la pesanteur ; je n'ai emprunté de l'obser- » vation que ce qui est nécessaire pour déterminer les constantes arbitraires introduites » par l'intégration des équations différentielles. M. de Lambre a comparé ces tables à » toutes les bonnes observations qu'il a pu rassembler, et il a trouvé le plus souvent l'er- » reur au-dessous de 30″.

» Ces tables auront cependant besoin d'être retouchées dans la suite, à cause de quel- » ques inégalités sensibles dépendantes des carrés des forces perturbatrices, et auxquelles » je n'ai point eu égard ; telle est entre autres une petite inégalité, qui a pour argument le » double de celui de la grande inégalité de Saturne, et dont le coefficient est $+30''$ pour » Saturne, et $-13''$ pour Jupiter. J'ai reconnu aussi que les quantités de l'ordre du carré » des masses des deux planètes, produisaient des variations sensibles dans leurs équations » du centre, et dans la position de leurs aphélies ; mais j'ai cru pouvoir les omettre, » parce que l'erreur qui en résulte est jusqu'à présent insensible. Je ne puis non plus ré- » pondre qu'à une demi-minute près de la valeur du coefficient de la grande inégalité de » Saturne. »

Les deux premiers articles de ce Mémoire sont consacrés à la détermination des inégalités de Saturne qui dépendent des angles $3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon$, $2nt - 3n't + 2\epsilon - 3\epsilon'$, $nt - n't + \epsilon - \epsilon'$. Les quantités du premier ordre lui avaient déjà donné une inégalité analogue à la seconde ; et pour en retrouver une semblable, il faut avoir égard aux quantités du troisième ordre. Les termes indépendans des excentricités en contenaient aussi un qui avait pour argument le troisième angle, et l'auteur a recours aux quantités du second ordre pour trouver une nouvelle inégalité de cette nature. Il reprend ensuite les inégalités qu'il a précédemment déterminées, pour leur donner plus de précision.

3e Section. Théorie de Jupiter.

La théorie de Jupiter occupe les articles 54 — 63 de cet ouvrage. L'auteur y applique à cette planète le même procédé qui lui a servi pour déterminer les inégalités de Saturne ; il compare ensuite ses formules avec trente-deux oppositions modernes et avec une ancienne observation, et leur accord lui sert à vérifier de plus en plus la précision si remarquable avec laquelle les deux plus grosses planètes de notre système ont obéi, depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours, aux loix de leur action mutuelle.

Nouveau Mémoire de M. Laplace.

Nous avons vu, au commencement de ce chapitre, M. Laplace parvenir à prouver que, par cela seul que les planètes se meuvent toutes dans le même sens, et dans des orbites presque circulaires et peu inclinées les unes aux autres, les variations de leurs excentricités et de leurs inclinaisons sont renfermées dans d'étroites limites. Il était arrivé à ce résultat au moyen de différentes équations déduites du principe des aires, et qui sont indépendantes de



la petitesse des excentricités et des inclinaisons ; il reprit ce sujet dans les *Mém. de Paris*, pour 1787 ; il fit voir que les mêmes équations de relation entre les élémens, résultent aussi directement des équations différentielles qui déterminent les variations séculaires des orbites; et il démontra de nouveau, qu'en vertu de l'action mutuelle de deux planètes, l'inclinaison respective de leurs orbites reste toujours la même, et que, dans le cas de notre sytème planétaire, les racines de l'équation, relative aux multiples du temps qui entrent sous les signes périodiques dans les valeurs de p et q, ne peuvent être ni égales ni imaginaires.

Travaux divers. C'est aussi en 1787 que parut l'*Introduction à l'étude de l'Astronomie physique* de Cousin, dont le chapitre 2 contient l'exposition des théories de la Lune de Clairaut, Euler et d'Alembert, et de quelques-uns des travaux postérieurs, sur le problème des trois corps, et dont le chapitre 6 est consacré au développement des diverses méthodes d'approximation auxquelles ce problème avait donné lieu. Jean Trembley avait envoyé à l'Académie de Paris, en 1783, un Mémoire dans lequel il cherchait à compléter la méthode d'approximation, fondée sur des différenciations et des intégrations successives, donnée par d'Alembert (*Mém. de Par.*, 1769), et que Lagrange avait reconnue être fautive. Il s'occupa de nouveau de cet objet, dans les *Mém. de Berlin*, pour 1786, et releva une erreur qui était échappée à Cousin, dans son exposition de ces méthodes. Il fit voir aussi, dans un petit Mémoire inséré dans ceux de la même année, et intitulé : *Examen d'un Paradoxe analytique*, qu'en regardant les termes affectés d'arcs de cercle, qui se rencontrent dans les intégrales, comme provenant de certaines fonctions de sinus et de cosinus que les substitutions successives ont développées, on pouvait grouper ces termes de manière à former des séries dont la marche régulière fît reconnaître les fonctions qui les avaient engendrées ; et il appliqua avec succès ce procédé à quelques exemples que Lagrange et M. Laplace avaient déjà traités. Le volume des *Mém. de Berlin*, de cette année, contient aussi une *Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes*, donnée par Lagrange, pour faire suite aux *Principes* de Newton.

M. Delambre envoya à cette Académie, en 1787, un Mémoire imprimé dans le volume de 1785, contenant des élémens pour les Tables du Soleil, établis sur trois cents quatorze observations de Maskeline, et qui ne s'en écartaient jamais de 15″. M. Laplace lui fournit ensuite le moyen de les rendre plus précis, en calculant de nouveau la partie due aux perturbations, et en évaluant, le premier, les effets de l'attraction de Mars. Il lui donna aussi l'idée d'employer à la correction des élémens elliptiques, la méthode des équations de condition qui seule permet de discuter à la fois tous les élémens, et de faire usage d'un nombre illimité d'observations. M. Delambre calcula alors (au mois de juin 1788) de nouvelles Tables du Soleil, dont les erreurs ne montaient jamais à 10″. Ses Tables de Jupiter et de Saturne parurent vers la fin de 1789, et ce fut, dit-il, le dernier ouvrage dont l'Académie des Sciences pût ordonner l'impression. Cette illustre société, qui a contribué peut-être plus que toute autre à l'avancement de la science, tant par les travaux de ses membres que par ceux que ses encouragemens ont provoqué, proposa la théorie de la planète d'Herschel ou d'Uranus pour sujet du prix de 1790. On avait d'abord calculé son orbite dans l'hypothèse parabolique qu'il fallait modifier continuellement ; le président de Saron avait eu l'idée de supposer l'orbite circulaire ; on avait enfin reconnu que la véritable était elliptique, et on avait vérifié que Flamsteed, Mayer et Lemonnier avaient, en 1690, 1756 et 1765, observé cet astre comme une étoile. Duval le Roy avait appliqué à cette planète, dans les *Mém. de Berlin*, pour 1787,

Théorie d'Uranus.

imprimés en 1792, la nouvelle théorie des variations séculaires et périodiques de Lagrange, en se bornant, dans le calcul des inégalités périodiques, à celles qui dépendent de la distance héliocentrique d'Uranus à Saturne et à Jupiter. M. Delambre, auteur de la pièce couronnée, commença par établir sa théorie sur les seules observations postérieures à 1781; il calcula les perturbations d'Uranus par la méthode de M. Laplace, et trouva que l'action de Saturne produisait une équation à longue période, à laquelle il était très nécessaire d'avoir égard. Ce fut alors qu'il examina les observations anciennes, et qu'après s'être assuré de leur justesse, il les fit concourir à la détermination de ses élémens. Les tables qui en résultèrent représentaient les observations à 8" près, et elles ont conservé depuis une précision à peu près égale. M. Oriani fit paraître d'autres Tables d'Uranus fondées également sur la théorie de M. Laplace, et qui, un peu moins exactes peut-être que les précédentes pour la partie elliptique, sont les mêmes pour celle des perturbations. On lui dut également, de même qu'à Triesnecker et à M. le baron de Zach, de nouvelles tables de quelques anciennes planètes; et Duval le Roy calcula aussi, par la méthode de Lagrange, dans les *Mem. de Berlin* de 1792, les inégalités d'Uranus qui sont de l'ordre des excentricités des orbites.

Nous arrivons à la fin d'un siècle bien fécond en découvertes mémorables, et dont la dernière moitié est, sous le rapport de l'application de l'analyse aux mouvemens des corps célestes, la période la plus remarquable qui se soit encore écoulée. La publication d'un ouvrage qui présentât, sous un même point de vue, les théories de tous les phénomènes connus du système du monde, et qui contînt l'exposition complète des découvertes nouvelles, tracée par l'auteur même d'un grand nombre d'entre elles, devait ajouter un nouveau lustre à cette époque déjà si brillante. C'est à M. Laplace que les sciences durent ce service signalé, et ce fut le 6 septembre 1799 que parurent les deux premiers volumes de son *Traité de Mécanique céleste.* « Développer » les relations qui existent entre les mouvemens et les forces qui les produisent (dit » M. Biot, *Mag. Encycl.*, 5e année, t. III, p. 433), en déduire la nature de la force » qui doit animer les corps célestes, pour que leurs mouvemens soient tels que l'observation les présente, s'élever ainsi au principe de la pesanteur universelle, et redescendre de ce principe à l'explication de tous les phénomènes célestes jusque dans leurs » moindres détails; tel est l'objet de cet ouvrage, qui honore la nation française, et qui » est du petit nombre de ceux qui paraissent à des époques éloignées sur l'horizon des » sciences, pour y répandre une lumière que le temps et l'ignorance ne sauraient » éteindre. » *Mécanique céleste de M. Laplace.*

L'idée de réunir en un seul corps les théories de toutes les planètes, dont chacune en particulier a fait le sujet des études d'un grand nombre de géomètres, et de déterminer leurs mouvemens en poussant la précision plus loin qu'on ne l'avait jamais fait, paraît d'abord colossale; et l'exécution de ce travail, qui ne forme qu'une partie de celui de M. Laplace, semble déjà supérieure aux forces d'un seul homme. Il est vrai que les grands rapports qui existent entre ces diverses théories, lui ont permis d'adopter pour toutes une marche uniforme; et qu'après avoir établi, dans son second livre, les principes et les formules générales, il ne lui est plus resté dans le sixième, qu'à pousser encore plus loin ses approximations, à les appliquer aux planètes principales, en ayant égard aux circonstances particulières où se trouve chacune d'elles, et à faire ensuite des substitutions numériques dont il a pu confier une grande partie à d'habiles calculateurs. Cependant, la



réunion même de tous ces travaux, la généralité, la richesse, l'originalité et la profondeur qui règnent dans les méthodes et les formules analytiques, l'importance et la multiplicité des applications, leur utilité pratique, et l'exactitude des tables qui en sont le résultat, assurent à l'illustre auteur de cette vaste entreprise la reconnaissance du monde savant, l'admiration des âges futurs, et doivent placer la *Mécanique céleste* au rang des monumens les plus imposans et les plus durables de l'esprit humain.

NOTE

Relative aux formules du bas de la page 162.

Les valeurs elliptiques de la longitude, du rayon vecteur et de la tangente de la latitude, données par M. Laplace, pag. 203 de son Mémoire, sont :

$$\varphi = nt + A' - 2ae \sin(nt+\varepsilon) + \text{etc.}, \quad r = a[1 + ae\cos(nt+\varepsilon) + \text{etc.}], \quad s = a\gamma \sin(nt+\theta);$$

et il faut se rappeler que A′ désigne la distance moyenne de la planète à une ligne fixe, lorsque $t=0$, que $-2ae\sin(nt+\varepsilon)$ est ce qu'on appelle l'équation du centre, et que ε et θ sont les quantités dont la planète est plus avancée que son aphélie et son nœud, quand $t=0$, ou, en d'autres termes, la différence entre la longitude A′ de l'époque, et les longitudes de l'aphélie et du nœud.

Les expressions des variables dans le cas du mouvement troublé, et lorsqu'on néglige les termes périodiques, à l'exception du premier de ceux qui entrent dans la seconde et la troisième valeur, sont

$$\varphi = nt + A' + 2A\delta\mu' nt + \tfrac{3}{4}a^2\delta\mu'(B - eD)n^2t^2,$$
$$r = a[1 - A\delta\mu' + a(e + \tfrac{1}{2}\delta\mu' Dnt)\cos(nt+\varepsilon) - a\delta\mu'(3eA + \tfrac{1}{2}Cnt)\sin(nt+\varepsilon)],$$
$$s = (a\gamma - \tfrac{1}{2}F\delta\mu' nt)\sin(nt+\theta) + (2\gamma A + \tfrac{1}{2}E)\delta\mu' nt\cos(nt+\theta);$$

et les deux dernières peuvent être mises sous la forme

$$r = a\left\{1 - A\delta\mu' + a(e + \tfrac{1}{2}\delta\mu' Dnt)\cos\left[nt\left(1 + 3A\delta\mu' + \frac{C}{2e}\delta\mu'\right) + \varepsilon\right]\right\},$$
$$s = (a\gamma - \tfrac{1}{2}F\delta\mu' nt)\sin\left[nt\left(1 + 2A\delta\mu' + \frac{E\delta\mu'}{2\gamma}\right) + \theta\right],$$

puisqu'elles se réduisent aux précédentes lorsqu'on développe les sinus et cosinus composés, d'après les séries de la page 112, en se bornant à la première puissance de la masse perturbatrice.

Si l'on compare maintenant ces valeurs à celles du mouvement elliptique, on voit que l'orbite troublée peut être regardée comme une ellipse à élémens variables, dont la distance moyenne est $a(1 - A\delta\mu')$, la partie uniforme du moyen mouvement est $nt(1 + 2A\delta\mu')$, et l'accélération de ce moyen mouvement est $\frac{3}{4}a^2\delta\mu'(B - eD)n^2t^2$, quantité qui, après un nombre i de révolutions, et lorsqu'on a $nt = i.360°$, devient, en substituant au carré de 360° son produit par le rapport de la circonférence au rayon, $\frac{3}{2}a^2\delta\mu'\frac{355}{113}(B - eD)i^2.360°$.

On voit de même que l'accroissement de l'excentricité, ou de la moitié du coefficient de l'équation du centre, sera $\frac{1}{2}aD\delta\mu' nt$, et que la diminution de l'inclinaison sera $\frac{1}{2}F\delta\mu' nt$. Enfin, si l'on met à part sous les signes périodiques la partie $nt(1 + 2A\delta\mu')$, qui appartient au moyen mouvement, on trouve $\left(A + \frac{C}{2e}\right)\delta\mu' nt$ et $\frac{E\delta\mu'}{2\gamma}nt$, pour exprimer les accroissemens de ε et de θ; d'où l'on conclut, en se rappelant ce que représentent ces angles, et en supposant que A′ ne varie pas, que ces quantités prises avec un signe contraire, donnent les accroissemens des longitudes de l'aphélie et du nœud.

Le terme qui est affecté de la masse perturbatrice dans l'expression du demi-grand axe et dans celle du moyen mouvement, indique que, quoique dans le mouvement troublé le premier élément reste constant, et le second uniforme, leurs quantités ne sont pas les mêmes qu'elles seraient dans le mouvement elliptique; mais il est inutile de tenir compte de cette différence, lorsqu'on emploie dans le calcul les valeurs apparentes de ces élémens telles que les donnent les observations, c'est-à-dire déjà modifiées par l'action mutuelle. C'est pour cela que nous avons vu, pag. 133, Euler négliger une inégalité considérable qui provenait de l'intégration des équations du mouvement troublé, comme étant comprise dans le moyen mouvement observé, et que M. Laplace a supprimé ici dans son expression analytique du rayon vecteur le terme $-aA\delta\mu'$.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

TROISIÈME PARTIE.

ÉLÉMENS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES MOUVEMENS DES PLANÈTES ET DES SATELLITES,

ABSTRACTION FAITE DE LEUR FIGURE.

Après avoir cherché à faire l'analyse historique des principaux travaux des géomètres du 18e siècle sur les mouvemens de translation de la Lune et des planètes, nous allons reprendre la partie analytique de cette théorie, en suivant les méthodes les plus nouvelles, et en cherchant à les présenter avec la simplicité et la brièveté qu'elles comportent. Nous exposerons d'abord en peu de mots le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement; nous indiquerons ensuite comment on peut y ramener le problème relatif à un nombre quelconque de corps, en regardant l'orbite troublée comme changeant à chaque instant d'espèce et de position. Nous développerons les propriétés de la fonction perturbatrice, et la marche qu'il faut suivre pour calculer les variations périodiques et séculaires de tous les élémens. Enfin, après avoir démontré les théorèmes généraux les plus remarquables qui ont lieu dans les mouvemens des planètes, de la Lune et des satellites de Jupiter, nous terminerons cette exposition par l'indication rapide des sources où nous avons puisé pour l'écrire.

CHAPITRE PREMIER.

Équations générales. Mouvement elliptique.

Considérons un système de corps sphériques, qui s'attirent mutuellement en raison directe de leurs masses M, m, m', m'', etc., et en raison inverse du carré des distances; et supposons les corps m, m', m'', etc., en mouvement autour de M. Soient $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, etc., les coordonnées des corps m, m', m'', etc., au bout du temps t, en prenant le centre du corps M pour origine; r, r', r'', etc., leurs distances à ce point, et ρ, ρ', etc., les distances mutuelles des centres des corps m et m', m et m'', etc.: les formules (B), de la page 122, deviennent, en les étendant à un nombre quelconque de corps, et en adoptant les notations précédentes : Équations générales du mouvement.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{M+m}{r^3}x = m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + m''\left(\frac{x''-x}{\rho'^3} - \frac{x''}{r''^3}\right) + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{M+m}{r^3}y = m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + m''\left(\frac{y''-y}{\rho'^3} - \frac{y''}{r''^3}\right) + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{M+m}{r^3}z = m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + m''\left(\frac{z''-z}{\rho'^3} - \frac{z''}{r''^3}\right) + \text{etc.},$$

ce sont les équations générales du mouvement relatif du corps m autour de M.

Or l'on a

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \rho=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},\ r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\ \text{etc.};$$

ce qui donne $\dfrac{d.\frac{1}{\rho}}{dx}=\dfrac{x'-x}{\rho^3},\ \dfrac{d.\frac{xx'}{r'^3}}{dx}=\dfrac{x'}{r'^3},\ \dfrac{d.\frac{1}{\rho}}{dy}=\dfrac{y'-y}{\rho^3},\ \dfrac{d.\frac{xx'+yy'}{r'^3}}{dy}=\dfrac{y'}{r'^3}$, etc.;

si l'on suppose donc

$$\Omega=m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)+m''\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{xx''+yy''+zz''}{r''^3}\right)+\text{etc.};$$

les équations précédentes se réduisent, en faisant $M+m=\mu$, à

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{d\Omega}{dx},\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=\frac{d\Omega}{dy},\quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{d\Omega}{dz}\ \ldots\ldots(A)$$

et les valeurs de r, r', ρ, etc., donnent aussi

$$\Omega=m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{r^2+r'^2-\rho^2}{2r'^3}\right)+m''\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{r^2+r''^2-\rho'^2}{2r''^3}\right)+\text{etc.}$$

On peut obtenir autant d'équations semblables pour déterminer le mouvement de chacun des corps m', m'', etc., et elles se déduisent immédiatement de celles qui sont relatives à m, en y changeant m, x, y, z, r en m', x', y', z', r', *et vice versâ*, etc. Leur intégration rigoureuse étant impossible, par les méthodes connues, on est obligé de recourir à des procédés d'approximation pour les résoudre. On peut cependant, ainsi que nous l'avons déjà vu, parvenir à quatre intégrales premières de ce système d'équations. Nous ne rapporterons que celle qui tient au principe des forces vives, qui nous sera utile par la suite, et nous ne supposerons, pour plus de simplicité, que trois corps m, m' et M.

Intégrale des forces vives. Les deux premières équations du mouvement des corps m et m' étant alors

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3}+\left(\frac{mx}{r^3}+\frac{m'x'}{r'^3}\right)-\frac{m'(x'-x)}{\rho^3}=0,$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{Mx'}{r'^3}+\left(\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{mx}{r^3}\right)-\frac{m(x-x')}{\rho^3}=0,$$

si l'on multiplie la première par $2mdx-2m\dfrac{mdx+m'dx'}{M+m+m'}$, la seconde par $2m'dx'-2m'\dfrac{mdx+m'dx'}{M+m+m'}$, et qu'on ajoute les résultats : les produits des derniers termes des équations par les seconds termes des facteurs se détruiront identiquement; la somme des produits des seconds et troisièmes termes des équations, par les seconds termes des facteurs, sera égale et de signe contraire à la somme des produits des troisièmes termes des équations par le premier terme des facteurs. On aura donc simplement

$$m\frac{2dxd^2x}{dt^2}+m'\frac{2dx'd^2x'}{dt^2}-\frac{2(mdx+m'dx')(md^2x+m'd^2x')}{(M+m+m')dt^2}$$
$$+M\left(\frac{2mxdx}{r^3}+\frac{2m'x'dx'}{r'^3}\right)+\frac{2mm'(x'-x)(dx'-dx)}{\rho^3}=0.$$

Les équations qui se rapportent aux coordonnées y, y', z, z' donneront deux relations

analogues; et on aura, en les ajoutant à la précédente et en intégrant,

$$m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}$$

$$-\frac{(mdx+m'dx')^2+(mdy+m'dy')^2+(mdz+m'dz')^2}{(M+m+m')\,dt^2}-2\left[M\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}\right)+\frac{mm'}{\rho}\right]=C,$$

C étant une constante. On tire de là, en multipliant par $M+m+m'$, et en réduisant,

$$M\left(m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}\right)$$

$$+mm'\frac{(dx-dx')^2+(dy-dy')^2+(dz-dz')^2}{dt^2}$$

$$-2(M+m+m')\left[M\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}\right)+\frac{mm'}{\rho}\right]=C.$$

Comme dans le système du monde, la masse M du corps central est toujours très considérable par rapport aux masses des autres corps, on peut d'abord, dans la détermination du mouvement de m, supposer $m'=0$, $m''=0$, etc., ce qui réduit les équations (A) à celles-ci : Mouvement elliptique.

$$(1)\ldots\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0,\quad (2)\ldots\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=0,\quad (3)\ldots\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=0,$$

qui donnent, comme les équations générales, quatre intégrales premières.

En effet, si l'on multiplie (1) par dx, (2) par dy, (3) par dz, qu'on ajoute et qu'on intègre avec une constante arbitraire h, on obtient l'équation des forces vives Intégrales des forces vives et des aires.

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}=h,\quad \text{ou}\quad \frac{1}{2}\frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}=h\ldots(a),$$

en désignant par dv l'angle décrit par le rayon vecteur r dans l'instant dt.

On obtient aussi, en multipliant (2) par x, (1) par y, en retranchant et en intégrant,

$$\frac{xdy-ydx}{dt}=k';\quad \text{et on a de même}\quad \frac{zdx-xdz}{dt}=k'',\quad \frac{ydz-zdy}{dt}=k''':$$

k', k'', k''' étant des constantes arbitraires qui représentent le double des aires décrites, dans l'unité de temps, par les projections du rayon vecteur sur les trois plans des coordonnées.

Si l'on multiplie les trois équations précédentes respectivement par z, y et x, et qu'on les ajoute, on obtient

$$k'z+k''y+k'''x=0,$$

équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées, qui prouve que la trajectoire est une courbe plane.

Soit k le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur lui-même, on a, d'après la théorie des projections, $k^2=k'^2+k''^2+k'''^2$; et comme l'équation des aires a lieu sur un plan quelconque, on a aussi sur le plan de l'orbite, en exprimant en coordonnées polaires le petit secteur décrit dans l'instant dt, la relation

$$r^2dv=kdt\ldots(b).$$

qui exprime que le rayon vecteur décrit des aires proportionnelles au temps.

Si l'on élimine dt entre les équations (a) et (b), on obtient, en faisant $\frac{1}{r} = z$,

$$dv = \frac{kdz}{\sqrt{2h + 2\mu z - k^2z^2}},$$ équation différentielle de la trajectoire.

Le signe de z^2 indique que l'intégrale de la valeur de dv est une fonction circulaire. Supposons, pour la trouver, $2h + 2\mu z - k^2z^2 = a - q^2$, a étant une constante, et q une fonction linéaire de z : on a, en différenciant cette équation, et en remarquant qu'on doit avoir $\frac{dq}{dz} = k$ pour que les dérivées du second ordre de chaque membre soient identiques,

$$\mu - k^2z = -qk; \quad \text{d'où} \quad q^2 = \left(\frac{\mu - k^2z}{k}\right)^2, \quad a = \frac{\mu^2 + 2hk^2}{k^2},$$

ce qui prouve qu'on peut réduire la valeur de dv à la forme

$$dv = \frac{k^2dz}{\sqrt{\mu^2 + 2hk^2 - (\mu - k^2z)^2}}.$$

On tire de là, en intégrant,

$$v = \varpi + \text{arc}\left(\cos = \frac{\mu - k^2z}{\sqrt{\mu^2 + 2hk^2}}\right),$$ ϖ étant une constante.

Équation de l'orbite.

Réciproquement, si l'on remet $\frac{1}{r}$ à la place de z, et qu'on tire la valeur de r, on aura

$$r = \frac{k^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2hk^2}\cos(v - \varpi)},$$

équation d'une section conique rapportée à son foyer.

Dans le cas actuel, on sait que le corps m doit décrire une courbe fermée ; ainsi, il faut que ce soit une ellipse dont M occupe un des foyers ; et comme l'équation polaire de l'ellipse est en général (*voyez* note 1, p. 97), $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(v - \varpi)}$,

en désignant par a et ae son demi-grand axe et son excentricité, et par v et ϖ les angles que font le rayon vecteur et la ligne du périhélie avec un axe fixe situé dans le plan de l'orbite : on a, en comparant ces deux équations, les relations $k = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$, $h = -\frac{\mu}{2a}$, qui déterminent les constantes h et k de l'intégration en fonction des élémens a et e du mouvement elliptique.

Si l'on élimine dv, au lieu de dt, entre les équations (a) et (b), on aura l'équation $\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{k^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2h$, qui donne, en mettant pour k et h leurs valeurs, et en tirant la valeur de dt, $dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{2ar - r^2 - a^2(1 - e^2)}}$.

Cette équation devient intégrable lorsqu'on y fait $r = a(1 - e\cos u)$, et elle donne alors, en supposant $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = n$, $ndt = (1 - e\cos u)\,du$,

d'où l'on tire, en intégrant, $nt + c = u - e\sin u$,

c étant une constante arbitraire, et u l'angle qu'on appelle *anomalie excentrique*.

La comparaison de cette équation avec l'équation (2) de la page 98, montre que dans le cas actuel, $nt + c$ est ce qu'on appelle l'*anomalie moyenne*, tandis que $v - \varpi$ est l'*anomalie vraie*. Si l'on égale la précédente valeur de r à celle que fournit l'équation polaire

de l'ellipse, on obtient une relation entre les anomalies vraie et excentrique, savoir, $\cos(v-\varpi) = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$, d'où l'on tire aisément l'équation (3) de la page 98.

On peut donc exprimer r et $v-\varpi$ en fonction de u; mais la relation qui a lieu entre u et nt étant transcendante, les valeurs de r et de v en fonction de l'anomalie moyenne et des élémens fournis directement par l'observation, ne peuvent être qu'approchées. Ainsi, quoique dans le cas du mouvement elliptique le problème de calcul intégral soit complètement résolu, il n'en est pas de même du problème astronomique. Cependant une circonstance particulière, savoir, la petitesse des excentricités des orbites de presque tous les corps de notre système, permet de développer les valeurs cherchées en séries très convergentes qui procèdent suivant les puissances de cet élément, et les sin. ou cos. des anomalies moyennes; on peut même y parvenir sans recourir à l'angle auxiliaire u, et nous allons en faire le calcul, en nous bornant au carré de l'excentricité.

Valeurs approchées du rayon vecteur et de la longitude sur le plan de l'orbite.

L'équation de l'ellipse donne d'abord, en la développant et en négligeant les e^3, etc.,

$$r^2 = a^2(1-e^2)^2[1 - 2e\cos(v-\varpi) + 3e^2\cos^2(v-\varpi)]$$
$$= a^2\sqrt{1-e^2}\,[1 - 2e\cos(v-\varpi) + \tfrac{3}{2}e^2\cos 2(v-\varpi)];$$

l'équation des aires $r^2dv = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,dt = a^2n\sqrt{1-e^2}\,dt$, donne, en y substituant cette valeur, et en intégrant, $v - 2e\sin(v-\varpi) + \frac{3}{4}e^2\sin 2(v-\varpi) = nt + \varepsilon$.

La constante ε est la valeur de v quand $t=0$, ou la *longitude de l'époque*; n est la *vitesse angulaire* dans l'unité de temps; et l'angle $nt+\varepsilon$ étant ce que devient v quand $e=0$, représente le mouvement uniforme d'un corps tournant autour de M dans une orbite circulaire: c'est ce qu'on nomme la *longitude moyenne*, par opposition à v, qui est la *longitude vraie* dans l'orbite.

Si l'on substitue dans le second membre de l'équation

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin(v-\varpi) - \tfrac{3}{4}e^2\sin 2(v-\varpi),$$

la valeur de v quand $e=0$, en se bornant à la première puissance de e, on a $v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi)$; la substitution de cette dernière valeur, dans le second terme de l'équation, et de la précédente dans le troisième, donne ensuite

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin[nt+\varepsilon-\varpi + 2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi)] - \tfrac{3}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\varpi),$$

d'où l'on tire, en développant, et en se bornant aux e^2, la valeur cherchée

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\varpi).$$

L'angle $nt+\varepsilon-\varpi$, ou la longitude moyenne moins la longitude du périhélie étant ce que nous avons désigné plus haut par $nt+c$, on tire de là $c = \varepsilon - \varpi$.

Si l'on substitue la valeur de v de l'ordre e dans l'équation de l'ellipse, on obtient

$$r = a(1-e^2)\{1 + e\cos[nt+\varepsilon-\varpi + 2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi)]\}^{-1},$$

ou en développant et réduisant, en se bornant aux e^2,

$$r = a[1 + \tfrac{1}{2}e^2 - e\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2(nt+\varepsilon-\varpi)].$$

On voit que dans les termes périodiques des expressions de r et de v, le numéro du multiple de $nt+\varepsilon-\varpi$ est le même que l'exposant de la puissance de e qui multiplie le sinus ou cosinus de ce multiple. Cela tient à ce que ces termes proviennent de la réduction des puissances de e sin ou cos $(nt+\varepsilon-\varpi)$ en multiples, et à ce que, dans

cette réduction, le plus haut multiple qui puisse être produit est égal, d'après la théorie de la multisection des angles, à l'exposant même de la puissance, et, dans ce cas par conséquent, à l'exposant qu'acquiert l'excentricité e. Si l'on voulait pousser plus loin ces développemens, la réduction, opérée pour les puissances supérieures, amènerait les sin. ou cos. de tous les multiples inférieurs, savoir, ceux de numéro pair si l'exposant était pair, et ceux de numéro impair si l'exposant était impair ; et si l'on rassemblait les résultats, les coefficiens des sin. ou cos. de chaque multiple pair formeraient une série ascendante composée des seules puissances paires de l'excentricité, ou réciproquement, et dont le premier terme aurait toujours pour exposant le numéro même du multiple ; de manière qu'en s'arrêtant aux e^4, par exemple, on pousserait l'approximation aussi loin, pour les termes dont les multiples sont pairs, que si l'on allait jusqu'aux e^3. On peut aussi démontrer *à priori*, que les développemens doivent avoir cette forme, pour que les valeurs de r et de v ne changent pas de forme, selon qu'on place l'origine des anomalies au périhélie, ou à l'aphélie. (Voyez *Méc. cél.*, t. I, page 181).

Position du plan de l'orbite. Quant à la détermination de la position du plan de l'orbite, par rapport à un plan fixe : soit γ l'*inclinaison* du premier plan au-dessus du plan des xy, et α la *longitude du nœud ascendant*, ou l'angle que fait avec l'axe des x la ligne d'intersection de ces deux plans, compté dans le sens qui va des x positifs aux y positifs ; les formules (5) et (7) de la page 69, auxquelles on peut parvenir par l'intégration, ainsi que nous l'avons vu pour la seconde, page 155, servent à déterminer la *longitude* du mobile comptée sur le plan fixe, et sa *latitude* au-dessus de ce plan, lorsqu'on connaît la longitude sur le plan de l'orbite, l'inclinaison et la position de la ligne des nœuds.

Fig. 17. Soit m le mobile, et b sa projection sur le plan des xy; menons du centre C comme origine, les coordonnées rectangulaires Ca, ab, bm, parallèles aux trois axes CX, CY, CZ; abaissons les perpendiculaires md et bd sur la ligne des nœuds CN, nous aurons

$$mbd = \gamma, \quad XCN = \alpha, \quad z = mb = bd \operatorname{tang}\gamma, \quad bd = ob \cos\alpha = (y - x \operatorname{tang}\alpha)\cos\alpha;$$

d'où l'on tire l'équation du plan de l'orbite $z = y \operatorname{tang}\gamma \cos\alpha - x \operatorname{tang}\gamma \sin\alpha$.

Nous avons déjà trouvé pour ce même plan l'équation $k'z + k''y + k'''x = 0$: et comme l'on a $k' = k\cos\gamma$, la comparaison de ces deux équations donne...........
$k'' = -k \sin\gamma \cos\alpha$, $k''' = k \sin\gamma \sin\alpha$; ainsi puisque k'' et k''' sont les projections de k sur les plans des xz et des yz, on voit que les cosinus des inclinaisons de ces plans, avec celui de l'orbite, ont pour expressions $-\sin\gamma\cos\alpha$, et $\sin\gamma\sin\alpha$.

Transformation des coordonnées. On peut transformer les coordonnées x, y, z en deux autres p et q, situées sur le plan de l'orbite, et rapportées à deux axes rectangulaires CP et CQ, passant par l'origine, et dont le premier, dirigé suivant la ligne du périhélie, fasse un angle PCN $= \zeta$ avec la ligne des nœuds.

En effet, si l'on désigne par A, A′, A″ les cosinus des angles que font les axes CX, CY, CZ avec l'axe CP, et par B, B′, B″ ceux qui se rapportent à l'axe CQ, on aura, d'après les formules connues,

$$x = Ap + Bq, \quad y = A'p + B'q, \quad z = A''p + B''q.$$

Or, si l'on considère la pyramide triangulaire CXNP, dont le sommet est en C, et où l'on a XCN $= \alpha$, PCN $= \zeta$, XNP $= 180° - \gamma$, on aura, d'après la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique,

$$A = \cos PCX = \cos\alpha \cos\zeta - \sin\alpha \sin\zeta \cos\gamma;$$

et de là, en changeant ζ en $90° + \zeta$, $B = \cos QCX = -\cos\alpha \sin\zeta - \sin\alpha \cos\zeta \cos\gamma$;
la pyramide CYPN, où $NCY = 90° - \alpha$, donne de même

$$A' = \cos PCY = \sin\alpha \cos\zeta + \cos\alpha \sin\zeta \cos\gamma,$$

et de là, en changeant ζ en $90° + \zeta$, $B' = \cos QCY = -\sin\alpha \sin\zeta + \cos\alpha \cos\zeta \cos\gamma$;
enfin la pyramide CZPN, où l'angle plan ZCN est droit, et où l'angle dièdre $PNZ = 90° - \gamma$,
donne $A'' = \cos PCZ = \sin\zeta \sin\gamma$, et de là $B'' = \cos QCZ = \cos\zeta \sin\gamma$.

Quant aux valeurs de p et de q, comme l'on a dans le plan de l'orbite $mCP = v - \varpi$, on tire de là $p = r\cos(v - \varpi)$, $q = r\sin(v - \varpi)$, ou en mettant pour les seconds membres leurs expressions en fonction de l'anomalie excentrique,

$$p = a(\cos u - e), \quad q = a\sqrt{1 - e^2}\sin u.$$

Ces équations servent à déterminer x, y, z en fonction des élémens et de l'anomalie excentrique, et elles font voir que l'on peut, au moyen de la relation qui lie les anomalies moyenne et excentrique, développer aussi les valeurs de ces coordonnées en fonction des sinus et cosinus de l'angle $nt + c$.

On voit, en résumant ce qui précède, qu'on peut regarder les six quantités a, e, ϖ, α, γ, ε comme étant des constantes qui proviennent de l'intégration des équations du mouvement elliptique, et que c'est de la valeur du moyen mouvement nt, jointe à celle de ces six élémens, dont le premier est une ligne, le second un nombre, et dont les quatre autres sont des angles comptés à partir de lignes fixes, que dépendent la détermination du lieu du mobile, de la nature et de la position de son orbite.

CHAPITRE II.

Mouvement troublé. Variations des élémens.

AVANT de revenir à la considération du mouvement troublé, nous allons établir une proposition importante, relative aux constantes arbitraires qui proviennent de l'intégration des équations du mouvement elliptique. *Lemme fondamental sur la variation des constantes arbitraires.*

Supposons, pour cet effet, $\frac{dx}{dt} = x_1$, $\frac{dy}{dt} = y_1$, $\frac{dz}{dt} = z_1$; x_1, y_1, z_1 étant ainsi les composantes, parallèles aux trois axes, de la vitesse du corps m au bout du temps t; désignons aussi par V l'intégrale de l'expression de la force du corps central M, regardé comme immobile, sur le corps m, multipliée par l'élément de sa direction, en sorte qu'on ait

$$V = \int \frac{\mu dr}{r^2} = -\frac{\mu}{r}.$$

Les équations (1), (2), (3) de la pag. 219, où l'élément du temps est regardé comme constant, et où les variables x, y, z sont indépendantes entre elles, deviendront alors

$$dx_1 + \frac{dV}{dx}dt = 0, \quad dy_1 + \frac{dV}{dy}dt = 0, \quad dz_1 + \frac{dV}{dz}dt = 0 \quad \ldots.(c).$$

Supposons-les intégrées avec six constantes arbitraires, que nous désignerons généralement par les lettres a, b, c, e, f, g : la substitution des valeurs qui en résultent pour les variables, dans ces mêmes équations, devra rendre celles-ci identiques; le temps

et les constantes devront se détruire, sans prendre de valeurs particulières, pour que les équations soient satisfaites. Puis donc que les constantes doivent demeurer arbitraires, on peut les faire varier, et il est permis de différencier les équations du mouvement, par rapport à une ou plusieurs d'entre elles, sans que ces équations cessent d'avoir lieu.

Désignons par δ une espèce de variations des constantes arbitraires, et par Δ des variations différentes des mêmes constantes, en conservant la caractéristique d pour exprimer la variation par rapport au temps t. Comme x, y, z sont des fonctions supposées connues de t, a, b, c, e, f, g, l'on a

$$\delta x = \frac{dx}{da}\delta a + \frac{dx}{db}\delta b + \frac{dx}{dc}\delta c + \frac{dx}{de}\delta e + \frac{dx}{df}\delta f + \frac{dx}{dg}\delta g,$$
$$\Delta x = \frac{dx}{da}\Delta a + \frac{dx}{db}\Delta b + \frac{dx}{dc}\Delta c + \frac{dx}{de}\Delta e + \frac{dx}{df}\Delta f + \frac{dx}{dg}\Delta g,$$

et ainsi de suite.

Faisons varier successivement la première des équations (c) par rapport à δ et à Δ, et retranchons le second résultat, multiplié par δx, du premier multiplié par Δx, nous aurons, en remarquant qu'on a en général $\delta.du = d.\delta u$, $\Delta.du = d.\Delta u$:

$$\Delta x d.\delta x_{,} - \delta x d.\Delta x_{,} + \Delta x \delta.\frac{dV}{dx} - \delta x \Delta.\frac{dV}{dx} = 0.$$

Or, on a $\Delta x d.\delta x_{,} = d(\Delta x \delta x_{,}) - \delta x_{,} d.\Delta x$, $\delta x d.\Delta x_{,} = d(\delta x \Delta x_{,}) - \Delta x_{,} d.\delta x$;

on a aussi, par la nature de $x_{,}$, et des variations Δ et δ:

$$d.\Delta x = \Delta x_{,} dt, \quad d.\delta x = \delta x_{,} dt,$$

ce qui réduit l'équation précédente à $d(\Delta x \delta x_{,} - \delta x \Delta x_{,}) + \Delta x \delta.\frac{dV}{dx} - \delta x \Delta.\frac{dV}{dx} = 0$;

et comme les variations des équations relatives à y et z donnent de semblables relations, on a, en les réunissant,

$$d(\Delta x \delta x_{,} - \delta x \Delta x_{,} + \Delta y \delta y_{,} - \delta y \Delta y_{,} + \Delta z \delta z_{,} - \delta z \Delta z_{,})$$
$$+ \Delta x \delta.\frac{dV}{dx} - \delta x \Delta.\frac{dV}{dx} + \Delta y \delta.\frac{dV}{dy} - \delta y \Delta.\frac{dV}{dy} + \Delta z \delta.\frac{dV}{dz} - \delta z \Delta.\frac{dV}{dz} = 0.$$

La quantité V étant une simple fonction des coordonnées x, y, z, ne contient les constantes qu'autant qu'elles entrent dans les valeurs de x, y, z, ce qui donne

$$\delta.\frac{dV}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2}\delta x + \frac{d^2V}{dxdy}\delta y + \frac{d^2V}{dxdz}\delta z, \quad \Delta.\frac{dV}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2}\Delta x + \text{etc.},$$

et ainsi de suite. Ces valeurs font voir que tous les termes de la seconde ligne de l'équation précédente se détruisent mutuellement; et on tire de là, en intégrant l'autre partie, la relation cherchée

$$\Delta x \delta x_{,} - \delta x \Delta x_{,} + \Delta y \delta y_{,} - \delta y \Delta y_{,} + \Delta z \delta z_{,} - \delta z \Delta z_{,} = \text{const.}$$

Ainsi la fonction des variations des coordonnées et des vitesses, prises par rapport aux constantes arbitraires, qui forme le premier membre de cette équation, jouit de cette propriété singulière, qu'en y substituant les valeurs des variables exprimées par le temps et par les constantes arbitraires, elle doit devenir indépendante du temps, et ne plus contenir que ces mêmes constantes, avec leurs différentielles premières.

Supposons maintenant qu'on ajoute respectivement aux seconds membres des trois



équations (c), les termes $\frac{d\Omega}{dx}dt$, $\frac{d\Omega}{dy}dt$, $\frac{d\Omega}{dz}dt$, afin de rendre ces équations analogues à celles du mouvement troublé (A); on pourra (*voyez* pag. 119 et 185) satisfaire à la totalité de ces équations, au moyen des expressions de x, y, z, en fonction du temps et des constantes arbitraires, qui proviennent de l'intégration des équations sans dernier terme, pourvu qu'on rende variables ces constantes arbitraires; mais celles-ci étant en nombre double de celui des variables, et des équations auxquelles il faut satisfaire, on pourra les assujétir de plus à un nombre de conditions arbitraires égal à celui de ces variables.

Réduction du mouvement troublé au mouvement elliptique.

Les conditions les plus simples et les plus convenables, sont que les valeurs de x_i, y_i, z_i conservent aussi la même forme que si les constantes ne variaient pas; c'est-à-dire qu'on ait, en désignant par δ la variation par rapport à toutes les constantes arbitraires, les équations $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$. De cette manière, non-seulement les espaces parcourus par les corps, mais encore leurs vitesses, seront déterminés par des formules semblables, soit qu'on considère ou non l'action des forces perturbatrices; l'ellipse variable deviendra osculatrice de la véritable orbite du mobile, et les équations différentielles entre les nouvelles variables seront en nombre double, mais du premier ordre seulement. Nous avons déjà posé les trois premières; il en résulte que les différentielles secondes de x, y, z, par rapport au temps, seront augmentées lorsque les constantes deviendront variables, des seuls termes δx_i, δy_i, δz_i. Si l'on substitue leurs valeurs complètes dans les équations du mouvement troublé : comme la partie des premiers membres de ces équations, qui ne provient pas de la variation des constantes, a lieu séparément, puisque les équations (c) se vérifient identiquement, quelles que soient les valeurs des constantes, l'autre partie doit satisfaire aussi au reste des équations; d'ailleurs V, qui est une fonction des coordonnées et non des vitesses, ne prend pas d'accroissement quand les constantes deviennent variables; on a donc simplement

$$\delta x_i = \frac{d\Omega}{dx}dt, \quad \delta y_i = \frac{d\Omega}{dy}dt, \quad \delta z_i = \frac{d\Omega}{dz}dt;$$

équations qui donnent, en les ajoutant, après les avoir respectivement multipliées par Δx, Δy, Δz,

$$\Delta x\delta x_i + \Delta y\delta y_i + \Delta z\delta z_i = \left(\frac{d\Omega}{dx}\Delta x + \frac{d\Omega}{dy}\Delta y + \frac{d\Omega}{dz}\Delta z\right)dt = \Delta\Omega dt.$$

On tire de là, en retranchant du premier membre la quantité $\delta x\Delta x_i + \delta y\Delta y_i + \delta z\Delta z_i$, qui est identiquement nulle, en vertu des équations $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$:

$$\Delta\Omega dt = \Delta x\delta x_i - \delta x\Delta x_i + \Delta y\delta y_i - \delta y\Delta y_i + \Delta z\delta z_i - \delta z\Delta z_i;$$

Propriété de la fonction perturbatrice.

et le second membre de cette équation étant précisément la même fonction que nous avons vue être constante ou indépendante du temps, on voit que la fonction Ω des masses et des distances, dont les différentielles partielles expriment les composantes des forces perturbatrices, a aussi la propriété remarquable que sa variation, par rapport aux seules constantes arbitraires, est indépendante du temps : de telle manière, qu'après avoir substitué dans son expression les valeurs de x, y, z en fonction du temps et des constantes arbitraires, on peut y faire t nul ou égal à une valeur quelconque.

Soient donc α, β, γ, λ, μ, ν les valeurs de x, y, z, $x_{\imath}$, $y_{\imath}$, $z_{\imath}$ quand $t=0$: on pourra les substituer dans le second membre de l'équation précédente, qui se réduira ainsi à la forme

$$\Delta\Omega dt = \Delta\alpha\delta\lambda - \delta\alpha\Delta\lambda + \Delta\beta\delta\mu - \delta\beta\Delta\mu + \Delta\gamma\delta\nu - \delta\gamma\Delta\nu.$$

Variations des coordonnées et des vitesses initiales.

Particularisons maintenant Δ, et supposons d'abord qu'il désigne une variation par rapport à α seul, en sorte qu'on ait $\Delta\lambda=0$, $\Delta\beta=0$, etc. : nous aurons alors simplement

$$\frac{d\Omega}{d\alpha}\Delta\alpha dt = \Delta\alpha\delta\lambda, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \delta\lambda = \frac{d\Omega}{d\alpha}dt;$$

le second membre de cette équation étant une fonction de l'élément du temps, on voit que la variation marquée par la caractéristique δ, peut maintenant être rapportée également au temps t; ainsi il est permis et même convenable de changer le δ en d, ce qui donne

$$d\lambda = \frac{d\Omega}{d\alpha}dt.$$

Les mêmes considérations, appliquées successivement aux variations de β, γ, λ, μ, ν, donnent aussi

$$d\mu = \frac{d\Omega}{d\beta}dt, \quad d\nu = \frac{d\Omega}{d\gamma}dt, \quad d\alpha = -\frac{d\Omega}{d\lambda}dt, \quad d\beta = -\frac{d\Omega}{d\mu}dt, \quad d\gamma = -\frac{d\Omega}{d\nu}dt;$$

équations qui, étant jointes à la précédente, peuvent servir à déterminer d'une manière bien simple les variations des coordonnées et des vitesses initiales, dues à l'action des forces perturbatrices.

Expressions générales des variations de Ω en fonction de celles des élémens.

Cependant comme l'usage astronomique, de même que l'intégration, introduisent, comme nous l'avons vu, d'autres constantes arbitraires, savoir, les six élémens du mouvement elliptique, ce sont leurs variations dont il faut obtenir les expressions, et on peut y parvenir aisément, au moyen des équations précédentes, en regardant ces élémens comme des fonctions de α, β, γ, λ, μ, ν, ainsi qu'ils doivent l'être nécessairement.

En effet, désignons, comme au commencement de ce chapitre, ces élémens par les lettres a, b, c, e, f, g, on a alors

$$\frac{d\Omega}{da}dt = \left(\frac{d\Omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\Omega}{d\beta}\frac{d\beta}{da} + \frac{d\Omega}{d\gamma}\frac{d\gamma}{da} + \frac{d\Omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{da} + \frac{d\Omega}{d\mu}\frac{d\mu}{da} + \frac{d\Omega}{d\nu}\frac{d\nu}{da}\right)dt,$$

ou en mettant pour $\frac{d\Omega}{d\alpha}$, $\frac{d\Omega}{d\beta}$, etc., leurs valeurs tirées des équations précédentes,

$$\frac{d\Omega}{da}dt = \frac{d\alpha}{da}d\lambda + \frac{d\beta}{da}d\mu + \frac{d\gamma}{da}d\nu - \frac{d\lambda}{da}d\alpha - \frac{d\mu}{da}d\beta - \frac{d\nu}{da}d\gamma;$$

on a d'ailleurs $$d\lambda = \frac{d\lambda}{da}da + \frac{d\lambda}{db}db + \frac{d\lambda}{dc}dc + \frac{d\lambda}{de}de + \frac{d\lambda}{df}df + \frac{d\lambda}{dg}dg,$$

et il en est de même pour les variations de toutes les autres constantes; si l'on suppose donc

$$\frac{d\alpha}{da}\frac{d\lambda}{db} - \frac{d\lambda}{da}\frac{d\alpha}{db} + \frac{d\beta}{da}\frac{d\mu}{db} - \frac{d\mu}{da}\frac{d\beta}{db} + \frac{d\gamma}{da}\frac{d\nu}{db} - \frac{d\nu}{da}\frac{d\gamma}{db} = [a,b]$$

$$\frac{d\alpha}{db}\frac{d\lambda}{da} - \frac{d\lambda}{db}\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\beta}{db}\frac{d\mu}{da} - \frac{d\mu}{db}\frac{d\beta}{da} + \frac{d\gamma}{db}\frac{d\nu}{da} - \frac{d\nu}{db}\frac{d\gamma}{da} = [b,a]$$

$$\frac{d\alpha}{da}\frac{d\lambda}{dc} - \frac{d\lambda}{da}\frac{d\alpha}{dc} + \frac{d\beta}{da}\frac{d\mu}{dc} - \frac{d\mu}{da}\frac{d\beta}{dc} + \text{etc.} = [a,c], \text{ et ainsi de suite,}$$

on aura $\frac{d\Omega}{da}dt = [a,b]db + [a,c]dc + [a,e]de + [a,f]df + [a,g]\,dg,$

$$\frac{d\Omega}{db}dt = [b,a]da + [b,c]dc + [b,e]de + [b,f]df + [b,g]\,dg,$$

etc.

Les coefficiens représentés par des lettres entre crochets carrés, sont, par leur nature, indépendans du temps; la valeur de ces symboles est nulle lorsque les deux lettres sont les mêmes, et elle change seulement de signe quand on y change l'ordre de ces lettres, en sorte qu'on a $[a,a] = 0$, $[b,a] = -[a,b]$, etc.

On voit ainsi que les expressions générales des différentielles partielles de la fonction Ω, par rapport à chacun des six élémens du mouvement elliptique, multipliées par l'élément du temps, sont données par la somme des différentielles des cinq autres élémens, multipliées par des coefficiens indépendans du temps, qui sont égaux et de signe contraire pour les élémens correspondans; de manière que si l'on représente par l le coefficient de db dans la valeur de $\frac{d\Omega}{da}dt$, $-l$ sera le coefficient de da dans la valeur de $\frac{d\Omega}{db}dt$, et ainsi de suite.

Une conséquence qui résulte de ces formules, c'est que la variation de la fonction Ω, en tant qu'elle dépend de celle de tous les élémens a, b, etc. du corps troublé, doit être nulle. En effet, si dans la différentielle complète $\frac{d\Omega}{da}da + \frac{d\Omega}{db}db +$ etc. de Ω par rapport aux élémens de m, on substitue les valeurs précédentes de $\frac{d\Omega}{da}$, etc., tous les termes se détruisent mutuellement. Ce résultat remarquable tient à ce qu'on peut supposer, ainsi que nous l'avons vu page 185, que l'orbite reste constante pendant l'instant dt, et qu'elle ne varie que d'un instant à l'autre.

Les formules précédentes donnent les valeurs des différentielles partielles de Ω, en fonction des variations des élémens, tandis que le problème proposé est inverse, puisqu'il consiste à déterminer les variations de chaque élément en fonction des forces perturbatrices; mais comme on doit prévoir que le calcul des coefficiens de chaque terme en fera disparaître un grand nombre, et qu'il suffira ensuite d'une simple élimination entre les équations définitives, pour obtenir les variations de chaque élément en particulier, on peut se servir des formules dont il s'agit pour la détermination cherchée, et cette marche, quoiqu'un peu indirecte, est la plus simple pour le calcul.

Ces formules, au nombre de six, contenant chacune les variations de cinq élémens, le nombre total des coefficiens qu'on doit déterminer est de trente; mais il suffit, d'après la remarque faite plus haut, d'en connaître la moitié, pour en conclure l'autre immédiatement par un simple changement de signe. Le calcul de ces quinze premiers coefficiens étant encore un peu long, on a cherché à le simplifier en déterminant directement quatre des équations dont on a besoin, au moyen des intégrales premières du problème, et nous allons exposer ce procédé d'après M. Poisson.

Recherche directe de quatre de ces variations.

Nous avons trouvé, dans le mouvement elliptique, les équations

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} = 2h, \qquad \frac{xdy - ydx}{dt} = k'.$$



Dans le cas du mouvement troublé, les seconds membres de ces équations, au lieu d'être nuls, sont $\int\left(\frac{d\Omega}{dx}dx+\frac{d\Omega}{dy}dy+\frac{d\Omega}{dz}dz\right)$ pour l'une, et $\int\left(x\frac{d\Omega}{dy}-y\frac{d\Omega}{dx}\right)dt$ pour l'autre. Pour exprimer que les équations ont la même forme dans les deux cas, il suffit de supposer que les constantes h et k' deviennent variables dans le second, par l'effet des forces perturbatrices, et de poser

$$dh=\frac{d\Omega}{dx}dx+\frac{d\Omega}{dy}dy+\frac{d\Omega}{dz}dz,\quad dk'=\left(x\frac{d\Omega}{dy}-y\frac{d\Omega}{dx}\right)dt.$$

On peut mettre ces valeurs sous une forme plus convenable, et y substituer les coordonnées polaires aux rectangulaires. En effet, la première est la différentielle complète de Ω par rapport aux coordonnées du corps troublé. Or, nous avons vu que ces coordonnées pouvaient être exprimées en fonction de la seule variable $nt+c$. Si donc on regarde comme constant le coefficient n qui multiplie t, supposition que nous vérifierons dans la suite, on aura simplement

$$\frac{d\Omega}{dx}dx+\frac{d\Omega}{dy}dy+\frac{d\Omega}{dz}dz=\frac{d\Omega}{ndt}ndt,$$

ce qui donnera, en remarquant que si R est une fonction de $nt+c$, on a en général,

$$\frac{dR}{ndt}=\frac{dR}{dc},\quad \text{l'équation.....}\quad dh=n\frac{d\Omega}{dc}dt.$$

Pour transformer d'une manière analogue la valeur de dk', il faut reprendre les expressions de x et y en fonction de p et de q, données à la fin du chapitre précédent, en y mettant pour A, B, etc., leurs valeurs. Elles donnent alors, en observant que p et q ne sont pas fonctions de α, $\frac{dx}{d\alpha}=-y$, $\frac{dy}{d\alpha}=x$; et comme l'on a, en regardant α comme fonction de x et de y, $\frac{d\Omega}{d\alpha}=\frac{d\Omega}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{d\Omega}{dy}\frac{dy}{d\alpha}$, on tire de là $\frac{d\Omega}{d\alpha}=x\frac{d\Omega}{dy}-y\frac{d\Omega}{dx}$.

On peut parvenir au même résultat sans recourir aux formules de la transformation des coordonnées, en remarquant que puisque $\frac{d\Omega}{dx}$ et $\frac{d\Omega}{dy}$ désignent les composantes des forces perturbatrices suivant les axes des x et des y, la quantité $x\frac{d\Omega}{dy}-y\frac{d\Omega}{dx}$ exprime le moment de ces forces autour de l'axe des z. Ce moment est indépendant de la coordonnée z, et il serait le même dans le cas où l'on aurait $z=0$, et où le mobile se trouverait sur la ligne des nœuds. Or on a, sur cette ligne, $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$; d'où l'on tire, en transformant les différentielles partielles (ainsi que nous l'avons déjà fait p. 126),

$$x\frac{d\Omega}{dy}-y\frac{d\Omega}{dx}=\frac{d\Omega}{d\alpha},\quad \text{et de là}\quad dk'=\frac{d\Omega}{d\alpha}dt.$$

Cette formule fait voir que la différentielle du double de l'aire décrite dans l'unité de temps par la projection du rayon vecteur sur le plan des xy, est égale au produit de l'élément du temps par le moment des forces perturbatrices autour de l'axe des z, ou par la différentielle partielle de Ω par rapport à l'angle α : angle dont le sommet est à l'origine, qui est situé dans le plan des xy, perpendiculaire à l'axe de rotation, et qui varie dans le mouvement autour de cet axe; et comme ce théorème a lieu, quel que

soit le plan que l'on considère, pourvu qu'il passe par l'origine des coordonnées, on peut en profiter pour obtenir deux nouvelles formules, sans recourir à la considération des deux dernières équations que donne le principe des aires.

En effet, si l'on prend le plan même de l'orbite pour celui sur lequel a lieu le mouvement, et ϖ pour angle variable : le moment des forces perturbatrices autour d'un axe perpendiculaire à ce plan sera $\frac{d\Omega}{d\varpi}$, l'aire élémentaire correspondante sera dk, et l'on aura par conséquent $dk = \frac{d\Omega}{d\varpi}\,dt$.

De même, si l'on considère le plan de l'angle γ, ou le plan mené par l'axe CZ et par une perpendiculaire CR au plan de l'orbite, le moment des forces perturbatrices sur ce plan sera $\frac{d\Omega}{d\gamma}$; on aura donc, en désignant par dg la projection de l'aire élémentaire dk sur ce plan, $dg = \frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt$, et il ne s'agira plus que de déterminer dg.

Or l'on sait, d'après la théorie des projections, qu'étant données celles d'une aire plane sur trois plans rectangulaires, on aura sa projection sur un autre plan passant aussi par l'origine, en prenant la somme des premières, respectivement multipliées par les cosinus des inclinaisons de ce plan aux trois plans coordonnés. Dans le cas actuel, une aire élémentaire est donnée, savoir dk ; ses projections sur les trois plans des xy, xz et yz sont dk', dk'', dk''' ; le premier plan est perpendiculaire au plan de l'angle γ, le second fait avec lui un angle complément de α, mais qui, étant situé du côté des y négatifs, doit être pris avec le signe $-$; enfin le plan des yz fait, avec le plan de l'angle γ, l'angle α ; on a par conséquent

$$dg = dk''\cos(\alpha - 90^\circ) + dk'''\cos\alpha = dk''\sin\alpha + dk'''\cos\alpha ;$$

et comme nous avons trouvé pag. 222, $\quad k'' = -k\sin\gamma\cos\alpha, \quad k''' = k\sin\gamma\sin\alpha$;
on tire de là

$$dg = -\sin\alpha[d(k\sin\gamma)\cos\alpha - k\sin\gamma\sin\alpha\, d\alpha] + \cos\alpha[d(k\sin\gamma)\sin\alpha + k\sin\gamma\cos\alpha\, d\alpha] = k\sin\gamma\, d\alpha,$$

ce qui donne enfin l'équation cherchée $k\sin\gamma\, d\alpha = \frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt$.

Rassemblons maintenant les formules précédentes, qui ont lieu pour une loi quelconque d'attraction, et substituons-y, pour h, k et k', leurs valeurs dans le cas du mouvement elliptique, savoir,

$$h = -\frac{\mu}{2a}, \quad k = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = a^2 n\sqrt{1-e^2}, \quad k' = k\cos\gamma ;$$

nous aurons $dh = \frac{\mu\, da}{2a^2} = \frac{an^2}{2}\,da, \quad dk' = dk\cos\gamma - k\sin\gamma\, d\gamma,$

$$dk = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1-e^2)}{a}}\,da - \sqrt{\frac{\mu a}{1-e^2}}\,e\,de = \frac{an}{2}\sqrt{1-e^2}\,da - \frac{a^2 ne}{\sqrt{1-e^2}}\,de ;$$

et de là $\frac{d\Omega}{dc}\,dt = \frac{an}{2}\,da,$

$$\frac{d\Omega}{d\varpi}\,dt = \frac{an}{2}\sqrt{1-e^2}\,da - \frac{a^2 ne}{\sqrt{1-e^2}}\,de, \quad \frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt = a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\gamma\, d\alpha ;$$

$$\frac{d\Omega}{d\alpha}\,dt = \frac{an}{2}\sqrt{1-e^2}\cos\gamma\, da - \frac{a^2 ne}{\sqrt{1-e^2}}\cos\gamma\, de - a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\gamma\, d\gamma.$$

Détermination des deux dernières équations, à l'aide des précédentes.

La loi que nous avons observée, p. 227, dans les expressions générales des différentielles partielles de Ω, nous permet de conclure presque immédiatement, de ces quatre équations, les deux dernières. En effet, puisque la valeur de $\frac{d\Omega}{dc}dt$ par exemple, contient le terme $\frac{an}{2}da$, celle de $\frac{d\Omega}{da}dt$ devra contenir le terme $-\frac{an}{2}dc$; la valeur de $\frac{d\Omega}{d\gamma}dt$ ne contenant point de terme multiplié par da, celle de $\frac{d\Omega}{da}dt$ ne renfermera pas non plus de terme en $d\gamma$; et ainsi de suite. On voit par là que les expressions des différentielles partielles de Ω, par rapport aux deux élémens a et e, seront de la forme

$$\frac{d\Omega}{da}dt = -\frac{an}{2}dc - \frac{an}{2}\sqrt{1-e^2}\,(d\zeta + \cos\gamma\, d\alpha) + [a,e]\,de,$$

$$\frac{d\Omega}{de}dt = \frac{a^2ne}{\sqrt{1-e^2}}(d\zeta + \cos\gamma\, d\alpha) - [a,e]\,da,$$

en désignant par $[a,e]$ le coefficient $\frac{dx}{da}\frac{dx_1}{de} - \frac{dx}{de}\frac{dx_1}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dy_1}{de} - \frac{dy}{de}\frac{dy_1}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dz_1}{de} - \frac{dz}{de}\frac{dz_1}{da}$, qui est le seul qui ne puisse pas être déterminé par les équations précédentes, et ne puisse l'être que par le calcul direct. Or, si l'on reprend les valeurs $x = Ap + Bq$, $y = A'p + B'q$, de la page 222; en remarquant que les cosinus A, B, A', B', etc. ne dépendent nullement de a ni de e, qui sont les dimensions de l'ellipse, et que l'on a d'ailleurs $A^2 + A'^2 + A''^2 = 1$, $B^2 + B'^2 + B''^2 = 1$, $AB + A'B' + A''B'' = 0$: on aura, en faisant $\frac{dp}{dt} = p_1$, $\frac{dq}{dt} = q_1$,

$$[a,e] = \frac{dp}{da}\frac{dp_1}{de} - \frac{dp}{de}\frac{dp_1}{da} + \frac{dq}{da}\frac{dq_1}{de} - \frac{dq}{de}\frac{dq_1}{da}.$$

Mais $p = a(\cos u - e)$, $q = a\sqrt{1-e^2}\sin u$, d'où l'on tire $p_1 = -a\sin u\frac{du}{dt}$, $q_1 = a\sqrt{1-e^2}\cos u\frac{du}{dt}$, ou en ayant égard à l'équation $ndt = (1 - e\cos u)du$ de la pag. 220 :

$$p_1 = -\frac{an\sin u}{1 - e\cos u},\quad q_1 = \frac{an\sqrt{1-e^2}\cos u}{1 - e\cos u}.$$

On voit par là que tous les termes du coefficient cherché auront $\sin u$ en facteur commun; et comme ce coefficient doit être indépendant du temps, on peut y supposer par exemple $nt = -c$, ce qui donne $u = 0$, et de là $[a,e] = 0$.

Transformation de variables.

Les équations précédentes sont maintenant en nombre suffisant pour la détermination cherchée; mais avant d'en tirer, par l'élimination, les variations des élémens, il faut substituer aux quantités c et ζ, introduites par l'intégration et par la théorie des momens, leurs valeurs en fonction des deux élémens ε et ϖ, qui désignent la longitude de l'époque, et la longitude du périhélie, comptées à partir d'une ligne fixe située dans le plan de l'orbite.

Nous avons trouvé pag. 221, $c = \varepsilon - \varpi$, ce qui donne $dc = d\varepsilon - d\varpi$. Quant à l'angle ϖ, qui est indépendant du lieu du nœud, son accroissement provient uniquement du mouvement du périhélie pendant l'instant dt; tandis qu'il est aisé de voir que celui de l'angle ζ, qui exprime la distance du périhélie à la ligne des nœuds, se compose du mouvement du périhélie, moins le mouvement du nœud sur le plan de l'orbite, ou de l'accroissement de l'angle ϖ, moins celui de α projeté sur le plan de l'orbite; on a donc $d\zeta = d\varpi - \cos\gamma\, d\alpha$. Or, si l'on considère alternativement Ω comme une fonction de c, ζ et α, ou de ε, ϖ et α, et qu'on désigne par $\left(\frac{d\Omega}{d\alpha}\right)$ sa différentielle par rapport à α, prise dans la première hypothèse,

on obtient l'équation identique,

$$\frac{d\Omega}{dc}\,dc+\frac{d\Omega}{d\zeta}\,d\zeta+\left(\frac{d\Omega}{d\alpha}\right)d\alpha=\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\,d\varepsilon+\frac{d\Omega}{d\varpi}\,d\varpi+\frac{d\Omega}{d\alpha}\,d\alpha;$$

ce qui donne, en mettant dans le premier membre, pour dc et $d\zeta$, leurs valeurs, et en comparant séparément les termes multipliés par $d\varepsilon$, $d\varpi$ et $d\alpha$,

$$\frac{d\Omega}{d\varepsilon}=\frac{d\Omega}{dc},\quad \frac{d\Omega}{d\varpi}=\frac{d\Omega}{d\zeta}-\frac{d\Omega}{dc},\quad \frac{d\Omega}{d\alpha}=\left(\frac{d\Omega}{d\alpha}\right)-\frac{d\Omega}{d\zeta}\cos\gamma.$$

Si l'on remet pour les seconds membres leurs valeurs, et qu'on substitue, dans les trois autres équations, celles de dc et de $d\zeta$, on aura le système de formules suivant :

$$\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\,dt=\frac{an}{2}\,da,\qquad \frac{d\Omega}{da}\,dt=-\frac{an}{2}\,d\varepsilon+\frac{an}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)d\varpi,$$

$$\frac{d\Omega}{de}\,dt=\frac{a^2ne}{\sqrt{1-e^2}}\,d\varpi,\quad \frac{d\Omega}{d\varpi}\,dt=-\frac{an}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)da-\frac{a^2ne}{\sqrt{1-e^2}}\,de,$$

$$\frac{d\Omega}{d\alpha}\,dt=-a^2n\sqrt{1-e^2}\,\sin\gamma\,d\gamma,\quad \frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt=a^2n\sqrt{1-e^2}\,\sin\gamma\,d\alpha;$$

d'où l'on tire, avec une grande facilité, les valeurs définitives des variations des six élémens, savoir :

Expressions des variations des six élémens du mouvement elliptique.

$$da=\frac{2}{an}\,\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\,dt,$$

$$d\varepsilon=-\frac{2}{an}\,\frac{d\Omega}{da}\,dt+\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\Omega}{de}\,dt,$$

$$de=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\Omega}{d\varepsilon}+\frac{d\Omega}{d\varpi}\right]dt,$$

$$d\varpi=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\,\frac{d\Omega}{de}\,dt,$$

$$d\alpha=\frac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2}\,\sin\gamma}\,\frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt,\quad d\gamma=-\frac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2}\,\sin\gamma}\,\frac{d\Omega}{d\alpha}\,dt.$$

On peut remarquer dans ces expressions la même symétrie, par rapport aux coefficiens, qui a lieu dans celles des différentielles partielles de Ω ; ainsi, la valeur de da, par exemple, contenant le terme $\frac{2}{an}\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\,dt$, réciproquement l'expression de $d\varepsilon$ renferme le terme $-\frac{2}{an}\frac{d\Omega}{da}\,dt$, dont le coefficient est le même et de signe contraire. Les deux dernières équations forment un groupe distinct, qui sert à déterminer les variations de l'inclinaison et du mouvement du nœud, et qui est indépendant des différentielles de Ω par rapport aux autres élémens.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à légitimer le procédé que nous avons suivi, en supposant que n ne varie pas lorsqu'on prend la différentielle de Ω par rapport à nt. Pour y parvenir, faisons varier n, et voyons ce qui en résultera dans la valeur de $d\varepsilon$. On voit d'abord que la différentielle de l'angle $nt+\varepsilon$ sera augmentée du terme tdn, qui devra faire partie de cette valeur ; d'un autre côté $\frac{d\Omega}{da}$ croîtra du terme $\frac{d\Omega}{dn}\frac{dn}{da}$, provenant de ce que n est fonction de a. Ainsi, pour passer du cas de n constant à celui de n variable, il faudra retrancher de la valeur de $d\varepsilon$ la quantité $tdn-\frac{2}{an}\frac{d\Omega}{dn}\frac{dn}{da}dt$; et comme on a, en ne faisant varier Ω que par rapport à n, $\frac{d\Omega}{dn}=t\frac{d\Omega}{dc}$, cette quantité

deviendra, en mettant pour $\frac{d\Omega}{dc}$ sa valeur donnée au bas de la pag. 229, $tdn - t\,\frac{dn}{da}da$; et elle sera nulle, puisque n n'étant fonction que de a, la différentielle dn est égale à $\frac{dn}{da}\,da$.

On voit par là qu'on peut, dans le mouvement troublé, ne pas différencier par rapport aux a qui entrent dans n, et supposer que l'anomalie moyenne est représentée par $\int ndt + c$ au lieu de $nt + c$; ce qui a l'avantage d'empêcher que le temps t ne sorte hors des signes sinus et cosinus, lorsque les quantités que l'on considère sont périodiques. Si l'on désigne alors par ζ le moyen mouvement $\int ndt$ dans le mouvement troublé, l'équation $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ donnera $dn = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,\frac{da}{a} = -\frac{3n}{2a}\,da = -\frac{3}{a^2}\,\frac{d\Omega}{d\epsilon}\,dt$, et l'on tire de là, pour la variation finie du moyen mouvement, qui provient des forces perturbatrices, et qui doit être ajoutée à la partie elliptique nt de cet élément :

Variation du moyen mouvement.

$$\delta\zeta = \int ndt = -3\iint \frac{1}{a^2}\,\frac{d\Omega}{d\epsilon}\,dt^2.$$

CHAPITRE III.

Développement de la fonction perturbatrice. Principes des approximations successives. Distinction entre les termes séculaires et les termes périodiques.

Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, de combien de belles propriétés jouissait la fonction Ω, qui peut être considérée en général comme l'intégrale, prise par rapport aux seules coordonnées du corps troublé, de la somme des composantes de toutes les forces perturbatrices, multipliées chacune par l'élément de sa direction. Reprenons maintenant la valeur de cette fonction, qui se rapporte à notre système planétaire, afin d'en examiner la nature, et d'indiquer par quels procédés on parvient à la développer convenablement.

Nous avons trouvé, page 218, dans le cas d'un corps m soumis à l'action des corps M, m', m'', etc. :

Nature de la fonction Ω.

$$\Omega = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + r'^2 - \rho^2}{2r'^3}\right) + m''\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{r^2 + r''^2 - \rho'^2}{2r''^3}\right) + \text{etc.};$$

et il s'agit de déterminer la valeur de ρ. Or, soit v' la longitude du corps m', comptée dans le plan de son orbite à partir d'un axe fixe, et V l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et r' : on aura, dans le triangle formé par ces rayons et par la distance mutuelle ρ des deux corps, $\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos V$;
et la question sera réduite à exprimer l'élongation V en fonction des longitudes v et v'.

Si l'on désigne pour cet effet par I l'inclinaison réciproque des plans des orbites de m et de m', par λ et λ' les angles que fait la ligne d'intersection de ces deux plans avec les axes fixes situés sur chacun d'eux ; la considération de la pyramide triangulaire, dont les trois arêtes sont les rayons r, r' et la ligne d'intersection, donnera

$$\cos V = \cos(v - \lambda)\cos(v' - \lambda') + \sin(v - \lambda)\sin(v' - \lambda')\cos I.$$

Si l'on prend l'axe fixe situé sur le plan de l'orbite de m', de telle manière qu'on ait $\lambda' = \lambda$, et qu'on substitue $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}I$ à $\cos I$, on aura, en développant,

$$\cos V = \cos(v' - v) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\,[\cos(v' + v - 2\lambda) - \cos(v' - v)];$$



d'où l'on tire, en faisant $\cos(v' + v - 2\lambda) - \cos(v' - v) = \Delta$;

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v) - 2rr' \sin^2 \frac{1}{2} I . \Delta,$$

expression tout-à-fait indépendante des axes.

Quant à la valeur de I, il est facile de la trouver en fonction des inclinaisons γ et γ' des deux orbites au plan fixe des xy, et des longitudes α et α' de leurs nœuds, comptées sur ce plan, en considérant la pyramide triangulaire dont les trois arêtes sont les deux lignes des nœuds et l'intersection mutuelle des plans des deux orbites. En effet, on connaît dans le triangle sphérique correspondant, un côté $\alpha - \alpha'$, et deux angles, γ' et $180^\circ - \gamma$, sur ce côté; une analogie connue donne alors, pour le troisième angle I, dans le cas où γ est plus grand que γ' comme dans le cas contraire, la formule

$$\cos I = \cos\gamma \cos\gamma' + \sin\gamma \sin\gamma' \cos(\alpha - \alpha').$$

Ces valeurs, qui, étant accentuées, s'appliquent également à chacune des planètes perturbatrices m'', m''', etc., prouvent que Ω se compose en général d'une suite de fonctions des rayons vecteurs et des sinus et cosinus des longitudes, des inclinaisons et des angles des nœuds de chaque planète, multipliées par la masse perturbatrice correspondante. Ainsi, pour pouvoir prendre les différentielles partielles de cette quantité par rapport aux élémens, et les intégrer, après les avoir multipliées par l'élément du temps, il faut nécessairement y substituer, pour r, r', r'', v, v', v'', etc., leurs valeurs en fonction de ces élémens et du temps, ce qui semble d'abord impossible, puisque cela suppose déjà le problème résolu.

Heureusement les observations apprennent que la masse de la plus grosse planète de notre système est au moins mille fois plus petite que celle du Soleil, et que le rapport des masses de tous les satellites, excepté la Lune, à celle de leur planète principale, est encore bien plus petit. Il en résulte que les termes qui sont affectés de ce rapport, dans les équations du mouvement troublé, sont, par cela seul, très petits par rapport aux autres. On peut donc y substituer des valeurs des variables qui ne soient qu'approchées, puisque la petite différence qu'il y a entre ces valeurs et les véritables, ne pourrait, lorsqu'elle serait multipliée par ce rapport, qu'en produire une doublement petite dans les résultats, suivant qu'on y aurait égard ou non. Ainsi, après avoir, dans une première approximation, négligé les termes qui dépendent des masses perturbatrices, on doit, pour en former une seconde, où l'on ait égard à la première puissance des masses, substituer dans Ω, au lieu des variables r, r'; v, v', etc., les valeurs que l'on a obtenues dans la première. Si l'on veut ensuite former une troisième approximation, où l'on ait égard aux secondes dimensions de ces masses, il faut substituer dans Ω les valeurs des variables qu'a données la seconde, et ainsi de suite; de manière que les valeurs qu'on substitue dans Ω soient toujours d'un ordre inférieur d'une unité, par rapport aux masses, à celui auquel on veut se borner. On voit que pour arriver à un certain ordre il faut avoir passé par tous les précédens, et que c'est par ces degrés successifs qu'on remédie à l'impossibilité d'une solution rigoureuse.

Seconde approximation.

Il résulte aussi de ces considérations que, dans la seconde approximation, on peut considérer séparément les effets de chaque corps qui trouble le mouvement de m, en regardant tous les autres comme nuls; car si l'action de m'', par exemple, modifie le mouvement de m', les termes qui en proviennent ont m'' en facteur commun; et si ces termes en introduisent à leur tour de nouveaux dans l'expression du mouvement de m,



ces derniers sont nécessairement affectés du produit $m'm''$, et doivent par conséquent être négligés lorsqu'on se borne à la première dimension des masses.

Supposons donc $m''=0$, $m'''=0$, etc.; substituons pour ρ sa valeur dans celle de Ω, nous aurons

$$\Omega=\frac{m'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(v'-v)-2rr'\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}.\Delta}}-\frac{m'r}{r'^2}\left[\cos(v'-v)+\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}.\Delta\right];$$

et il faudra mettre dans cette expression, au lieu de r, r', v, v', les valeurs qu'elles ont dans le cas du mouvement elliptique.

La somme des multiples dans chaque cosinus est toujours nulle.

Nous avons vu qu'on pouvait développer ces valeurs suivant les puissances des excentricités, et les sinus et cosinus des multiples des anomalies moyennes; or, le coefficient numérique qui affecte l'angle ϖ, sous le signe cosinus, dans un terme quelconque de l'expression de r, étant le même et de signe contraire que celui de l'angle $nt+\varepsilon$ (puisque cette expression se compose des cosinus des multiples de $nt+\varepsilon-\varpi$), la somme de ces coefficiens est toujours nulle; il en est de même de celle des coefficiens des angles $n't+\varepsilon'$ et ϖ', qui entrent sous le signe cosinus dans la valeur de r'; et cela a lieu aussi par rapport à des puissances quelconques de r et r', lorsqu'on y réduit les puissances et produits de cosinus en multiples. On voit de plus, en examinant les valeurs de v et v', que si on les substitue dans les fonctions $\cos(v'-v)$ et $\cos(v'+v-2\lambda)$, qui entrent dans l'expression de ρ, et qu'on les développe suivant les cosinus multiples, la somme des coefficiens de tous les angles qui entrent sous le signe cosinus est toujours nulle, quoique les angles ϖ, ϖ' et λ n'ayent pas toujours des coefficiens respectivement égaux et de signe contraire à ceux de $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$ et de leur somme. Il en sera de même pour des combinaisons quelconques de ces quantités, par la nature des fonctions périodiques; ainsi Ω jouira de cette propriété; et si l'on représente l'un quelconque de ses termes par..... $m'\mathrm{K}\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-2g''\lambda)$,
i', i, g, g', g'' étant des nombres entiers nuls, positifs ou négatifs, on aura la relation

$$i'-i-g-g'-2g''=0.$$

On peut aussi démontrer *à priori* que cette équation doit avoir lieu, et qu'elle résulte de ce que la valeur de Ω, et par conséquent celle de chacun de ses termes, doit être indépendante de l'origine des longitudes. En effet, supposons cette origine déplacée d'une certaine quantité qui soit la même dans chaque orbite: les angles $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$, ϖ, ϖ' et λ seront aussi chacun augmentés ou diminués de cette quantité; si donc on veut que toutes les combinaisons de ces angles, qui entrent sous le signe cosinus, restent les mêmes malgré ce changement, il faut que la somme de ces additions ou diminutions soit séparément égale à zéro dans chaque terme, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque la somme des coefficiens de chaque angle qui entre sous le signe cosinus, pris avec leur signe, est nulle aussi.

Ordre des coefficiens de chaque terme, par rapport aux excentricités et à l'inclinaison.

Si les orbites étaient circulaires et dans un même plan, les quantités r, r', v, v' seraient égales à a, a', $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$; l'angle I serait nul, et l'on aurait $i'=i$, puisque le seul angle dont le cosinus entrât dans la valeur de Ω, serait $n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon$ et ses multiples. On voit par là que i' ne peut surpasser i ou en être surpassé qu'au moyen des sinus ou des cosinus des termes qui sont affectés des excentricités ou de l'in-



clinaison mutuelle. Celle-ci étant toujours fort petite, on peut développer ρ et Ω suivant les puissances de $\sin^2 \frac{1}{2}$ I, en une série très convergente, ce qui donne

$$\Omega = \frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v)}} - \frac{m'r}{r'^2} \cos(v' - v)$$
$$+ \left[\frac{m'rr'}{\{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v)\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'r}{r'^2} \right] \sin^2 \tfrac{1}{2} \text{I}.\Delta + \text{etc.}$$

Or, nous avons vu, chapitre I, que les valeurs de r et de v étaient telles, que les coefficiens du sinus ou du cosinus de chaque multiple de l'anomalie $nt + \epsilon - \varpi$ qui y entrait, composaient une série procédant suivant les puissances de l'excentricité e, dont les exposans allaient en croissant de deux unités, depuis le premier, qui était égal au numéro même du multiple, ou à celui de l'angle $-\varpi$; il en est de même pour les valeurs de r' et v' par rapport à e' et à $-\varpi'$; et leur substitution dans l'expression de Ω donne lieu à des remarques analogues. Si donc on regarde les excentricités et l'inclinaison mutuelle comme des quantités très petites du *premier ordre*, leurs carrés ou produits comme étant du *second ordre*, et ainsi de suite: la somme des multiples des angles ϖ et ϖ', pris avec leur signe, servira à indiquer l'ordre le plus bas de chaque terme indépendant de l'inclinaison; et comme le multiple de λ, dans le premier terme de Δ ou de ses puissances, correspond toujours aussi à la puissance de $\sin \frac{1}{2}$ I, dont ces termes sont affectés, la somme des multiples de ϖ, ϖ' et λ indiquera la limite inférieure de l'ordre des termes qui seront multipliés par les puissances de $\sin \frac{1}{2}$ I. Ainsi, le coefficient K du terme général ci-dessus sera de la forme $\text{A}e^g e'^{g'} (\sin \frac{1}{2} \text{I})^{2g''}$, lorsqu'on se borne à son premier terme : A étant un coefficient indépendant des excentricités et de l'inclinaison, g, g', g'' étant pris positivement. L'ordre de ce terme sera donc $g + g' + 2g''$, ou $i' - i$ d'après la relation donnée plus haut; et cela devait être en effet, puisque la différence entre i' et i ne provenant que de termes dépendans des excentricités et des inclinaisons, les rapports qui ont lieu dans ces termes entre les multiples de nt ou $n't$ et les coefficiens de leurs sinus et cosinus, doivent avoir lieu dans la valeur de Ω, entre les multiples de $n't - nt$ et les coefficiens de leurs cosinus.

On serait d'abord tenté de croire que les termes de la valeur de Ω, qui proviennent du second terme de celle de Δ, font exception à cette règle, puisque, par exemple, la quantité $\frac{m'a}{a'^2} \sin^2 \frac{1}{2} \text{I} \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$ qui en fait partie, est du second ordre, quoique $i' - i$ y soit nul; mais il faut remarquer, à l'égard de ce terme et de tous ceux du même genre, tels que ceux où le nombre g est négatif, et dont l'ordre est alors $i' - i + 2g$, que le développement de la première partie de Ω en fait naître de semblables, quant à la valeur de $i' - i$, qui sont d'un ordre inférieur par rapport aux excentricités et à l'inclinaison; et qu'ainsi la règle dont il s'agit n'étant applicable qu'à l'ordre le moins élevé des coefficiens, n'est réellement pas en défaut.

Si l'on rassemble tous les coefficiens d'un même cosinus, ils composeront une série de puissances des excentricités et du sinus de la demi-inclinaison, dont la dimension ou l'ordre croîtra successivement de deux unités; en sorte que lorsque $i' - i$ sera un nombre pair, tous ces termes successifs seront d'ordre pair, et que lorsqu'il sera impair, ils le seront

aussi. Cela résulte de la forme même des valeurs de r, r', v, v', et cela doit d'ailleurs avoir lieu pour que la valeur de Ω soit indépendante de l'origine des longitudes.

Applications de ces principes

On peut appliquer les principes précédens à la recherche, faite *à priori*, de l'ordre et de la forme de tous les termes dont on connaît l'argument. Supposons, par exemple, qu'on demande ceux qui, étant dépendans de l'angle $5n't - 2nt$, sont du troisième ordre : on aura $g + g' + 2g'' = 3$, et g, g', g'' seront supposés toujours positifs, ce qui donnera six cas différens, suivant que deux ou un seul d'entre eux seront nuls, et les autres successivement égaux à 1, 2 ou 3, excepté g'', qui ne pourra être que nul ou égal à 1. Ainsi le cas de $g = 1$, $g' = 2$, $g'' = 0$, par exemple, donnera un terme de la forme $Aee'^2 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 2\omega' - \omega)$; et l'on retrouvera ainsi les six termes que nous avons rapportés au bas de la page 210; les angles ϖ, ϖ' et Π étant seulement changés en ω, ω' et λ, et γ en $\sin \frac{1}{2} I$.

Si l'on veut déterminer la nature des termes qui entrent dans le développement de Ω, et qui ne contiennent pas de cosinus des multiples des moyens mouvemens, on y parviendra facilement aussi en supposant $i' = 0$, $i = 0$, et en examinant tous les cas dans lesquels l'équation $g + g' + 2g'' = 0$ est vérifiée. On voit d'abord que $i' - i$ étant égal à zéro, les termes dont il s'agit seront tous d'ordre pair, à partir de l'ordre zéro, et qu'il y en aura trois espèces différentes, suivant que les nombres g, g', g'' seront tous nuls, ou qu'il y en aura deux ou un de nuls seulement. Dans le premier cas, il ne pourra y avoir que des puissances paires des excentricités et du sinus de la demi-inclinaison, et les termes seront de la forme

$$m'[A + A'(e^2 + e'^2) + A''e^2e'^2 + A'''(e^4 + e'^4) + B \sin^2 \tfrac{1}{2} I + B'(e^2 + e'^2)\sin^2 \tfrac{1}{2} I + \text{etc.}],$$

A, A', B, etc., étant des coefficiens dépendans des demi-grands axes a, a'. Dans le second cas, il faudra que l'on ait $g = -g'$, $g = -2g''$, $g' = -2g''$, suivant que ce sera g'', g' ou g qui sera nul; ce qui donnera des termes tels que

$$m'\{Cee' \cos(\omega - \omega') + C'e^2e'^2 \cos 2(\omega - \omega') + C''(e^3e' + ee'^3)\cos(\omega - \omega') + De^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos(2\omega - 2\lambda) + D'e'^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos(2\omega' - 2\lambda) + \text{etc.}\}.$$

Enfin le dernier cas sera celui où l'on aura $g + g' = -2g''$; il introduira des termes qui ne pourront pas être au-dessous du quatrième ordre, savoir,

$$m' Eee' \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos(\omega + \omega' - 2\lambda), \text{ etc.};$$

le coefficient E étant, ainsi que C, D, etc., de la même nature que A, A', etc.

Cas où l'on se borne au second ordre.

Supposons maintenant qu'on veuille borner l'approximation, dans le développement de l'expression de Ω donnée ci-dessus, aux quantités du second ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison, inclusivement : il suffira alors de substituer dans la partie de cette expression, qui est affectée de $\sin^2 \frac{1}{2} I$, les valeurs $r = a$, $r' = a'$, $v = nt + \epsilon$, $v' = n't + \epsilon'$, ce qui la réduira à

$$m' \sin^2 \tfrac{1}{2} I . \Delta . \left\{ aa'[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)]^{-\frac{3}{2}} - \frac{a}{a'^2} \right\},$$

en supposant $\Delta = \cos(n't + nt + \epsilon' + \epsilon - 2\lambda) - \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$.

Quant à la première partie de l'expression de Ω, qui est indépendante de l'inclinaison réciproque, il faudra y substituer pour r et v les valeurs auxquelles nous sommes par-

venus, pag. 221, et pour r' et v' ces mêmes valeurs, en y marquant toutes les lettres d'un trait. Or, si l'on regarde les termes qui suivent le premier, dans ces quatre valeurs, comme des accroissemens très petits, et que l'on désigne par S ce que devient cette partie de Ω, lorsqu'on y substitue seulement pour r, r', v, v' ces premiers termes, on pourra développer (ainsi que nous l'avons vu pages 180 et 192), cette partie, d'après la série de Taylor, suivant les différentielles partielles de S par rapport à a, a' et $n't - nt$, multipliées par les puissances des accroissemens, en se bornant aux termes affectés des deux premières puissances, quand on ne veut pousser l'approximation que jusqu'aux quantités du second ordre; et la détermination de la première partie de Ω sera ainsi réduite à celle de S.

Or on a

$$S = \frac{m'}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)}} - \frac{m'a}{a'^2} \cos(n't - nt + \epsilon' - \epsilon);$$

et pour avoir son développement, il faut connaître celui du radical qui se trouve en diviseur au premier terme, quand on le réduit en une série procédant suivant les cosinus des divers multiples de l'élongation moyenne $n't - nt + \epsilon' - \epsilon$.

On voit par là, qu'en dernière analyse, le développement de Ω dépend de celui des deux facteurs irrationnels.

$$[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(n't - \text{etc.})]^{-\frac{1}{2}}, \quad [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(n't - \text{etc.})]^{-\frac{3}{2}};$$

et que, lorsque les quantités a et a' sont de grandeur différente, ceux-ci peuvent être réduits en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances du rapport de la plus petite à la plus grande, et qui sont récurrentes à coefficiens variables. Nous avons déjà exposé, pages 132, 141, 156, 180 et 193, les principales propriétés de ces fonctions, en suivant l'ordre de leur découverte; nous avons vu que les relations qui existaient entre les coefficiens des divers développemens, permettaient de les déterminer tous, ainsi que leurs dérivées par rapport à a et à a', en fonction de deux d'entre eux; et que les valeurs de ceux-ci pouvaient facilement s'obtenir de plusieurs manières. Nous devons renvoyer, pour l'exposition complète de cette théorie, au n° 49 du liv. II de la *Mécanique céleste*, au *Calcul intégral* de M. Lacroix, page 112, et au § 12 de la cinquième partie des *Exercices de Calcul intégral*, de M. Legendre.

Distinction de deux espèces différentes de termes.

Le développement général de Ω, à quelque ordre qu'on s'y arrête, doit produire deux espèces distinctes de termes : la première comprend ceux où entrent les moyens mouvemens et leurs multiples, sous le signe sinus ou cosinus; la seconde ceux qui ne les contiennent pas, et qui sont de simples fonctions des élémens et de leurs combinaisons. Ces deux espèces de termes n'entrent pas de la même manière dans la valeur de Ω. En effet, nous avons trouvé en général, dans le cas de deux corps seulement,

$$\Omega = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right);$$

et si l'on remet dans cette expression, pour x', y', z', leurs valeurs tirées des équations du mouvement elliptique du corps m', ou des équations (1), (2), (3), de la page 219, en y ajoutant un trait à chaque lettre, et en prenant μ pour unité, on aura

$$\Omega = m'\left(\frac{1}{\rho} + \frac{xd^2x' + yd^2y' + zd^2z'}{dt^2}\right).$$

Or, si l'on substitue, dans le second terme de cette expression, les valeurs elliptiques des coordonnées et de leurs différentielles, qui se réduisent à des séries de sinus et cosinus des multiples de $nt+\varepsilon-\varpi$ pour x, y, z, et de $n't+\varepsilon'-\varpi'$ pour x', y', z', on voit que comme la différenciation des valeurs de ces dernières fait disparaître leur partie constante, il ne pourra en résulter aucun terme non périodique, quelque loin qu'on pousse l'approximation, puisque les multiples de nt ne peuvent jamais être détruits par ceux de $n't$, analytiquement parlant. Ainsi, la seule partie de l'expression de Ω qui puisse produire des termes de la seconde espèce sera $\frac{m'}{\rho}$, quand on se borne à la première puissance des masses perturbatrices; et comme cette partie est la même, soit que le corps troublé soit m ou m', il en résulte une grande symétrie entre le calcul de cette sorte de termes pour l'un et l'autre corps.

On peut aisément trouver directement les termes de cette espèce, qui entrent dans la valeur de Ω, lorsqu'on se borne au second ordre.

En effet, on a alors

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(v'-v)}}+\frac{aa'\sin^2\frac{1}{2}I\,[\cos(v'+v-2\lambda)-\cos(v'-v)]}{[a^2+a'^2-2aa'\cos(v'-v)]^{\frac{3}{2}}},$$

en supposant, dans le premier terme

$$r=a\left[1+\frac{e^2}{2}-e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+\text{etc.}\right],\quad r'=a'\left[1+\frac{e'^2}{2}-e'\cos(n't+\varepsilon'-\varpi')+\text{etc.}\right],$$

et de là

$$r^2=a^2\left[1+\tfrac{3}{2}e^2-2e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+\text{etc.}\right],\quad r'^2=a'^2\left[1+\tfrac{3}{2}e'^2-\text{etc.}\right],$$

enfin $$\cos(v'-v)=\frac{ee'}{2}\cos(\varpi-\varpi')+\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\text{etc.}$$

On voit que le premier terme du développement du radical en donnera un qui ne sera fonction que de a et a', et un autre qui sera une fonction symétrique de $\frac{1}{2}e^2$ et $\frac{1}{2}e'^2$; mais il ne pourra en faire naître qui soient affectés de la première puissance de e ou e' seulement, puisqu'un terme $e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)$ ne peut se réduire à e, qu'en étant de nouveau multiplié par $\cos(nt+\varepsilon-\varpi)$, qui se trouve toujours lui-même accompagné du facteur e. Le second terme du développement pourra en faire naître qui soient de la forme $ee'\cos(\varpi-\varpi')$, soit par la combinaison du terme semblable de la valeur de $\cos(v'-v)$ avec la partie constante de r et r', soit par le produit $ee'\cos(nt+\varepsilon-\varpi)\cos(n't+\varepsilon'-\varpi')$ $\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$ des parties variables de r, r' et de $\cos(v'-v)$. Quant à la seconde partie de la valeur précédente, comme il n'y a que les produits de cosinus d'angles semblables qui puissent faire naître des termes indépendans de ces cosinus, on voit qu'il n'y aura que le second terme du développement du radical dont la combinaison avec le $\cos(v'-v)$ du numérateur, puisse produire un terme non périodique, savoir, $-\frac{3}{2}\frac{a^2a'^2}{(a^2+a'^2)^{\frac{5}{2}}}\sin^2\frac{1}{2}I$, et qu'il sera le seul, lorsqu'on se borne à la seconde dimension des excentricités et de l'inclinaison.

Si donc on désigne par (Ω) la partie de Ω qui est indépendante des moyens mouvemens, ou qui ne renferme pas le temps d'une manière explicite, et par (a, a'), $(a, a')_1$, $(a, a')_2$, $2[a, a']$, de simples fonctions des moyennes distances a et a', prises posi-

tivement, on aura, aux quantités près du quatrième ordre,

$$(\Omega) = m' \left\{ (a,a') + \tfrac{1}{2}(a,a')_1 (e^2 + e'^2) + (a,a')_2 ee' \cos(\varpi - \varpi') - 2[a,a'] \sin^2 \tfrac{1}{2} I \right\},$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé plus haut *à priori*.

Inégalités qui résultent de l'une et de l'autre espèce de termes.

On voit immédiatement que la substitution de la valeur de Ω, dans les expressions des variations des élémens, doit conduire à des résultats très différens, suivant que l'on considère l'une ou l'autre des deux classes de termes dont nous venons de faire la distinction. En effet, si après avoir pris les différentielles partielles de la valeur de Ω par rapport aux élémens, et les avoir multipliées par dt, on les intègre pour avoir les quantités finies qui en résultent, les termes où entrent les cosinus des multiples des angles nt et $n't$ conserveront toujours la même nature; et comme les moyens mouvemens des corps célestes passent successivement et uniformément, dans chaque révolution de ces corps, par tous les degrés d'accroissement depuis zéro jusqu'à quatre angles droits, chacun de ces termes, après s'être un peu écarté dans l'un ou l'autre sens, de sa valeur moyenne, y reviendra constamment au bout d'un temps plus ou moins court, et toujours le même, et ne prendra aucun accroissement continu : de là le nom de *périodiques* donné aux inégalités qui en résultent dans le mouvement du corps troublé. L'angle qui se trouve sous le signe sinus ou cosinus s'appelle *argument;* le coefficient de ce sinus ou cosinus étant ce que devient l'inégalité quand le sin. ou cos. est égal à 1, marque la plus grande valeur de celle-ci, ou le *maximum* de l'inégalité; et le retour à cette plus grande valeur exigeant que l'argument croisse d'une circonférence, l'intervalle de temps nécessaire pour cela détermine la *période* de l'inégalité.

La partie de Ω qui ne contient pas, sous les signes sinus et cosinus, les moyens mouvemens des divers corps du système, étant substituée dans les expressions des variations des élémens, fera naître au contraire des termes indépendans de la position relative de ces corps, et qui, étant multipliés par l'élément du temps, croîtront par là de siècle en siècle. Aussi a-t-on appelé *séculaires* les inégalités de cette espèce; et quoiqu'on ait prouvé depuis que leurs accroissemens n'étaient pas indéfinis, et qu'ils étaient assujétis aussi à une période, on a pu, à cause de l'extrême longueur de celle-ci, conserver le nom de *séculaires* à ces variations.

Entrons maintenant dans l'examen détaillé des inégalités qu'éprouve chaque élément en particulier, et commençons par celles qui sont les plus importantes, qui résultent des premiers termes du développement de Ω, et qu'il faut avoir déterminées avant de pouvoir regarder comme *constans* les élémens qui entrent dans les coefficiens de toutes les autres inégalités.

CHAPITRE IV.

Inégalités séculaires des cinq premiers élémens.

Nous avons vu précédemment, que lorsqu'on a égard seulement à la première puissance des masses perturbatrices, la partie séculaire de Ω ne dépend que des grands axes, des excentricités, et des angles ϖ, ϖ', λ et I, mais nullement de l'angle ε, quel que soit l'ordre



auquel on s'arrête par rapport aux excentricités et à l'inclinaison; ce n'est même qu'une vérité de définition, puisque ϵ entrant partout conjointement avec nt, les termes qui sont indépendans de celui-ci le sont nécessairement de celui-là. On a donc, en se bornant à la première dimension des masses $\frac{d(\Omega)}{d\epsilon}=0$: ce qui réduit, quand on ne considère que les inégalités séculaires, les deux équations de la page 231, où entre cette différentielle, à celles-ci :

$$da=0,\quad de=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\frac{d(\Omega)}{d\varpi}dt,\quad \text{et donne de plus}\quad d\varpi=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\frac{d(\Omega)}{de}dt$$

Grand axe et moyen mouvement. La première équation prouve que le grand axe de l'orbite troublée reste constant, ou que ses variations ne sont que périodiques, tant qu'on n'a égard qu'à la première puissance des masses; c'est ce que nous avons déjà vu pages 165 et 184. On voit en outre que le moyen mouvement $\int ndt$ est constant aussi, entre les mêmes limites, puisque l'expression de sa variation donnée pag. 232, se réduit également à zéro.

Excentricité et longitude du périhélie. Les deux dernières équations forment un système ou groupe indépendant, analogue à celui qui est relatif à l'inclinaison et aux nœuds, et qui sert à déterminer les variations séculaires de l'excentricité et de la longitude du périhélie. En effet, si l'on y substitue pour (Ω) sa valeur trouvée plus haut, et qu'on se borne à la première puissance de l'excentricité, ce qui réduit $\sqrt{1-e^2}$ à 1, on a

$$de=\frac{m'}{a^2n}(a,a')_2\, e'\sin(\varpi-\varpi')\,dt,\quad d\varpi=\frac{m'}{a^2n}\left[(a,a')_1+(a,a')_2\frac{e'}{e}\cos(\varpi-\varpi')\right]dt.$$

Nœuds et inclinaison. Enfin, si l'on suppose que l'inclinaison γ soit rapportée au plan de l'orbite de m', à un instant quelconque, en sorte que γ soit égal à I, on aura $\frac{d(\Omega)}{d\alpha}=0$, $\frac{d(\Omega)}{d\gamma}=-2m'[a,a']\sin\gamma$, et les deux dernières équations de la page citée donneront

$$d\gamma=0,\quad d\alpha=-\frac{2m'}{a^2n}[a,a']\,dt;$$

ce qui prouve, 1°. que l'inclinaison mutuelle des orbites de m et de m' est constante relativement aux inégalités séculaires; 2°. que la ligne des nœuds des deux orbites a sur le plan de l'orbite de m' un mouvement rétrograde dont la vitesse est constante.

Ainsi, quoique les inclinaisons des orbites de m et de m', sur un plan fixe, soient variables, leur inclinaison mutuelle est constante. Ce théorème est cependant moins général que celui de la constance des grands axes, puisqu'il n'a lieu que pour deux orbites, et en se bornant aux carrés des excentricités; mais il est important dans la théorie de Saturne et de Jupiter, où les forces perturbatrices principales viennent de l'action mutuelle de ces deux planètes.

Valeurs ordonnées suivant les puissances du temps. Lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des masses, on doit, dans les valeurs précédentes de de, $d\varpi$ et $d\alpha$, où m' se trouve déjà en facteur commun, regarder e, e', ϖ, ϖ' et γ comme constans, ce qui donne, en intégrant, des expressions de la forme

$$e=kt+\text{const.},\quad \varpi=lt+\text{const.},\quad \alpha=gt+\text{const.}:$$

les constantes de l'intégration désignant les élémens elliptiques, et les coefficiens k, l, g représentant leurs variations séculaires, regardées comme proportionnelles au temps. La différenciation de la valeur de (Ω) par rapport aux élémens de m' donnera, en y changeant m en m' des équations analogues, dont l'intégration servira à déterminer de la même manière les variations des élémens e', ϖ' et α'.

Ces valeurs suffisamment exactes pour un intervalle de temps peu considérable, ne le seraient pas assez pour plusieurs siècles ; mais on peut, par le procédé des substitutions successives, obtenir un plus grand degré d'approximation. En effet, si l'on remet au lieu des élémens ces premières valeurs dans les coefficiens des équations différentielles, et qu'on intègre de nouveau, le terme proportionnel au temps, multiplié par dt, amènera le carré du temps dans l'intégrale, et l'on aura de nouvelles valeurs, telles que

$$e = kt + k't^2 + \text{const.}, \quad \varpi = lt + l't^2 + \text{const.}, \quad \theta = gt + g't^2 + \text{const.};$$

où il faut remarquer que les coefficiens k', l', g' seront de l'ordre du carré des masses perturbatrices, puisque k, l, g étaient déjà du premier ordre des masses, et qu'ils se sont trouvés de nouveau multipliés par m', quand on les a introduits dans les expressions de de, $d\varpi$ et $d\theta$. On pourrait obtenir de même les termes proportionnels au cube du temps, mais ils seraient insensibles dans le cas des planètes.

Les valeurs précédentes suffisent pour les besoins de l'Astronomie. Cependant comme elles croissent constamment avec le temps, on pourrait craindre que les variations séculaires des élémens ne devinssent considérables au bout de plusieurs siècles, et qu'elles ne finissent par changer la nature et la position des orbites des divers corps de notre système. Mais l'analyse a fourni deux moyens de s'assurer que cela ne pouvait pas avoir lieu d'après sa constitution actuelle : l'un repose sur l'intégration complète des équations qui déterminent ces variations, l'autre se fonde sur l'existence de plusieurs équations de condition entre les élémens, qui limitent leurs accroissemens. La recherche de ces dernières n'exigeant aucune transformation de coordonnées, nous commencerons par nous en occuper, en considérant à la fois, pour plus de généralité, un nombre quelconque de corps m', m'', m''', etc., qui s'attirent mutuellement.

Équations de condition entre les élémens.

Si nous appliquons aux parties de la valeur de (Ω), qui proviennent de l'action des corps m'', m''', etc. sur m, les mêmes notations que celles dont nous avons fait usage pour l'action de m', en les accentuant, nous aurons, en n'ayant égard qu'au second ordre des excentricités et de l'inclinaison, et en remettant $1 - \cos I$ au lieu de $2\sin^2 \frac{1}{2} I$:

$$\begin{aligned}(\Omega) = {} & m'\left\{(a,a') + \tfrac{1}{2}(a,a')_1(e^2 + e'^2) + (a,a')_2\, ee'\cos(\varpi - \varpi')\right\} - m'[a,a'](1 - \cos I) \\ & + m''\left\{(a,a'') + \tfrac{1}{2}(a,a'')_1(e^2 + e''^2) + (a,a'')_2\, ee''\cos(\varpi - \varpi'')\right\} - m''[a,a''](1 - \cos I') + \text{etc.}\end{aligned}$$

Nous aurons de même, pour la fonction correspondante relative au mouvement de m',

$$\begin{aligned}(\Omega)' = {} & m\left\{(a',a) + \tfrac{1}{2}(a',a)_1(e^2 + e'^2) + (a',a)_2\, ee'\cos(\varpi' - \varpi)\right\} - m[a',a](1 - \cos I) \\ & + m''\left\{(a',a'') + \tfrac{1}{2}(a',a'')_1(e'^2 + e''^2) + (a',a'')_2\, e'e''\cos(\varpi' - \varpi'')\right\} - m''[a',a''](1 - \cos I_1) + \text{etc.},\end{aligned}$$

et ainsi de suite; en sorte que l'on ait $(a,a') = (a',a)$, $(a,a')_1 = (a',a)_1$, etc. $[a,a'] = [a',a]$, etc.

Or, nous avons vu que les variations séculaires de l'excentricité et de la longitude du périhélie ne dépendaient que de la première partie de chaque ligne, et celles de l'inclinaison et de la longitude du nœud, de la seconde partie.

Si l'on suppose donc

$$\begin{aligned}\Phi = {} & mm'[(a,a') + \tfrac{1}{2}(a,a')_1(e^2 + e'^2) + (a,a')_2\, ee'\cos(\varpi - \varpi')] + mm''[(a,a'') + \text{etc.}] + \text{etc.} \\ & + m'm''[(a',a'') + \tfrac{1}{2}(a',a'')_1(e'^2 + e''^2) + (a',a'')_2\, e'e''\cos(\varpi' - \varpi'')] + m'm'''[(a',a''') + \text{etc.}] + \text{etc.},\end{aligned}$$

$$\Psi = -mm'[a,a'](1 - \cos I) - mm''[a,a''](1 - \cos I') - m'm''[a',a''](1 - \cos I_1) - \text{etc.},$$



on pourra donner aux équations relatives au corps m, la forme suivante :

$$de = -\frac{1}{ma^2ne}\frac{d\Phi}{d\varpi}dt,\quad d\varpi = \frac{1}{ma^2ne}\cdot\frac{d\Phi}{de}dt;$$

$$d\alpha = \frac{1}{ma^2n\sin\gamma}\frac{d\Psi}{d\gamma}dt,\quad d\gamma = -\frac{1}{ma^2n\sin\gamma\cdot d\alpha}\frac{d\Psi}{}dt.$$

Celles du corps m' seront de même

$$de' = -\frac{1}{m'a'^2n'e'}\frac{d\Phi}{d\varpi'}dt,\quad d\varpi' = \frac{1}{m'a'^2n'e'}\frac{d\Phi}{de'}dt,$$

$$d\alpha' = \frac{1}{m'a'^2n'\sin\gamma'}\frac{d\Psi}{d\gamma'}dt,\quad d\gamma' = -\frac{1}{m'a'^2n'\sin\gamma'}\frac{d\Psi}{d\alpha'}dt,$$

et ainsi de suite ; en sorte que les fonctions perturbatrices seront les mêmes pour tous les corps du système, dans chacun des deux groupes que l'on considère à part.

Or on a, par la nature même des fonctions Φ et Ψ, les équations identiques

$$\frac{d\Phi}{d\varpi} + \frac{d\Phi}{d\varpi'} + \frac{d\Phi}{d\varpi''} + \text{etc.} = 0,\quad \frac{d\Psi}{d\alpha} + \frac{d\Psi}{d\alpha'} + \frac{d\Psi}{d\alpha''} + \text{etc.} = 0;$$

et comme Φ est une fonction homogène de deux dimensions entre e, e', e'', etc., on a aussi, par la propriété de ces fonctions,

$$e\frac{d\Phi}{de} + e'\frac{d\Phi}{de'} + e''\frac{d\Phi}{de''} + \text{etc.} = 2\Phi.$$

Le second membre de cette équation est une quantité constante. En effet, nous avons vu que la différentielle complète de Ω, par rapport à tous les élémens de m, était nulle ; d'où l'on ne peut cependant pas conclure généralement que Ω soit constante, parce qu'elle renferme aussi les élémens de m', m'', etc.; mais lorsqu'on ne considère que sa partie séculaire, on voit, à cause de la symétrie avec laquelle y entrent les variables, relatives à m d'un côté, et à m', m'', etc., de l'autre, que si sa différentielle est nulle par rapport aux élémens de m, elle doit l'être aussi par rapport à ceux de m', m'', etc. comme on peut le vérifier directement. Ainsi, $\Phi + \Psi$ sera une quantité constante ; et à cause de l'indépendance mutuelle de ces deux parties, chacune le sera aussi séparément.

Si nous substituons maintenant aux premiers membres de ces équations leurs valeurs, elles deviendront

$$ma^2nede + m'a'^2n'e'de' + m''a''^2n''e''de'' + \text{etc.} = 0,$$

$$ma^2n\sin\gamma d\gamma + m'a'^2n'\sin\gamma' d\gamma' + m''a''^2n''\sin\gamma'' d\gamma'' + \text{etc.} = 0,$$

$$ma^2ne^2d\varpi + m'a'^2n'e'^2d\varpi' + m''a''^2n''e''^2d\varpi'' + \text{etc.} = 2F,$$

F étant la valeur de Φ dans un instant quelconque.

La dernière ne peut s'intégrer, parce que chaque terme du premier membre contient deux variables e et ϖ, e' et ϖ', etc. ; mais c'est une équation de condition qui établit une certaine limitation entre les mouvemens des périhélies.

Les deux premières donnent, en les intégrant, les relations

$$ma^2ne^2 + m'a'^2n'e'^2 + m''a''^2n''e''^2 + \text{etc.} = \text{const.},\quad ma^2n\cos\gamma + m'a'^2n'\cos\gamma' + \text{etc.} = \text{const.}$$



Si l'on y remet pour n, n', etc., leurs valeurs, en négligeant le carré des masses perturbatrices, et qu'après avoir substitué dans la seconde $1-\frac{1}{2}\gamma^2$ au lieu de $\cos\gamma$, et ainsi de suite, on fasse passer dans le second membre la partie constante.......... $m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}+$ etc., elles se réduisent à

$$me^2\sqrt{a}+m'e'^2\sqrt{a'}+m''e''^2\sqrt{a''}+\text{etc.}=\text{const.},$$
$$m\gamma^2\sqrt{a}+m'\gamma'^2\sqrt{a'}+m''\gamma''^2\sqrt{a''}+\text{etc.}=\text{const.}$$

Nous avons déjà vu, page 203, en arrivant aux mêmes équations par un autre procédé, quelles étaient les conséquences qu'on pouvait en tirer, relativement aux limites des accroissemens des élémens, et à la stabilité de notre système, en supposant que tous les corps tournent dans le même sens, et que n, n', etc., soient par conséquent tous positifs. Nous ajouterons qu'il y a cependant un cas dans lequel elles ne suffiraient pas pour prouver que les variations des excentricités et des inclinaisons seront toujours très petites; c'est celui de deux corps dont l'un aurait une masse très considérable par rapport à celle de l'autre. En effet si, comme dans la théorie de Mars troublé par Jupiter, m' n'est qu'environ $\frac{1}{2000}$ de m, l'équation $me^2\sqrt{a}+m'e'^2\sqrt{a'}=\text{const.}$ pourrait subsister lors même que e' croîtrait beaucoup et que e diminuerait fort peu, à cause du diviseur 2000 qu'aurait l'accroissement de e'^2; ainsi l'excentricité d'une très petite planète pourrait être fort augmentée par l'action d'une très grosse; et il en serait de même pour l'inclinaison. Il est donc important de constater directement la forme des intégrales rigoureuses qui donnent les variations de ces élémens, afin de déterminer leurs valeurs extrêmes, et la période de leurs accroissemens.

On parvient, ainsi que nous l'avons vu page 175, à rendre intégrables les équations relatives à l'excentricité et au mouvement du périhélie, en supposant

Réduction des équations différentielles à la forme linéaire.

$$e\sin\varpi=h,\quad e\cos\varpi=l,\quad e'\sin\varpi'=h',\quad e'\cos\varpi'=l',\ \text{etc.},$$

et en transformant, dans ces équations, les élémens e, ϖ, e', etc., en fonction des nouvelles variables h, l, h', etc.

Système relatif aux excentricités et aux périhélies.

En effet, les valeurs précédentes donnent

$$dh=\sin\varpi\, de+e\cos\varpi\, d\varpi,\quad dl=\cos\varpi\, de-e\sin\varpi\, d\varpi,\quad e^2=h^2+l^2,\quad \tan\varpi=\frac{h}{l},$$

$$\frac{d\Phi}{d\varpi}=\frac{d\Phi}{dh}\frac{dh}{d\varpi}+\frac{d\Phi}{dl}\frac{dl}{d\varpi}=e\cos\varpi\frac{d\Phi}{dh}-e\sin\varpi\frac{d\Phi}{dl},\quad \frac{d\Phi}{de}=\sin\varpi\frac{d\Phi}{dh}+\cos\varpi\frac{d\Phi}{dl};$$

d'où l'on tire, pour le corps m, à l'aide des équations ci-dessus,

$$dh=\frac{1}{ma^2n}\cdot\frac{d\Phi}{dl}dt,\quad dl=-\frac{1}{ma^2n}\cdot\frac{d\Phi}{dh}dt,$$

ou en mettant pour Φ sa valeur actuelle,

$$\begin{aligned}\Phi=mm'&\left[(a,a')+\tfrac{1}{2}(a,a')_1(h^2+l^2+h'^2+l'^2)+(a,a')_2(hh'+ll')\right]\\ +mm''&\left[(a,a'')+\tfrac{1}{2}(a,a'')_1(h^2+l^2+h''^2+l''^2)+(a,a'')_2(hh''+ll'')\right]+\text{etc.},\end{aligned}$$

et en exécutant les différenciations :

$$\frac{dh}{dt}=\frac{m'}{a^2n}\left[(a,a')_1 l+(a,a')_2 l'\right]+\frac{m''}{a^2n}\left[(a,a'')_1 l+(a,a'')_2 l''\right]+\text{etc.},$$
$$\frac{dl}{dt}=-\frac{m'}{a^2n}\left[(a,a')_1 h+(a,a')_2 h'\right]-\frac{m''}{a^2n}\left[(a,a'')_1 h+(a,a'')_2 h''\right]-\text{etc.}$$

On peut obtenir des équations analogues pour chacun des corps m', m'', etc., telles que

$$\frac{dh'}{dt}=\frac{m}{a'^2n'}[(a,a')_1 l+(a,a')_2 l']+\frac{m''}{a'^2n'}[(a',a'')_1 l'+(a',a'')_2 l'']+\text{etc.},$$

et ainsi de suite. Leur ensemble forme un système d'équations simultanées, qui sont linéaires du premier ordre à coefficiens constans, et où les variables h et l, h' et l', etc., ne se trouvent jamais à la fois dans les seconds membres.

Système relatif aux nœuds et aux inclinaisons. Les équations qui donnent les variations séculaires de l'inclinaison et de la longitude du nœud, peuvent être réduites à une forme semblable, ainsi que nous l'avons vu page 169, en y faisant

$$p=\sin\gamma\sin\alpha,\quad q=\sin\gamma\cos\alpha,\quad p'=\sin\gamma'\sin\alpha',\quad q'=\sin\gamma'\cos\alpha',\ \text{etc.}$$

En effet, on a alors

$$dp=\cos\gamma\sin\alpha\, d\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\, d\alpha,\qquad dq=\cos\gamma\cos\alpha\, d\gamma-\sin\gamma\sin\alpha\, d\alpha,$$

$$\frac{d\psi}{d\gamma}=\cos\gamma\left(\sin\alpha\frac{d\psi}{dp}+\cos\alpha\frac{d\psi}{dq}\right),\quad \frac{d\psi}{d\alpha}=\sin\gamma\left(\cos\alpha\frac{d\psi}{dp}-\sin\alpha\frac{d\psi}{dq}\right),$$

ces valeurs de $\frac{d\psi}{d\gamma}$ et $\frac{d\psi}{d\alpha}$, introduites dans celles de $d\alpha$ et $d\gamma$ de la p. 242, donnent en substituant :

$$dp=\frac{\cos\gamma}{a^2mn}\cdot\frac{d\psi}{dq}dt,\quad dq=-\frac{\cos\gamma}{a^2mn}\cdot\frac{d\psi}{dp}dt.$$

Or, l'on a $\tang\alpha=\frac{p}{q}$, $\sin\gamma=\sqrt{p^2+q^2}$, $\cos\gamma=\sqrt{1-p^2-q^2}$;

et de là, en prenant pour $\cos I$ sa valeur trouvée page 233

$$\cos I=\sqrt{(1-p^2-q^2)(1-p'^2-q'^2)}+pp'+qq'.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans celle de ψ, en n'ayant égard qu'aux deux premières dimensions de p et de q, ainsi qu'on doit le faire quand on se borne au second ordre par rapport aux inclinaisons, on aura

$$\begin{aligned}\psi=&-mm'[a,a']\{\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+p'^2+q'^2)-pp'-qq'\}\\&-mm''[a,a'']\{\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+p''^2+q''^2)-pp''-qq''\}-\text{etc.};\end{aligned}$$

et de là en écrivant, par la même raison, 1 au lieu de $\cos\gamma$,

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{m'}{a^2n}[a,a'](q-q')-\frac{m''}{a^2n}[a,a''](q-q'')-\frac{m'''}{a^2n}[a,a'''](q-q''')-\text{etc.},$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{m'}{a^2n}[a,a'](p-p')+\frac{m''}{a^2n}[a,a''](p-p'')+\frac{m'''}{a^2n}[a,a'''](p-p''')+\text{etc.}$$

Les équations relatives à m' seront de même :

$$\frac{dp'}{dt}=-\frac{m}{a'^2n'}[a,a'](q'-q)-\frac{m''}{a'^2n'}[a',a''](q'-q'')-\text{etc.},$$

$$\frac{dq'}{dt}=\frac{m}{a'^2n'}[a,a'](p'-p)+\frac{m''}{a'^2n'}[a',a''](p'-p'')+\text{etc.};$$

et ainsi de suite pour tous les corps du système.

On peut conclure de ces équations, à cause de leur symétrie, les relations

$$ma^2n\,dp+m'a'^2n'\,dp'+m''a''^2n''\,dp''+\text{etc.}=0,\quad ma^2n\,dq+m'a'^2n'\,dq'+\text{etc.}=0;$$

elles donnent, en intégrant, deux nouvelles équations de condition, savoir :

$$ma^2np + m'a'^2n'p' + \text{etc.} = \text{const.}, \quad ma^2nq + m'a'^2n'q' + \text{etc.} = \text{const.},$$

qui limitent les accroissemens des variables p, q, p', q', etc.

Nous voici donc arrivés à deux systèmes d'équations linéaires du premier ordre, tout-à-fait analogues, quoique indépendans l'un de l'autre, et dont l'intégration peut servir à déterminer, pour un temps quelconque, les variations séculaires des élémens qui fixent les dimensions et la position de l'orbite troublée. Les équations de cette espèce s'intègrent généralement par les exponentielles, et par les sinus et cosinus : mais, comme dans le cas actuel les variables h, l, h', etc., ne se trouvent pas mêlées ensemble, il ne peut se trouver à la fois dans les intégrales que l'une ou l'autre de ces espèces de fonctions, et l'on peut démontrer *à priori*, au moyen des relations précédentes, que, dans le cas du système du monde, aucune quantité de la première espèce ne peut y entrer.

En effet, supposons par exemple que les valeurs de h, l, h', etc., provenant de l'intégration, continssent des termes tels que $\mathrm{H}c^{ft}$, $\mathrm{L}c^{ft}$, $\mathrm{H}'c^{ft}$, etc., H, L, etc., étant des quantités réelles, et c étant la base des logarithmes népériens, on aura *Il ne peut entrer d'exponentielles dans les valeurs des variables.*

$$e^2 = \sqrt{h^2 + l^2} = (\mathrm{H}^2 + \mathrm{L}^2)\, c^{2ft},$$

et de même pour e'^2, etc., en sorte que l'équation de condition trouvée plus haut, relativement à cet élément, renfermera le terme

$$[ma^2n\,(\mathrm{H}^2 + \mathrm{L}^2) + m'a'^2n'\,(\mathrm{H}'^2 + \mathrm{L}'^2) + \text{etc.}]\, c^{2ft}.$$

Or, si l'on suppose que l'exponentielle c^{ft} soit la plus grande de toutes celles que renferment les valeurs de h, l, etc., il est clair que le terme précédent ne pourra être détruit par aucun autre, dans le premier membre de cette équation; d'où il suit que ce membre ne pourra se réduire à une constante, à moins qu'on n'ait

$$ma^2n\,(\mathrm{H}^2 + \mathrm{L}^2) + m'a'^2n'\,(\mathrm{H}'^2 + \mathrm{L}'^2) + \text{etc.} = 0.$$

Mais lorsque les quantités ma^2n, $m'a'^2n'$, etc., sont toutes de même signe, ou lorsque les corps du système tournent tous dans le même sens, et qu'ils n'éprouvent pas de répulsions (puisqu'une répulsion reviendrait à donner un signe contraire à la masse du corps qui la produirait), tous les termes du premier membre ont le même signe, et par conséquent cette équation est impossible, à moins que l'on n'ait à la fois $\mathrm{H} = 0$, $\mathrm{L} = 0$, etc.; et comme le même raisonnement peut être successivement appliqué à toutes les exponentielles, en allant de la plus grande à la plus petite, on peut en conclure généralement que les quantités h, l, h', etc., n'en renferment point; la relation relative aux inclinaisons peut servir à démontrer que les valeurs de p, q, etc., jouissent de la même propriété; ainsi les expressions rigoureuses des variations séculaires des élémens ne doivent contenir que des termes périodiques.

Considérons en particulier le premier système d'équations. Il est évident qu'on y satisfait par les valeurs suivantes : *Intégration du système relatif aux excentricités et aux périhélies.*

$$h = \mathrm{N} \sin(gt + \mathrm{C}),\quad l = \mathrm{N} \cos(gt + \mathrm{C}),\quad h' = \mathrm{N}' \sin(gt + \mathrm{C}),\quad l' = \mathrm{N}' \cos(gt + \mathrm{C}), \text{ etc.}$$

En effet, leur substitution dans chaque équation y introduisant $\cos(gt + \mathrm{C})$ ou $\sin(gt + \mathrm{C})$ en facteur commun dans tous les termes, permet de faire disparaître ces sinus ou cosinus,

et donne les rèlations

$$Ng = \frac{m'}{a^2 n}[(a,a')_1 N + (a,a')_2 N'] + \frac{m''}{a^2 n}[(a,a'')_1 N + (a,a'')_2 N''] + \text{etc.};$$

$$N'g = \frac{m}{a'^2 n'}[(a,a')_1 N + (a,a')_2 N'] + \frac{m''}{a'^2 n'}[(a',a'')_1 N' + (a',a'')_2 N''] + \text{etc.},$$

et ainsi de suite. Ces équations de condition étant en nombre égal à celui des corps qui s'attirent mutuellement, ou à celui des constantes N, N', etc., que nous supposons en nombre i, peuvent servir à déterminer toutes celles-ci en fonction de l'une d'entre elles ; d'un autre côté, si l'on élimine successivement toutes ces constantes, on aura une équation finale en g, du degré i, qui servira à déterminer, en fonction des masses perturbatrices et des distances moyennes, un nombre i de valeurs différentes de g, dont chacune satisfait aux équations proposées. On peut donc substituer chacune de ces valeurs dans les équations de condition précédentes ; et pour que les relations qu'elles expriment puissent subsister dans tous ces divers cas, il faut que les quantités N, N', etc. changent aussi de valeurs dans chaque substitution.

Soient donc g, g_1, g_2, etc., les i racines de l'équation en g ; N, N', N'', etc., le système des indéterminées relatif à la racine g ; N_1, N_1', N_1'', etc., le système relatif à la racine g_1, et ainsi de suite : on aura, par la théorie connue des équations différentielles linéaires,

$$h = N \sin(gt + 6) + N_1 \sin(g_1 t + 6_1) + N_2 \sin(g_2 t + 6_2) + \text{etc.},$$
$$l = N \cos(gt + 6) + N_1 \cos(g_1 t + 6_1) + N_2 \cos(g_2 t + 6_2) + \text{etc.},$$
$$h' = N' \sin(gt + 6) + N'_1 \sin(g_1 t + 6_1) + N'_2 \sin(g_2 t + 6_2) + \text{etc.},$$
etc.,

$6, 6_1, 6_2$, etc., étant des constantes arbitraires. Ces valeurs renferment deux fois autant d'arbitraires qu'il y a de racines g, g_1, g_2, etc., puisque, outre les i arbitraires $6, 6_1$, etc., chaque système d'indéterminées N, N', etc., contient une arbitraire ; elles sont par conséquent les intégrales complètes de notre premier système d'équations.

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer ces constantes arbitraires. Les observations ne les donnent point immédiatement ; mais elles font connaître, à une époque donnée, les excentricités des orbites et les longitudes de leurs périhélies, et par conséquent les valeurs de h, h', l, etc., d'où l'on tire celles des constantes dont il s'agit, ainsi que nous l'avons vu page 170. Celles-ci étant obtenues, si l'on suppose connues aussi les masses et les distances moyennes, tout se trouvera déterminé dans les expressions de h, l, h', etc., et les relations $e = \sqrt{h^2 + l^2}$, $\tang \varpi = \frac{h}{l}$, etc., serviront à leur tour à conclure de là les valeurs des excentricités et des longitudes du périhélie pour un temps indéfini. On aura ainsi,

Limites des variations des élémens.

$$e^2 = N^2 + N_1^2 + \text{etc.} + 2NN_1 \cos[(g_1 - g)t + 6_1 - 6] + 2NN_2 \cos[(g_2 - g)t + 6_2 - 6] + \text{etc.}$$

$$\tang \varpi = \frac{N \sin(gt + 6) + N_1 \sin(g_1 t + 6_1) + N_2 \sin(g_2 t + 6_2) + \text{etc.}}{N \cos(gt + 6) + N_1 \cos(g_1 t + 6_1) + N_2 \cos(g_2 t + 6_2) + \text{etc.}},$$

d'où l'on tire $\tang(\varpi - gt - 6) = \frac{N_1 \sin[(g_1 - g)t + 6_1 - 6] + \text{etc.}}{N + N_1 \cos[(g_1 - g)t + 6_1 - 6] + \text{etc.}}$

La dernière expression fait voir que lorsque la somme $N_1 + N_2 + \text{etc.}$, des coeffi-

ciens, pris tous positivement, est moindre que N, tang$(\varpi - gt - \mathfrak{C})$ ne peut jamais devenir infinie; l'angle $\varpi - gt - \mathfrak{C}$ ne peut donc atteindre le quart de la circonférence, en sorte que le vrai mouvement du périhélie est, dans ce cas, égal à gt. La première montre que e^2 est constamment plus petit que $(N + N_1 + N_2 + \text{etc.})^2$, en prenant positivement les quantités N, N_1, etc.; mais ces limites n'ayant lieu que lorsque les racines g, g_1, etc., sont toutes réelles et inégales, il reste à prouver qu'elles ne peuvent être ni égales ni imaginaires.

Si l'équation en g contenait des racines égales, les expressions de h, l, h', etc., renfermeraient, comme l'on sait, des arcs de cercle. Si l'on désigne alors par t^r la plus haute puissance de t qui y entre, on peut appliquer aux termes qui en résultent, dans e^2, e'^2, etc., et de là dans l'équation de condition qui s'y rapporte, précisément les mêmes raisonnemens dont nous avons fait usage plus haut, pour le cas des exponentielles, et l'on prouve ainsi, comme nous l'avons vu page 204, que quoique les valeurs approchées de h, l, h', etc., puissent être développées suivant les puissances du temps, il n'entre réellement aucune de ces puissances dans leurs valeurs rigoureuses.

Quant au cas des imaginaires : désignons par $n + n'\sqrt{-1}$, une racine de cette espèce qui entrerait dans l'équation en g, n et n' étant des quantités réelles : on sait que cette équation devra avoir aussi $n - n'\sqrt{-1}$ pour racine. On aura donc, en les considérant seules, et en désignant par A, A', α et α', les coefficiens et les angles correspondans,

$$h = A\sin[(n + n'\sqrt{-1})t + \alpha] + A'\sin[(n - n'\sqrt{-1})t + \alpha'),$$
$$l = A\cos[(n + n'\sqrt{-1})t + \alpha] + A'\cos[(n - n'\sqrt{-1})t + \alpha');$$

d'où l'on tire $e^2 = h^2 + l^2 = A^2 + 2AA'\cos(2n't\sqrt{-1} + \alpha - \alpha') + A'^2$,

ou en mettant, pour le second terme, sa valeur en exponentielles imaginaires,

$$e^2 = A^2 + A'^2 + AA'\left[c^{(\alpha-\alpha')\sqrt{-1}}.c^{-2n't} + c^{-(\alpha-\alpha')\sqrt{-1}}.c^{2n't}\right];$$

et comme les termes affectés de $c^{2n't}$ ne peuvent jamais être détruits par ceux qui le sont de $c^{-2n't}$, on voit que l'existence des racines imaginaires entraînerait l'introduction de termes contenant des exponentielles réelles. Ainsi, puisque nous avons déjà prouvé que ces derniers ne pouvaient entrer dans l'expression de e^2, relative à aucun des corps de notre système, il en résulte que l'un des coefficiens A et A' devra être nul, ce qui entraîne l'anéantissement de l'autre; donc, l'équation qui détermine les valeurs de g ne contiendra que des racines réelles, et l'on voit qu'il n'y a pas besoin de connaître les masses pour parvenir à ce résultat, puisqu'il a lieu, quelles que soient ces masses, pourvu que les corps se meuvent tous dans le même sens.

Le système d'équations différentielles qui se rapporte aux variables p, q, p', etc., est un peu plus simple que le précédent sous le rapport des coefficiens; mais son intégration se faisant par les mêmes procédés, et conduisant aux mêmes résultats, relativement à la longitude du nœud et à l'inclinaison que donne celle du premier pour l'excentricité et le périhélie, nous nous bornons à renvoyer aux pages 169 et suivantes, pour le détail des opérations qu'elle exige, et des conséquences qu'on en peut tirer.

Nous avons vu que les inégalités périodiques, produites par l'action du corps m', étaient de la forme $m'k\cos(i'nt - int + h)$, les multiples i' et i étant tout-à-fait indépendans Nature des inégalités séculaires.

de la masse perturbatrice, et celle-ci n'ayant par conséquent aucune influence sur la durée de la période, mais affectant seulement le coefficient du cosinus qui sert à déterminer la plus grande valeur de l'inégalité. Chacun des termes N $\cos(gt+\zeta)$,.... N $\sin(gt+\zeta)$, etc., que nous venons de voir introduit dans les expressions rigoureuses des élémens du mouvement elliptique, par l'effet de la partie séculaire de Ω, constitue aussi une inégalité qu'on peut encore appeler périodique sous un certain point de vue, puisque, par la nature même des sinus et cosinus, elle doit revenir à la même valeur quand son argument a crû d'une circonférence; mais dont la période et le *maximum* dépendent de quantités toutes différentes. En effet, l'élimination des coefficiens N, N', etc., dans les relations que la substitution des valeurs particulières des variables établit entre eux et le multiple g, donne, comme nous l'avons vu, une équation finale pour déterminer ce dernier en fonction des coefficiens (a,a'), (a,a''), etc., respectivement multipliés par $\frac{m'}{a^2n}$, $\frac{m''}{a^2n}$, etc.; en sorte que les racines g, g_1, g_2, etc., de cette équation sont nécessairement proportionnelles aux masses perturbatrices. Au contraire, les arbitraires N, N', ζ, ζ_1, etc., étant déterminées par les valeurs qu'ont les élémens à l'origine du mouvement, ne renfermeront plus explicitement les masses m', m'', etc. On voit donc que les masses, qui étaient d'abord en dehors des signes sin. et cos., passent pour ainsi dire de dehors en dedans, par l'intégration, et que le *maximum* de chacune de ces inégalités est indépendant de la grandeur des masses, tandis que leur période en est dépendante, en sorte que l'argument $gt+\zeta$ passe d'autant plus promptement de 0 à quatre angles droits, que la masse perturbatrice correspondante est plus considérable. L'extrême petitesse de ces masses par rapport à celle du corps central, dans le cas du système du monde, fait que cette période se compose d'un grand nombre de siècles. Ainsi, tandis que l'effet des inégalités périodiques peut être assimilé à de très petites oscillations du corps troublé, autour d'un point en mouvement sur l'ellipse qu'il décrirait par l'action seule du corps central, les élémens mêmes de cette ellipse subissent en même temps, par l'effet des inégalités séculaires, des variations très lentes, qu'on peut considérer, pendant plusieurs siècles, comme proportionnelles au temps, mais qui sont limitées aussi, et qui ne changent pas la nature des orbites.

Les intégrales précédentes seraient rigoureuses si la valeur complète de (Ω) était celle de la page 239; mais elles ne sont réellement qu'approchées, puisque cette valeur n'est exacte qu'aux quantités près du quatrième ordre, par rapport aux excentricités et à l'inclinaison. Cette approximation ne serait probablement pas suffisante dans la théorie des nouvelles planètes, sur-tout dans celle de Pallas, où le rapport de l'excentricité au demi-grand axe est de près de $\frac{1}{4}$, et l'inclinaison à l'écliptique d'environ 34°. Si l'on voulait alors avoir égard aux quantités du quatrième ordre, les variables seraient mêlées, les équations ne seraient plus linéaires, et leur intégration rigoureuse ne pourrait pas être effectuée. Au reste, cette intégration est en général plus utile pour déterminer la forme et les limites des variations séculaires, que pour fixer leurs valeurs, puisqu'elle exige que l'on connaisse exactement celles des masses, ce que l'on ne peut obtenir directement que pour les planètes accompagnées de satellites; aussi s'en tient-on, dans la pratique, au procédé approximatif que nous avons d'abord exposé, et au premier terme de l'expression différentielle de chaque élément, qui donne sa variation séculaire annuelle;

on calcule séparément l'action de chaque corps, sur les élémens du corps troublé, et on somme les résultats pour former l'effet total, en y ajoutant les produits respectifs de chaque effet partiel, par un coefficient indéterminé, afin de pouvoir corriger immédiatement les résultats, quand on trouvera des changemens à faire aux valeurs admises pour chaque masse.

CHAPITRE V.

Invariabilité du moyen mouvement, en ayant égard au carré des masses. Équation séculaire de la longitude moyenne.

Avant de nous occuper des variations séculaires du sixième élément du mouvement elliptique, ou de la longitude de l'époque, nous allons démontrer que quel que soit le nombre des corps qui s'attirent mutuellement, et quelques grandes que puissent être les excentricités et les inclinaisons de leurs orbites, les quantités qui sont de l'ordre du carré des masses perturbatrices ne peuvent introduire aucune inégalité séculaire dans le moyen mouvement de chacun de ces corps. Ce théorème, que nous n'avons encore établi que pour le premier ordre des masses, est d'une grande importance pour la stabilité de notre système planétaire; car si les termes dépendans du carré des masses pouvaient produire des inégalités séculaires dans le moyen mouvement : comme la variation de cet élément est donnée par une double intégration, puisque son expression, trouvée page 232, est

$$\delta\zeta = -3\iint \frac{1}{a^2}\cdot\frac{d\Omega}{d\epsilon}\,dt^2,$$

ces inégalités, dont nous avons vu que les expressions générales étaient composées d'une suite de sinus ou cosinus de multiples du temps qui dépendent des masses, acquerraient un diviseur qui serait aussi du second ordre, par rapport aux masses; par conséquent leurs coefficiens se trouveraient, après l'intégration, indépendans des masses, et il en résulterait, dans la théorie des planètes, de véritables inégalités séculaires auxquelles il serait indispensable d'avoir égard, à cause de leur influence sur la longueur de l'année sidérale, que les astronomes regardent comme invariable.

La démonstration dont nous allons faire usage, d'après M. Poisson, se compose de quatre parties distinctes. Nous établirons, 1°. que la combinaison de la partie des valeurs de $\frac{d\Omega}{d\epsilon}$ et de la variation de $\frac{1}{a^2}$, qui dépend du premier ordre des masses et des élémens du corps troublé, ne peut produire aucun terme séculaire; 2°. que la variation de $\frac{d\Omega}{d\epsilon}$, qui résulte de celle du moyen mouvement de ce corps, n'en amène pas davantage; 3°. que les variations des autres élémens du corps troublé n'en introduisent pas non plus dans $\frac{d\Omega}{d\epsilon}$; 4°. enfin, que cela étant posé, il en résulte, comme conséquence immédiate, qu'il ne viendra pas non plus de termes séculaires dans ζ, par la variation des élémens des

Démonstration de l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvemens.

corps m', m'', etc., qui troublent le mouvement. Reprenons successivement chacune de ces propositions.

1re Proposition. Nous avons trouvé, page 231, $da = \frac{2}{an}.\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt$; d'où l'on tire, pour la variation finie de la distance moyenne, provenant des forces perturbatrices :

$$\delta a = 2\int \frac{1}{an}.\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt.$$

Si l'on désigne par a la partie constante du demi-grand axe, il faudra, pour avoir égard au carré des masses, remplacer a par $a + \delta a$ dans l'expression de $\delta\zeta$, et y substituer pour δa la valeur précédente, en négligeant son carré, et en y regardant an comme constant, ce qui donne

$$\delta\zeta = -\frac{3}{a^2}\int\int\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon} - \frac{4}{a^2n}.\frac{d\Omega}{d\epsilon}\int\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt\right)dt^2.$$

Cette expression prouve d'abord qu'il n'y a que la combinaison des termes périodiques de la valeur de Ω, d'où il put résulter des termes séculaires dans $\delta\zeta$, puisque les termes de la première espèce sont les seuls qu'on puisse différencier par rapport à ϵ.

Nous avons vu qu'on pouvait développer la partie de la valeur de Ω, qui dépend de la première puissance des masses, en une série de cosinus d'arcs multiples de nt et $n't$. Désignons par $A_1 \cos(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + \alpha)$, $A_2 \cos(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + \alpha')$, etc., une suite de termes où les multiples des moyens mouvemens soient les mêmes : il est facile de voir, d'après ce que nous avons déjà dit sur ce sujet, pag. 138, qu'on peut les réduire tous à un seul.

En effet, soit pour abréger $i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon = T$: si l'on suppose qu'on ait $A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\alpha' = B\cos\zeta$, $A_1 \sin\alpha + A_2 \sin\alpha' = B\sin\zeta$, on transformera les deux termes $A_1 \cos(T + \alpha) + A_2 \cos(T + \alpha')$ en un seul $B\cos(T + \zeta)$, et l'on pourra toujours déterminer B et ζ de manière à satisfaire aux relations précédentes. S'il y avait un troisième terme, on pourrait de même, par un changement de constantes, le combiner avec $B\cos(T + \zeta)$ de manière à ce que les deux termes n'en formassent plus qu'un seul qui équivaudrait ainsi aux trois premiers, et ainsi de suite.

On peut donc supposer tous les termes du développement de Ω, qui provenant de l'action de m', dépendent d'un même argument, et ne diffèrent que par les multiples de ϖ, ϖ' ou λ, réduits à un seul, tel que $m'A\cos(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + \zeta)$; et l'on a alors par rapport à ce terme,

$$\frac{d\Omega}{d\epsilon} = m'Ai\sin(i'n't - int + \text{etc.}),\quad \int\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt = -\frac{m'Ai}{i'n' - in}\cos(i'n't - int + \text{etc.}),$$

$$\frac{d\Omega}{d\epsilon}\int\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt = -\frac{m'^2A^2i^2}{2(i'n' - in)}\sin 2(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + \zeta),$$

ce qui donne pour ζ une inégalité périodique dépendante de l'argument $2(i'n't - int)$.

On voit par là que tous les termes de cette espèce, qui sont les seuls qui puissent entrer dans la partie de $\frac{d\Omega}{d\epsilon}$ dépendante du premier ordre des masses, n'en produisent jamais de séculaires dans la valeur de ζ, parce que les produits des sinus et des cosinus d'angles semblables ne donnent jamais que des termes périodiques; et comme ces produits sont aussi évidemment irréductibles quand les angles sont différens, il en résulte que la variation du facteur $\frac{1}{a^2}$ ne peut introduire aucune inégalité séculaire du second

ordre par rapport aux masses perturbatrices, dans l'expression de ζ, et que l'on peut, dans la recherche de ces inégalités, mettre ce facteur en dehors du double signe d'intégration.

Il s'agit maintenant de prouver que la variation du moyen mouvement ζ ne peut donner lieu à aucun terme non périodique dans la valeur de $\frac{d\Omega}{d\iota}$. En effet, si l'on considère cette quantité comme fonction de ζ, et que ζ devienne $\zeta + \delta\zeta$, $\frac{d\Omega}{d\iota}$ deviendra $\frac{d\Omega}{d\iota} + \frac{d^2\Omega}{d\iota d\zeta}\delta\zeta + \text{etc.}$, et le second terme représentera la partie de cette variation qui dépend du carré des masses. 2e Proposition.

Or, l'expression rigoureuse d'un terme quelconque de la valeur de Ω, est....., $k\cos(i'\zeta' - i\zeta + i'\iota' - i\iota + \text{etc.})$, k étant un coefficient dépendant des masses perturbatrices, ζ' et ζ ne différant de $n't$ et de nt que de quantités qui sont aussi de l'ordre des masses.

On tire de là $\frac{d\Omega}{d\iota} = ik\sin(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.})$, $\frac{d^2\Omega}{d\iota d\zeta} = -i^2k\cos(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.})$;

et l'on voit que quand on néglige le cube des masses, on peut, dans le produit de ces quantités, supposer $\zeta' = n't$, $\zeta = nt$. On a alors

$$\delta\zeta = -\frac{3}{a^2}\iint\frac{d\Omega}{d\iota}dt^2 = \frac{3ik}{a^2(i'n' - in)^2}\sin(i'n't - int + i'\iota' - i\iota + \text{etc.}),$$

$$\frac{d^2\Omega}{d\iota d\zeta}\delta\zeta = -\frac{3i^3k^2}{2a^2(i'n' - in)^2}\sin 2(i'n't - int + i'\iota' - i\iota + \text{etc.});$$

et comme le terme de Ω, que nous avons considéré, peut, ainsi que nous venons de le voir, représenter la somme de tous ceux qui ont le même argument, il en résulte que la variation de ζ n'introduit, dans la partie de $\frac{d\Omega}{d\iota}$ dépendante du carré des masses, que des termes périodiques.

Pour déterminer l'effet des variations des autres élémens du corps troublé, il faut se rappeler ce que nous avons remarqué pag. 231, sur la symétrie qui existe dans les expressions de leurs différentielles : il résulte en effet des formules générales qui donnent les variations des constantes arbitraires dans tous les problèmes de Dynamique, que si la valeur de da, par exemple, contient le terme $(a,e)\frac{d\Omega}{de}dt$, celle de de renfermera la quantité $-(a,e)\frac{d\Omega}{da}dt$. Si l'on suppose donc que les six élémens elliptiques a, e, etc., se changent par l'effet des forces perturbatrices en $a + \delta a$, $e + \delta e$, et ainsi de suite, et que l'on développe Ω, d'après la série de Taylor, pour avoir son accroissement correspondant $\delta\Omega$, on aura, en se bornant au second ordre des masses, ce qui permet de traiter comme constans les coefficiens (a,e), etc., qui n'entreront dans le calcul que comme facteurs de quantités déjà de cette ordre : 3e Proposition.

$$\delta\Omega = \frac{d\Omega}{da}\delta a + \frac{d\Omega}{de}\delta e + \text{etc.} = (a,e)\left[\frac{d\Omega}{da}\int\frac{d\Omega}{de}dt - \frac{d\Omega}{de}\int\frac{d\Omega}{da}dt\right] + \text{etc.},$$

et cette valeur se composera d'autant de parties semblables qu'il y aura de coefficiens tels que (a, e).

Pour avoir les termes qui en résultent dans $\frac{d.\delta\Omega}{d\iota}$, il faut différencier cette quantité

par rapport aux ι qui se trouvaient primitivement dans Ω, et non par rapport à ceux qui y ont été introduits par les valeurs δa, δe, etc., parce que la différenciation de Ω par rapport à ι, doit être supposée antérieure à la variation des élémens dans cette fonction. On a alors

$$\frac{d.\delta\Omega}{d\iota} = (a,e)\left[\frac{d^2\Omega}{dad\iota}\int\frac{d\Omega}{de}dt - \frac{d^2\Omega}{ded\iota}\int\frac{d\Omega}{da}dt\right] + \text{etc.}$$

Supposons que la valeur de $\frac{d\Omega}{da}$ contienne le terme $B\cos(i'n't - int + \epsilon)$ ou $B\cos(T+\epsilon)$, et que celle de $\frac{d\Omega}{de}$ en renferme un semblable tel que $B'\cos(T+\epsilon')$; cela produira dans $\delta\Omega$ le terme

$$\frac{(a,e)\,BB'}{i'n'-in}\left[\cos(T+\epsilon)\sin(T+\epsilon') - \cos(T+\epsilon')\sin(T+\epsilon)\right].$$

On tire de là, en ne faisant varier que les ι qui entrent sous le signe cosinus,

$$\frac{d.\delta\Omega}{d\iota} = -\frac{(a,e)\,BB'i}{i'n'-in}\left[\sin(T+\epsilon)\sin(T+\epsilon') - \sin(T+\epsilon')\sin(T+\epsilon)\right] = 0.$$

Ainsi les termes se détruisent identiquement, sans produire même de partie périodique, et la même chose a lieu quel que soit l'élément que l'on considère. Il est vrai qu'un même terme de Ω peut faire naître un cosinus dans $\frac{d\Omega}{de}$ et un sinus dans $\frac{d\Omega}{d\iota}$; mais comme ce dernier est toujours égal au cosinus du complément, on peut ne considérer que des cosinus, en indiquant seulement que les parties constantes ϵ et ϵ' ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Les variations des élémens du corps troublé ne peuvent donc introduire, dans la valeur du moyen mouvement, aucun terme séculaire, ni produire même d'inégalités périodiques dépendantes du double de l'argument qu'on considère.

4e Proposition. Il ne nous reste plus qu'à examiner s'il en est de même des variations des élémens des corps m', m'', etc.; et l'on voit que l'on ne peut pas se servir d'un semblable procédé pour le constater. En effet, les valeurs des variations $\delta a'$, $\delta e'$, etc., étant de la forme $\int\frac{d\Omega'}{de'}dt$, $-\int\frac{d\Omega'}{da'}dt$, etc., Ω' étant ce que devient Ω pour le corps m' : si l'on considère cette dernière fonction comme variant avec a' et e', et croissant par là de la quantité $\frac{d\Omega}{da'}\delta a' + \frac{d\Omega}{de'}\delta e' + \text{etc.}$, cela produira dans $\delta\Omega$ la fonction $\frac{d\Omega}{da'}\int\frac{d\Omega'}{de'}dt - \frac{d\Omega}{de'}\int\frac{d\Omega'}{da'}dt$; mais comme la valeur de Ω' est différente de celle de Ω, la démonstration précédente ne peut plus s'appliquer. Il faut donc recourir à quelque relation générale entre les fonctions Ω et Ω', d'où l'on puisse conclure que lorsque la première ne produit pas, par sa variation, d'inégalités séculaires dans le moyen mouvement, il en sera de même de la seconde.

L'équation générale du principe des forces vives, que nous avons rapportée page 219, dans le cas de trois corps seulement, remplit le but proposé. En effet, on peut l'écrire de la manière suivante :

$$C = m(M+m')\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} + m'(M+m)\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}$$
$$-2mm'\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2} - 2(M+m+m')\left[M\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}\right)+\frac{mm'}{\rho}\right].$$

D'ailleurs nous avons trouvé, pages 219 et 228, les équations

$$\tfrac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{M+m}{r}=h, \quad dh=\frac{d\Omega}{ndt}ndt=n\frac{d\Omega}{d\epsilon}dt.$$

Si l'on désigne donc, pour abréger, par $d'\Omega$ la valeur précédente de dh, ou la différentielle de Ω, prise seulement par rapport au temps introduit par les coordonnées x, y, z, on trouvera

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2\left(\frac{M+m}{r}+\int d'\Omega\right);$$

et l'on aura de même

$$\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}=2\left(\frac{M+m'}{r'}+\int d''\Omega'\right),$$

en indiquant par d'' la différenciation par rapport au temps qui est introduit dans Ω' par les seules coordonnées x', y', z'.

La substitution de ces valeurs réduira la formule précédente à celle-ci :

$$C=m(M+m')\int d'\Omega+m'(M+m)\int d''\Omega'$$
$$-mm'\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2}+mm'\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}-\frac{M+m+m'}{\rho}\right).$$

Cette équation doit avoir lieu séparément pour les termes séculaires et pour les périodiques, ainsi que pour chaque ordre de termes différent, puisqu'il ne peut y avoir de réduction entre ces divers ordres ou espèces de termes. Considérons les termes séculaires qui sont du troisième ordre par rapport aux masses perturbatrices : il ne peut en provenir de tels de ceux de l'équation précédente qui ont r ou r' en diviseur ; en effet il suffit, dans l'ordre que l'on considère, de prendre pour ces rayons leurs valeurs elliptiques ; or le premier terme de celle de $\frac{1}{r}$, ou $\frac{1}{a}$, est le seul terme non périodique qui puisse y entrer, ainsi qu'on peut le vérifier en élevant à la puissance -1 la valeur de r obtenue p. 221, et il ne peut pas donner d'inégalités séculaires du premier ordre par rapport aux masses. Ainsi, les termes de cette espèce, provenant de la partie de l'équation qui contient r en diviseur, sont au moins du cinquième ordre par rapport aux masses, et il en est de même de ceux qui viennent de r'. La quantité $dxdx'+dydy'+dzdz'$ ne peut amener aucun terme non périodique, qui ne soit de l'ordre des masses, parce que la différenciation et la combinaison y font disparaître les termes constans des valeurs elliptiques ; on peut donc représenter par $mQ+m'Q'$ la partie séculaire de cette fonction. Enfin, le terme qui contient ρ en diviseur, peut produire des termes séculaires, soit par le développement de la partie elliptique de la valeur de ρ, soit par la variation des élémens qui y entrent. Si l'on représente donc leur somme par L, et qu'on désigne par $m'mPdt$, $m'mP'dt$ les inégalités de la même espèce, qui entrent dans les valeurs de $d'\Omega$ et $d''\Omega'$, et qui sont nécessairement du second ordre des masses, parce qu'elles ne peuvent provenir que de la variation des coordonnées, l'équation précédente deviendra, en se bornant à la troisième dimension des masses perturbatrices,

$$m'm^2M\int Pdt+mm'^2M\int P'dt-mm'[mQ+m'Q'+(M+m+m')L]=C.$$

Or, si l'on différencie cette équation, on pourra négliger les termes en Q et Q', qui,

étant déjà du troisième ordre, deviendront ainsi du quatrième, puisque les variations des élémens sont du premier; la partie de L qui provient de la variation des élémens étant déjà du premier ordre, sa différentielle pourra aussi être négligée; et quant à l'autre partie de dL, ou à la partie séculaire de la différentielle complète de $\frac{1}{r}$ par rapport à tous les élémens, nous avons vu, page 242, qu'elle était identiquement nulle. L'équation se réduira donc, en faisant disparaître le facteur commun, à

$$mP + m'P' = 0;$$

et elle ne pourra avoir lieu qu'en supposant séparément $P = 0$, $P' = 0$, puisque ces fonctions sont indépendantes de m et de m'.

Cette démonstration pouvant facilement s'étendre à un nombre quelconque de corps, il en résulte que si le moyen mouvement de l'un d'entre eux ne contient pas d'inégalités séculaires dépendantes des carrés des masses perturbatrices, il n'en contiendra pas non plus qui soient multipliées par les produits de ces mêmes masses et de celle du corps troublé; ainsi il ne pourra s'en introduire d'aucune manière dans la variation de cet élément. La valeur $h = -\frac{\mu}{2a}$, obtenue page 220, donnant $\frac{1}{a} = -\frac{2}{\mu} \int d'\Omega$, fait voir de plus qu'il ne peut y avoir d'autres inégalités séculaires dans le grand axe, que celles qui entrent dans $d'\Omega$. On peut donc conclure généralement, de tout ce qui précède, que *les moyens mouvemens et les grands axes des planètes et des satellites, considérés d'une manière abstraite et indépendamment des rapports numériques qui existent entre eux, sont invariables, lorsqu'on fait abstraction des inégalités périodiques, et qu'on néglige les quantités du troisième ordre par rapport aux forces perturbatrices.*

Ce théorème prouve que si la longitude moyenne $\int ndt + \epsilon$, du corps troublé, contient quelque inégalité séculaire qui soit du premier ou du second ordre des masses, elle ne peut évidemment provenir que de celles qui entrent dans l'expression de la longitude de l'époque ϵ. Nous allons donc maintenant examiner la variation de cet élément.

Reprenons, pour cet effet, l'équation de la pag. 231 qui s'y rapporte, savoir,

$$d\epsilon = -\frac{2}{an}\frac{d\Omega}{da}dt + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}(1-\sqrt{1-e^2})\frac{d\Omega}{de}dt;$$

Variation de l'époque.

substituons-y pour Ω la valeur de (Ω) trouvée page 239, en désignant, pour abréger, par A, A', C et B les coefficiens (a, a'), etc., en remplaçant $2\sin^2\frac{1}{2}I$ par $1 - \cos I$, et en allant seulement jusqu'au carré de l'excentricité, ce qui réduit $\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})$ à $\frac{1}{2}e^2$: nous aurons

$$d\epsilon = -\frac{2m'}{an}\left[\frac{dA}{da} + \frac{1}{2}\frac{dA'}{da}(e^2+e'^2) + \frac{dC}{da}ee'\cos(\varpi-\varpi') - \frac{dB}{da}(1-\cos I)\right]dt$$
$$+ \frac{m'}{2a^2n}\left[A'e^2 + Cee'\cos(\varpi-\varpi')\right]dt.$$

Il faudrait maintenant substituer dans le second membre, pour e^2, $e\cos\varpi$, $\cos I$, etc., leurs valeurs complètes trouvées dans le chapitre précédent, ce qui le réduirait à une suite de fonctions périodiques, et le rendrait intégrable par rapport au temps; mais l'expression qui en résulterait pour ϵ étant très compliquée, il est plus simple de recourir

au procédé d'approximation successive, par lequel on ordonne les valeurs cherchées suivant les puissances des masses perturbatrices et du temps. Or, une première intégration, faite en regardant les élémens qui multiplient dt comme constans, donnerait un terme proportionnel à la première puissance du temps et du premier ordre par rapport à m', qui s'ajouterait au moyen mouvement elliptique nt, pour former la partie uniforme de la longitude moyenne de l'orbite troublée. Si l'on suppose donc que le moyen mouvement est déterminé par observation, on devra négliger ce terme, parce qu'il se trouve déjà compris dans le moyen mouvement observé, ainsi que nous l'avons remarqué page 216. La variation séculaire de l'élément ϵ ne peut d'après cela provenir que de termes qui dépendent des puissances des masses supérieures à la première, et l'extrême petitesse des masses des planètes, comparées à celle du Soleil, montre évidemment que dans la théorie des planètes, ces termes doivent être trop peu sensibles pour qu'on y ait égard.

Il n'en est pas de même dans la théorie de la Lune, où le corps qui trouble le mouvement est le Soleil, dont la masse est plus de 337000 fois plus grande que celle du corps central, qui est la Terre; ce qui, malgré la distance qui les sépare, produit, comme nous l'avons vu page 108, une force perturbatrice moyenne, égale à environ un 358e de la force principale. Aussi le périgée de l'orbite lunaire achève-t-il sa révolution en neuf ans, la ligne des nœuds la sienne en dix-huit ans, et l'excentricité éprouve-t-elle aussi des variations très promptes; ce qui permet de faire abstraction, dans l'expression de $d\epsilon$, des inégalités qui proviendraient de ces élémens, parce que, quoiqu'indépendantes des sin. et cos. des moyens mouvemens, elles croissent avec une telle rapidité, que ce sont, sous ce rapport, de vraies inégalités périodiques.

Il résulte aussi de l'invariabilité des grands axes et des mouvemens moyens, en ayant égard aux deux premières puissances des masses, que les valeurs des coefficiens $\frac{1}{an}\frac{dA}{da}$, $\frac{1}{an}\frac{dA'}{da}$ etc. ne pourront pas contenir de terme proportionnel à la première puissance du temps, ni introduire par conséquent d'équation séculaire dans ϵ. Il ne nous reste donc plus, sous ce rapport, que deux termes de l'expression de $d\epsilon$ à examiner, savoir, celui qui est affecté du cosinus de l'inclinaison mutuelle, et celui où entre le carré de l'excentricité e' de l'orbite du Soleil.

Constance de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie.

Nous avons déjà démontré que l'inclinaison mutuelle des orbites de deux corps qui s'attirent mutuellement est une quantité constante; mais cela ne suffit pas pour prouver que celle du plan de l'orbite de la Lune, au plan de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, ou de l'écliptique vraie, le soit aussi, parce que ce dernier peut être déplacé par l'action de toutes les planètes. Ainsi, pour pouvoir supposer que le terme $\cos I\ dt$, qui entre dans la valeur de $d\epsilon$, ne peut pas produire d'équation séculaire dans le cas de la Lune, il faut démontrer directement que I est aussi constant dans cette théorie. (*Voyez* part. I, page 87, et le tome III de la *Méc. cél.*, page 184).

Désignons, pour cet effet, par x, y, z les coordonnées rectangulaires du centre de la Lune, rapportée au centre de la Terre et à une écliptique fixe; par r, u, v et s le rayon vecteur de la Lune, l'inverse de la projection de ce rayon sur le plan fixe, l'angle fait par cette projection et par l'axe des x, et la tangente de la latitude de la Lune au-dessus du plan fixe; enfin, par les mêmes lettres, marquées d'un trait, les variables semblables relatives au Soleil. L'équation (g), de la page 127, peut servir à déter-



miner s, au moyen des autres élémens et des différentielles partielles de la fonction R des forces perturbatrices.

Or, on a, en désignant par m' la masse du Soleil,

$$R = \frac{m'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2(xx' + yy' + zz')}} - \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3},$$

ou en développant, suivant les puissances descendantes de r',

$$R = \frac{m'}{r'} - \tfrac{1}{2}\frac{m'r^2}{r'^3} + \tfrac{3}{2}\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r^2)^2}{r'^5} + \tfrac{5}{2}\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r^2)^3}{r'^7} + \text{etc.};$$

et en substituant aux variables x, y, z, r leurs valeurs en fonction de u, v et s, données page 126, et qu'il suffit d'accentuer pour avoir celles de x', y', z', r',

$$R = \frac{m'u'}{\sqrt{1+s'^2}}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\frac{u'^2(1+s^2)}{u^2(1+s'^2)} + \tfrac{3}{2}\frac{[uu'\cos(v-v') + uu'ss' - \frac{1}{2}u'^2(1+s^2)]^2}{u^4(1+s'^2)^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Il est facile de voir, d'après l'équation (7) de la page 99, en y substituant la valeur de tang γ que donne l'intégration complète des équations séculaires relatives à l'inclinaison et à la longitude du nœud, que la quantité que nous désignons ici par s' est égale à une suite de termes de la forme $k \sin(v' + gt + \theta)$, g étant un coefficient extrêmement petit, dont nous négligerons le produit par $m'u'^3$. La valeur de s peut de même, en négligeant les quantités de l'ordre s^3, être représentée par la quantité $\Sigma.k\sin(v+gt+\theta)+s_{,}$: la caractéristique Σ placée devant le premier terme désignant la somme de tous les termes semblables qui entrent dans cette valeur, et $s_{,}$ étant la tangente de la latitude de la Lune au-dessus de l'écliptique vraie. Cela posé, on aura, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, et en négligeant les quantités affectées de $s_{,}^2$, $\frac{u'^3k^2}{u^4}$, $\frac{u'^5}{u^6}$, etc.,

$$\frac{s}{u}\left(\frac{dR}{du}\right) = -\frac{m'u'^3}{2u^4}s_{,}, \quad \frac{1+s^2}{u^2}\left(\frac{dR}{ds}\right) = -\frac{m'u'^3}{u^4}s_{,}, \quad \left(\frac{dR}{dv}\right) = 0;$$

ce qui réduit l'équation (g) à celle-ci :

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s + \tfrac{3}{2}\frac{m'u'^3s_{,}}{h^2u^4} + \text{etc.} = 0.$$

Si l'on néglige les excentricités et les inclinaisons des orbites, et qu'on désigne par a et a' les moyennes distances de la Lune et du Soleil à la Terre, on aura $u = \frac{1}{a}$, $u' = \frac{1}{a'}$, et l'on pourra conclure de ce que nous avons dit au bas de la page 19, $h^2 = a$. Si l'on fait ensuite $\frac{m'}{a'^3} = m$, mt sera le moyen mouvement du Soleil, et il sera permis de supposer que le temps t soit représenté par le moyen mouvement de la Lune, ce qui donne $\frac{1}{a^3} = 1$. Substituons maintenant ces valeurs et celle de s dans l'équation précédente, en observant que l'on peut ici changer gt en gv, nous aurons

$$\frac{d^2s_{,}}{dv^2} + (1 + \tfrac{3}{2}m^2)s_{,} + \Sigma.k[1-(g+1)^2]\sin(v+gv+\theta) + \text{etc.} = 0,$$

ce qui donne, en intégrant, pour la partie de $s_{,}$, relative au mouvement séculaire de l'écliptique,

$$s_{,} = \frac{\Sigma.(2g + g^2)\, k \sin(v + gv + \theta)}{\frac{3}{2} m^2 - 2g - g^2}.$$

Cette dernière quantité est insensible, car gv s'élevant au plus à 50″ cent. par année, et $\frac{3}{4} m^2 v$ qui exprime à peu près, comme nous l'avons vu au bas de la page 30, le mouvement rétrograde du nœud, surpassant 20° c., $\frac{3}{2} m^2$ est au moins 4000 fois plus grand que $2g$; ainsi on peut négliger ce terme dans l'équation différentielle en $s_{,}$, qui devient alors indépendante de tout ce qui a rapport au mouvement séculaire de l'écliptique. On voit donc qu'à raison de la rapidité du mouvement des nœuds de la Lune, on peut supposer constante l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie.

Ainsi la seule quantité qui puisse produire une équation séculaire dans la longitude de l'époque, et par conséquent dans la longitude moyenne, sera $-\frac{m'}{an} \cdot \frac{dA'}{da} \int e'^2 dt$, qui donnera un terme proportionnel au carré du temps, lorsqu'on y substituera pour e' la partie bt de sa variation qui dépend de la première puissance du temps. Les astronomes, observant à des époques différentes la longitude vraie de la Lune, et en déduisant la moyenne en retranchant de la première l'équation du centre, obtenaient, en divisant la différence par le nombre d'années écoulées entre chaque époque, la longitude moyenne annuelle de la Lune, qu'ils appelaient improprement son *moyen mouvement;* et ils avaient reconnu, en comparant des déterminations semblables faites dans des siècles différens, une accélération sensible dans ce moyen mouvement. Nous avons vu, dans le chapitre 10 de notre première partie, que non-seulement la théorie précédente a fourni de ce phénomène une explication complète, mais qu'elle a permis d'en déterminer l'expression analytique pour un grand nombre de siècles, avec une extrême précision, et qu'elle a servi à découvrir de semblables inégalités qui existent dans les mouvemens de la ligne des nœuds et du périhélie de l'orbite lunaire. Équation séculaire de la Lune.

Il existe entre les variations séculaires de la longitude de l'époque, produites par l'action mutuelle de deux corps, une relation analogue à celle que nous avons déjà reconnue entre les variations des autres élémens.

En effet, représentons toujours par L la partie non périodique de la valeur de $\frac{1}{r}$: L étant une fonction homogène de dimension -1, par rapport à a et à a', on aura

$$a\frac{dL}{da} + a'\frac{dL}{da'} = -L,$$

et le second membre de cette équation sera constant, d'après ce que nous avons vu page 254. Or, si l'on reprend l'expression générale de $d\epsilon$, en se bornant au carré de l'excentricité, et en mettant à la place du dernier terme sa valeur $d\varpi$, on pourra lui donner la forme suivante :

$$d\epsilon = \frac{1}{2} e^2 d\varpi - \frac{2m'}{an}\frac{dL}{da}\, dt,$$

et on aura de même

$$d\epsilon' = \frac{1}{2} e'^2 d\varpi' - \frac{2m}{a'n'}\frac{dL}{da'}\, dt.$$

Si l'on substitue les valeurs qui en résultent pour $\frac{dL}{da}$ et $\frac{dL}{da'}$, dans l'équation précédente, en ayant égard à l'équation de condition déjà trouvée page 242, elle se réduira, en supposant que la partie constante se détruise séparément, à

$$ma^2nd\iota + m'a'^2n'd\iota' = 0;$$

d'où l'on voit que toutes les fois que deux corps agissent l'un sur l'autre, les variations séculaires qui en résultent dans chaque élément sont de signe contraire et en raison inverse des quantités ma^2n et $m'a'^2n'$.

Ainsi, puisqu'il existe une équation séculaire dans la longitude moyenne de la Lune, il doit y en avoir aussi une dans le mouvement du Soleil; mais on voit en même temps que l'extrême petitesse du rapport de ma^2n à $m'a'^2n'$ doit rendre cette dernière insensible, en tant qu'elle dépend de l'action de la Lune.

Lorsque les inégalités séculaires sont développées suivant les puissances du temps, les termes qui contiennent la même puissance de la masse et du temps sont les seuls qu'on doive considérer. En effet, supposons par exemple un terme qui ait m'^3t^2 en facteur, ou dans lequel la puissance de la masse soit supérieure d'une unité à celle du temps : on peut le regarder comme provenant du développement d'une fonction telle que m' cos $(m'at + \alpha)$, où la masse perturbatrice se trouverait à la fois en dehors et en dedans du signe périodique. Ainsi, l'inégalité correspondante aurait une période extrêmement longue, et un *maximum* dépendant de la masse; elle devrait par conséquent être négligée.

On peut remarquer cependant que s'il existait de tels termes dans la variation du grand axe, ils en produiraient dans celle du moyen mouvement qui contiendraient la masse et le temps à la même puissance : car, soit un terme tel que Am'^2t, dans la valeur de δa ou de $\frac{2}{an}\int\frac{d\Omega}{d\iota}dt$, celui qui en résulterait pour $\delta\zeta$ serait $-\frac{3}{4}\frac{n}{a}Am'^2t^2$, d'après la formule de la page 249, et l'on devrait par conséquent y avoir égard.

On pourrait se demander aussi ce qui arriverait s'il existait des termes qui continssent la masse à une puissance moindre que le temps. Supposons un terme de cette espèce, qui eût $m't^2$ en facteur : il devrait résulter du développement d'une inégalité de la forme $\frac{1}{m'}$ cos $(m'at + \alpha)$, et dont le *maximum* serait par conséquent en raison inverse des masses; ainsi, s'il existait de tels termes, le système ne serait pas stable, en n'ayant même égard qu'à la première puissance des masses. Ce cas pourrait se présenter dans le moyen mouvement, si le grand axe contenait des termes séculaires dépendans de la première puissance des masses; car il est facile de voir qu'un terme $Am't$, dans δa, ferait naître dans $\delta\zeta$ la quantité $-\frac{3}{4}\frac{n}{a}Am't^2$. On voit par là de plus en plus toute l'importance du théorème de l'invariabilité des grands axes pour la stabilité du système du monde.

CHAPITRE VI.

Inégalités à courte et à longue période. Cas de la commensurabilité des moyens mouvemens.

CONSIDÉRONS maintenant les inégalités du mouvement des corps de nôtre système, qui dépendent de leur configuration, soit entre eux, soit à l'égard de leurs nœuds et de leurs périhélies, et qui se rétablissent toutes les fois que ces configurations redeviennent les mêmes. Nous avons déjà vu dans le chapitre III, qu'on pouvait classer les termes périodiques qui entraient dans la valeur de Ω, en divers ordres de petitesse, suivant les puissances des masses perturbatrices, des excentricités et des inclinaisons dont ils étaient affectés; mais la substitution de ces termes dans les expressions différentielles des élémens, et leur intégration, peuvent modifier essentiellement leur grandeur. En effet, soit $m'H\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + \alpha)$ un des termes de ce genre, que renferme le développement de Ω : il produira dans $\frac{d\Omega}{d\varepsilon}$ la quantité $m'Hi\sin(i'n't - int + \text{etc.})$, et les variations finies des élémens a, ζ, etc., du corps m, seront par rapport à ce terme, en vertu des équations de la page 251,

$$\delta a = -\frac{2m'Hi}{an(i'n' - in)}\cos(i'n't - int + \text{etc.}),\ \delta\zeta = -\frac{3m'Hi}{a^2(i'n' - in)^2}\sin(i'n't - int + \text{etc.}),\ \text{etc.}$$

On voit que l'intégration faisant passer en diviseur le multiple de t qu'a l'argument du terme dont il s'agit, la grandeur de l'inégalité dépend de la valeur de ce multiple aussi bien que de l'ordre du terme, et qu'il peut se présenter trois cas différens, suivant que le multiple $i'n' - in$ est grand, petit ou égal à zéro. Examinons successivement la nature des inégalités qui résultent de chacune de ces suppositions.

Lorsque le terme de Ω, que l'on considère, est tel, que $i'n' - in$ n'est pas une très petite quantité, ou qu'il est peu différent de n ou de n', l'argument prendra des accroissemens rapides, la période de l'inégalité sera courte, et sa grandeur dépendra uniquement de l'ordre de son coefficient. On pourra alors supposer que les élémens qui y entrent sont constans, à cause de l'extrême petitesse de leurs variations séculaires au bout d'un court espace de temps. Il sera permis de se borner en général, dans la théorie des anciennes planètes, aux inégalités qui dépendent de la première puissance des masses perturbatrices, et qui sont du premier ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison. Il faudra cependant avoir égard aux termes dépendans des carrés et produits de ces dernières quantités, dans le développement de Ω, parce que leur différenciation par rapport à ces élémens abaissera leur exposant d'une unité, et pourra produire des inégalités du premier ordre par le moyen de termes qui étaient du second. Lorsqu'on aura ainsi différencié tous les termes de Ω par rapport aux élémens qui y entrent, il ne s'agira plus que de substituer les valeurs de ces différentielles partielles dans les expressions des différentielles de chaque élément, et d'intégrer par rapport au temps, pour avoir les inégalités périodiques du premier ordre qui font partie de leur variation. Si l'on veut ensuite en construire

Inégalités à courte période.



des tables commodes pour la pratique : au lieu de considérer ainsi les inégalités comme distribuées entre chacun des élémens, il conviendra, ainsi que nous l'avons vu page 197, de les appliquer aux trois coordonnées astronomiques, savoir, le rayon vecteur, la longitude et la latitude, en augmentant chaque élément qui entre dans leurs valeurs elliptiques, de sa variation due aux forces perturbatrices, et en négligeant le carré de ces forces. Ainsi, la considération de la variation isolée de chaque élément n'est, pour ainsi dire, que provisoire dans la théorie des inégalités périodiques, et la méthode dans laquelle on calcule immédiatement les perturbations des coordonnées polaires, sans supposer que l'orbite troublée soit elliptique, est peut être, dans ce cas, la plus directe et la plus courte, tant qu'on se borne à la première dimension des masses.

L'expression de $d\varpi$, obtenue page 231, contenant le terme $\frac{1}{e} \cdot \frac{d\Omega}{de} dt$, il semble que, quand on veut avoir égard à la première puissance de l'excentricité, il faut pousser le calcul de Ω jusqu'aux e^3, puisque le diviseur et la différenciation abaissent chacun d'une unité l'exposant de e dans l'expression de $d\varpi$; mais il faut remarquer que, comme l'excentricité ou son carré multiplient tous les termes des valeurs elliptiques de r et de v où entre ϖ, la présence de ce facteur les élève déjà suffisamment, pour qu'on puisse, dans l'approximation dont il s'agit, se borner aux e^2 dans Ω.

Si l'on voulait faire usage de la méthode de la variation des élémens, dans la théorie de la Lune, il faudrait pousser au moins jusqu'au carré des excentricités et des inclinaisons, la recherche des termes qui dépendent de la première puissance de la masse perturbatrice, et former ensuite une nouvelle approximation dans laquelle on aurait égard à tous les termes de l'ordre du carré des masses. Le procédé qui semblerait le plus naturel pour parvenir à ce dernier but, serait de faire varier, par rapport aux élémens, les différentielles partielles de Ω, déjà déterminées; mais comme il y a autant de ces différentielles partielles qu'il y a d'élémens, et qu'il faudrait faire varier chacune par rapport à tous ces élémens, qui sont au nombre de sept, en y comprenant le moyen mouvement, cela ferait quarante-neuf termes nouveaux à considérer. Il serait donc plus simple de substituer immédiatement dans Ω, au lieu des élémens ζ, a, e, etc., du mouvement de la Lune, leurs nouvelles valeurs $\zeta + \delta\zeta$, $a + \delta a$, $e + \delta e$, etc., afin de déterminer l'accroissement $\frac{d\Omega}{d\zeta}\delta\zeta + \frac{d\Omega}{da}\delta a + \frac{d\Omega}{de}\delta e +$ etc., qui en résulterait pour cette fonction, et qui ne serait composé que de sept termes; cela reviendrait au même pourvu qu'en prenant ensuite les différentielles partielles de cet accroissement par rapport à chaque élément, on ne différenciât que par rapport à ceux qui se trouvaient déjà dans Ω, en regardant comme constans ceux qui y auraient été nouvellement introduits. A la rigueur, il faudrait aussi supposer dans Ω les élémens a', e', etc. du Soleil, variables, et augmentés de leurs perturbations dues à l'action de la Lune, ce qui introduirait sept autres termes dans l'accroissement de Ω; mais la petitesse de ces variations permettrait de les négliger, et de ne considérer que les termes en m'^2 sans avoir égard à ceux en mm'. Ayant ainsi obtenu les parties des différentielles partielles de Ω par rapport aux élémens, qui sont du second ordre des masses, il ne s'agirait plus que de substituer ces valeurs dans les expressions des différentielles des élémens, pour avoir, après l'intégration, la partie périodique de leurs variations qui dépend du carré de la force perturbatrice.

Inégalités à longue période.

Considérons maintenant le second des cas dont nous avons fait plus haut la distinc-

tion. Pour que le développement de Ω puisse faire naître des termes où le coefficient $i'n' - in$, qui multiplie le temps sous les signes périodiques, soit très petit, il faut que le produit du moyen mouvement $n't$ de la planète perturbatrice par un nombre entier, soit presque égal à celui du moyen mouvement nt de la planète troublée par un autre nombre entier, ou en d'autres termes, que ces moyens mouvemens approchent beaucoup d'être commensurables entre eux. On voit en effet que dans ce cas les configurations réciproques des deux planètes, et leurs positions dans leurs orbites, doivent revenir les mêmes au bout d'un temps déterminé, et que ces retours doivent avoir une grande influence sur les effets de leur action mutuelle. L'argument des termes dont il s'agit étant fort petit, son accroissement doit être très lent, et la période de l'inégalité correspondante ne doit s'accomplir qu'au bout d'un long espace de temps ; mais le coefficient de cette inégalité acquérant par l'intégration le très petit diviseur $i'n' - in$, qui se trouve même au carré dans l'expression du moyen mouvement, on voit que lors même qu'elle serait d'un ordre supérieur au premier, par rapport aux masses ou aux excentricités et inclinaisons, elle peut devenir par là très considérable.

Grandes inégalités de Jupiter et de Saturne

C'est par l'examen attentif des valeurs numériques des moyens mouvemens des divers corps de notre système, ou des rapports de leurs révolutions sidérales, que l'on peut découvrir les inégalités de ce genre auxquelles leur action mutuelle doit donner lieu. C'est ainsi que Jupiter achevant sa révolution à peu près en douze ans, et Saturne la sienne en moins de vingt-neuf ans et demi, on a remarqué que le produit du premier nombre par 5 était, à fort peu de chose près, égal au double du second; d'où l'on a conclu que les inégalités dépendantes de l'argument $5n't - 2nt$, $n't$ étant relatif à Saturne, devaient être très considérables dans la théorie de Saturne et de Jupiter. Nous avons déjà developpé ce cas dans le dernier chapitre de notre seconde partie, et nous avons vu page 236, comment on pouvait déterminer *à priori* la forme des six termes du développement de Ω, qui, étant du premier ordre des masses, et du troisième par rapport aux excentricités et à l'inclinaison, ont $5n't - 2nt$ pour argument. Comme il y a sept élémens à considérer, cela peut produire quarante-deux termes affectés de cette grande inégalité, dans les perturbations de l'une et de l'autre planète ; mais les plus sensibles sont ceux qui entrent dans la variation de l'excentricité ou dans celle du moyen mouvement. Dans la première ils viennent du terme $\frac{1}{e}\frac{d\Omega}{d\varpi}dt$ de l'expression de de, qui, ayant e en diviseur, abaisse d'une unité l'ordre de chaque terme de Ω; dans la seconde, leur introduction tient à ce que la double intégration amène le carré de $i'n' - in$ en diviseur. Les inégalités sont rendues par là si considérables, que, parmi les termes de Ω qui ont $5n't - 2nt$ pour argument, et qui sont affectés de la première dimension des masses, on doit même avoir égard à ceux qui sont du cinquième ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison. On voit facilement alors, en reprenant les considérations de la page 236, que ces derniers se composent des mêmes combinaisons d'angles qui entrent dans les termes du troisième ordre, et qu'ils en introduisent de plus quatre nouvelles, où l'argument $5n't - 2nt + 5\varpi' - 2\varpi$ est suivi des angles $-4\varpi' + \varpi$, $\varpi' - 4\varpi$, $-2\varpi' + \varpi - 2\lambda$, $\varpi' - 2\varpi - 2\lambda$, dans lesquels $g + g' + 2g''$ est toujours égal à 3, sans que g, g', g'' soient tous de même signe.

Première dimension des masses.

L'équation de condition qui existe entre les inégalités séculaires de tous les élémens a lieu aussi relativement aux inégalités à longue période du moyen mouvement, qui dépendent de la première puissance des masses.

En effet, l'équation, provenant du principe des forces vives, à laquelle nous sommes parvenus page 253, a lieu séparément, et est rigoureuse, par rapport aux inégalités périodiques qui ont le même argument; mais si cet argument est tel que $i'n' - in$ soit très petit, et que l'ordre des termes où il entre soit d'ailleurs assez élevé, on peut se borner à ceux qui acquièrent $i'n' - in$ en diviseur, parce que ce sont les seuls qui puissent produire des inégalités auxquelles on doive avoir égard. Or, comme il n'en peut provenir de semblables que de l'intégration, les seules parties de l'équation qui peuvent en contenir de tels, sont celles où entrent $\int d'\Omega$ et $\int d''\Omega'$, puisque les autres ne sont précédées d'aucun signe d'intégration, et qu'on ne doit y mettre, pour les variables, que leurs valeurs elliptiques, quand on néglige le cube des masses. Si donc on remet, pour ces quantités, leurs valeurs, et qu'on néglige les produits des masses perturbatrices, on aura, par rapport aux inégalités à longue période, du premier ordre des masses, qui peuvent devenir sensibles, la relation

$$m\int n\,\frac{d\Omega}{d\epsilon}\,dt + m'\int n'\,\frac{d\Omega'}{d\epsilon'}\,dt = 0,$$

qui devient, en y substituant pour $\frac{d\Omega}{d\epsilon}$, $\frac{d\Omega'}{d\epsilon'}$ leurs valeurs en fonction des variations des moyens mouvemens, et en regardant a et n comme constans,

$$ma^2nd.\delta\zeta + m'a'^2n'd.\delta\zeta' = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant, en remettant pour n et n' leurs valeurs, et en négligeant le carré des masses,

$$m\sqrt{a}\,\delta\zeta + m'\sqrt{a'}\,\delta\zeta' = \text{const.},$$

équation à laquelle nous sommes déjà parvenus page 205, et qui permet, comme nous l'avons vu, dans le cas de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, de conclure immédiatement, de celle qui se rapporte à l'une des planètes, la valeur de l'inégalité correspondante pour l'autre planète.

Seconde dimension des masses. Les quantités qui sont de l'ordre du carré des masses, peuvent produire, dans cette théorie, des inégalités très sensibles, qui aient $5n't - 2nt$, ou le double de cet angle, pour argument. Les premières viennent de la variation de Ω et Ω' qui résulte de celle des élémens, et en particulier, de la combinaison des termes périodiques du premier ordre des masses qui ont $3n't - nt$ et $nt - 2n't$ pour argument. Quant à l'inégalité qui dépend du double de $5n't - 2nt$, on peut conclure, de ce que nous avons vu page 252, qu'il ne peut point en provenir de semblable dans le grand axe et dans le moyen mouvement, par les variations des excentricités, des périhélies, des nœuds et des inclinaisons, qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$; mais il n'en est pas de même de celles qui peuvent provenir de la variation des moyens mouvemens.

En effet, l'accroissement de Ω qui résulte de la variation de ζ et ζ' étant........ $\frac{d\Omega}{d\zeta}\delta\zeta + \frac{d\Omega}{d\zeta'}\delta\zeta'$, celui du moyen mouvement de m, qui y correspond, aura pour expression $-3\iint\frac{dt^2}{a^2}\left(\frac{d^2\Omega}{d\zeta d\epsilon}\delta\zeta + \frac{d^2\Omega}{d\zeta' d\epsilon}\delta\zeta'\right)$.

Si l'on suppose donc

$$\Omega = m'\text{H}\cos(i'\zeta' - i\zeta + i'\epsilon' - i\epsilon + \varpi),\quad \Omega' = m\text{H}\cos(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.}),$$



on aura

$$\frac{d\Omega}{dt} = m'\mathrm{H}i \sin(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.}), \quad \frac{d\Omega'}{dt'} = -m\mathrm{H}i' \sin(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.}),$$

d'où l'on tire, pour les variations de ζ et ζ', qui sont du premier ordre des masses, en remettant, pour ces élémens, leurs valeurs elliptiques nt et $n't$ sous le signe sinus,

$$\delta\zeta = \frac{3m'\mathrm{H}i}{a^2(i'n' - in)^2}\sin(i'n't - int + \text{etc.}), \quad \delta\zeta' = -\frac{3m\mathrm{H}i'}{a'^2(i'n' - in)^2}\sin(i'n't - int + \text{etc.});$$

et comme on a

$$\frac{d^2\Omega}{d\zeta dt} = -m'\mathrm{H}i^2\cos(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.}), \quad \frac{d^2\Omega}{d\zeta' dt} = m'\mathrm{H}ii'\cos(i'\zeta' - i\zeta + \text{etc.}),$$

on obtient, pour l'accroissement de ζ, qui est de l'ordre m^2, en exécutant les produits, et en intégrant, après avoir fait $\zeta = nt$, $\zeta' = n't$, sous le signe périodique, la quantité

$$-\frac{9m'\mathrm{H}^2 i}{8a^2(i'n' - in)^4}\left(\frac{m'i^2}{a^2} + \frac{mi'^2}{a'^2}\right)\sin 2(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + \varpi);$$

qui se réduit, dans le cas de Jupiter, en y faisant $i' = 5$, $i = 2$, à

$$-\frac{9m'\mathrm{H}^2}{4a^2(5n' - 2n)^4}\left(\frac{4m'}{a^2} + \frac{25m}{a'^2}\right)\sin(10n't - 4nt + 10\varepsilon' - 4\varepsilon + 2\varpi).$$

L'inégalité qui en résulte a une période deux fois plus courte que celle de la première; et quoiqu'elle soit du second ordre des masses, et du sixième par rapport aux excentricités et à l'inclinaison, elle est cependant sensible à cause du très petit diviseur $5n' - 2n$ qu'elle a acquis à la quatrième puissance.

Nous n'avons pas eu égard, dans ce qui précède, à la variation de a, dont le carré entre en diviseur sous le double signe intégral, dans l'expression de $\delta\zeta$, et qui, par la combinaison du terme de sa variation, qui a l'argument $5n't - 2nt$, avec le terme semblable de $\frac{d\Omega}{dt}$, pourrait en produire un qui eût le double de cet angle pour argument; mais il est facile de voir que le terme provenant de la variation de $\frac{1}{a^2}$ n'aurait que la première puissance de $i'n' - in$ en diviseur; ainsi, la combinaison et la double intégration ne pourraient jamais amener que son cube; et comme l'inégalité serait du sixième ordre, et dépendante du carré des masses, le diviseur ne serait pas assez petit pour compenser cette élévation, et rendre son coefficient sensible.

Pour pouvoir déterminer la période et le *maximum* de la grande inégalité de Jupiter ou de Saturne, il faut rassembler les diverses parties dont elle se compose, et qui sont de différens ordres, afin de les réunir toutes en un seul terme. Nous avons déjà vu, page 209, comment on réduisait chaque terme dont l'argument était $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$, où ζ, à la forme $k\sin\zeta + k'\cos\zeta$, et de là à la forme $\mathrm{C}\sin(\zeta + \lambda)$, en faisant .... $\operatorname{tang}\lambda = \frac{k'}{k}$, $\mathrm{C} = \sqrt{k^2 + k'^2}$; et comment on devait avoir égard, à cause de la longueur de la période, aux variations séculaires des élémens qui entraient dans les coefficiens k et k'. Supposons donc la somme de tous les termes de la grande inégalité réduite à la forme $(\mathrm{A} + \mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2)\sin\zeta + (\mathrm{A}' + \mathrm{B}'t + \mathrm{C}'t^2)\cos\zeta$: il faudra, pour la réduire

à un seul terme, la calculer pour trois époques différentes, telles que 1750, 2250 et 2750, au moyen des valeurs numériques des élémens à chacune de ces époques. Soit $\mathfrak{C}\sin(\zeta+\lambda)$ sa valeur pour 1750; soient $\mathfrak{C}_{,}$, $\lambda_{,}$; $\mathfrak{C}_{,,}$, $\lambda_{,,}$ ce que deviennent $\mathfrak{C}$ et λ aux époques de 2250 et 2750 ; l'expression de cette grande inégalité, relative à un temps quelconque t, sera

$$\left(\mathfrak{C}+t\frac{d\mathfrak{C}}{dt}+\tfrac{1}{2}t^2\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2}\right)\sin\left(\zeta+\lambda+t\frac{d\lambda}{dt}+\tfrac{1}{2}t^2\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right);$$

les différentielles de $\mathfrak{C}$ et de λ se rapportant à l'époque de 1750.

Or, l'expression générale de $\mathfrak{C}$, savoir $\mathfrak{C}+t\frac{d\mathfrak{C}}{dt}+\frac{1}{2}t^2\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2}$ donne, en y faisant successivement $t=500$, $t=1000$,

$$\mathfrak{C}_{,}=\mathfrak{C}+500\frac{d\mathfrak{C}}{dt}+\tfrac{1}{2}(500)^2\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2},\quad \mathfrak{C}_{,,}=\mathfrak{C}+1000\frac{d\mathfrak{C}}{dt}+\tfrac{1}{2}(1000)^2\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2},$$

d'où l'on tire
$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt}=\frac{4\mathfrak{C}_{,}-3\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_{,,}}{1000},\quad \frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2}=\frac{\mathfrak{C}_{,,}-2\mathfrak{C}_{,}+\mathfrak{C}}{250000};$$

et il suffit de changer dans ces équations $\mathfrak{C}$ en λ pour avoir des valeurs semblables, relatives à cette dernière quantité.

Ayant obtenu par là les valeurs des coëfficiens des puissances du temps qui se trouvent en dehors ou en dedans du signe sinus, en fonction des quantités connues $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_{,}$, etc., on peut déterminer, ainsi que nous l'avons vu page 212, la période de la grande inégalité, en cherchant quel est l'accroissement annuel de son argument, et quel est le temps nécessaire pour que cet argument augmente d'une circonférence. On trouve par là que cette période est d'environ 929 ans, et qu'elle est, à très peu de chose près, la même pour Jupiter et pour Saturne. Nous avons vu d'ailleurs que ces inégalités étaient de signe contraire, et que celle de Saturne, dont le *maximum* était d'environ 48′, tendait actuellement à diminuer sa longitude moyenne. On doit aussi avoir égard, dans les valeurs du rayon vecteur, et de la longitude vraie de ces deux planètes, à plusieurs inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons, et qui acquièrent en diviseur, par l'intégration, la première puissance de $5n'-2n$, ainsi que nous l'avons déjà remarqué page 210.

La théorie des différentes planètes de notre système présente plusieurs exemples d'inégalités à longue période, beaucoup moins considérables, il est vrai, que les précédentes, et que l'on calcule isolément comme celles-ci, en ne déterminant, parmi les quantités de l'ordre dont elles dépendent, que les termes qui ont l'argument correspondant à l'inégalité cherchée, ou ceux que le rapport approché de commensurabilité peut rendre sensibles. Ainsi, le moyen mouvement de Mercure étant, à très peu de chose près, quadruple de celui de la Terre, il en résulte, dans la théorie de la première planète, une inégalité dont l'argument est $nt-4n't$, et qui est sensible quoiqu'elle dépende de la troisième dimension des excentricités et de l'inclinaison; mais sa petitesse permet de négliger les termes qui n'ont point $(n-4n')^2$ pour diviseur, et de ne pas supposer ses coefficiens variables par rapport au temps. L'action de Saturne sur Uranus produit aussi une grande inégalité, qui a pour argument trois fois le moyen mouvement de ce dernier

moins celui du premier. On voit même qu'il doit exister de semblables inégalités dans la théorie de toutes les planètes, puisqu'on peut toujours trouver des nombres dont les produits par les moyens mouvemens respectifs soient à peu près égaux; mais on ne doit y avoir égard que lorsque la différence de ces nombres s'écarte peu de l'unité, puisque, dans le cas contraire, l'ordre des termes est trop élevé, et leurs coefficiens sont trop petits, pour qu'il faille les prendre en considération.

Nouvelles planètes.

Dans les nouvelles petites planètes, dont les moyens mouvemens sont presque égaux, la commensurabilité se trouve dans les termes indépendans des excentricités, et l'on a, à fort peu de chose près, $n - n' = 0$, dans la théorie de Cérès et Pallas. Il semble alors qu'on devrait y avoir égard aux termes dépendans de tous les multiples de l'élongation $nt - n't$, puisque le terme $A \cos 10\,(nt - n't)$, par exemple, ne diminuerait en l'intégrant que par le diviseur 100, qu'il acquerrait dans le moyen mouvement, ce qui ne suffirait pas, quand A serait grand, pour rendre l'inégalité insensible. Heureusement les masses de ces planètes sont si petites, qu'on peut négliger les effets de leur action mutuelle par rapport à ceux qui proviennent de l'attraction des autres planètes environnantes. Au reste, d'autres obstacles dont nous avons déja parlé, savoir, la grandeur des excentricités et des inclinaisons, se présentent dans leur théorie, et rendent insuffisantes toutes les méthodes connues, pour déterminer leurs perturbations. En effet, les développemens, ordonnés suivant les puissances des excentricités, étant alors fort peu convergens, il faudrait pousser les calculs si loin, qu'ils deviendraient presque impraticables : les théories de Cérès et de Vesta offriraient peut-être un peu moins de difficultés que celles des deux autres; mais on a vérifié que dans le cas de Pallas, par exemple, il faudrait environ quatre cents inégalités pour représenter la seule attraction de Jupiter. Les facteurs numériques qu'acquièrent les coefficiens de chaque équation dans les ordres supérieurs deviennent si considérables, qu'on pourrait même douter s'ils ne produiraient pas quelque terme sensible dans la théorie des anciennes planètes, et il serait important d'avoir un moyen d'apprécier les limites des erreurs que l'on commet, en s'arrêtant à un certain ordre d'approximation; cependant, la comparaison de la théorie avec les observations prouvant que les résultats de celle-là s'accordent en général avec celles-ci, à moins de 10″ près, fournit une vérification suffisante pour l'Astronomie, si elle ne l'est pas entièrement pour l'Analyse.

Théorie des satellites de Jupiter.

La théorie des satellites de Jupiter qui, à cause de la promptitude de la révolution de ces astres, a présenté, dans le court intervalle d'un siècle et demi, tous les grands changemens que le temps ne développe qu'avec une extrême lenteur dans le système planétaire, offre un exemple bien remarquable du troisième des cas que nous avons distingués au commencement de ce chapitre, de celui où le coefficient du temps, sous le signe périodique, est égal à zéro.

Inégalités qui dépendent du premier ordre des masses.

Considérons en effet les 3 premiers satellites, en négligeant le 4ᵉ, ou le plus éloigné de Jupiter, dont l'action sur les précédens est, à raison de sa distance, presque insensible, de même que celle du Soleil, en comparaison de l'action mutuelle des 3 premiers satellites; désignons par $\int ndt, \int n'dt, \int n''dt$, ou ζ, ζ', ζ'', les moyens mouvemens respectifs de ces derniers : les observations ont fait voir que ces élémens suivent à peu près une progression sous-double, c'est-à-dire que le moyen mouvement du 1ᵉʳ satellite est, à fort peu de chose près, double de celui du second, qui lui-même est presque double de celui du troisième. Il en résulte d'abord que les inégalités qui ont $nt - 2n't$ et $n't - 2n''t$, ou leurs premiers multiples,



pour argument, et qui sont d'ailleurs du premier ordre par rapport aux masses et aux excentricités, seront en général très considérables dans cette théorie, de même que toutes celles qui acquièrent $n - 2n'$ et $n' - 2n''$ en diviseur; et comme l'ellipticité des orbes du premier et du second satellite est insensible, la variation de l'excentricité, dépendante de ces argumens, et qui a, comme nous l'avons vu, e ou e' en diviseur, sera plus considérable que la variation correspondante du moyen mouvement, quoique celle-ci ait les carrés de $n - 2n'$ ou $n' - 2n''$ en diviseurs. Nous avons vu, page 221, que le second terme de l'expression elliptique du rayon vecteur r du corps m était $-ae\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$; si l'on y substitue, au lieu de e, la partie de sa variation qui dépend de l'angle $nt - 2n't$, cela fera naître une inégalité indépendante de l'excentricité, et dont l'argument sera $2(nt - n't)$; il en est de même pour le terme correspondant de la longitude vraie; et l'inégalité qui en résulte est la plus sensible du mouvement du premier satellite, la seule que les observations aient fait reconnaître. De semblables substitutions, dans les valeurs des coordonnées des satellites m' et m'', y produiront des inégalités considérables, qui dépendront, dans le premier cas, des angles $nt - n't$ ou $n't - n''t$, et dans le second cas, de ce dernier seulement.

Mais l'inégalité la plus remarquable de ce système, est celle qui dépend de l'angle $nt - 3n't + 2n''t$. En effet, $n - 3n' + 2n''$ étant égal à la différence entre $n - 2n'$ et $n' - 2n''$, est incomparablement plus petit que chacune de ces quantités, et il semble que les termes qui ont cet argument doivent produire de très grandes variations dans les moyens mouvemens, d'autant plus que leurs coefficiens sont indépendans des excentricités, quand on se borne à ceux de l'ordre le plus bas. Nous allons chercher à faire voir comment l'action mutuelle de ces mêmes satellites tend à rendre ces inégalités peu sensibles.

Inégalités qui dépendent du second ordre des masses.

Il est évident, d'après ce que nous avons établi au bas de la page 233, que les termes dépendans de l'angle $nt - 3n't + 2n''t$ ne peuvent se trouver que parmi ceux qui sont du second ordre des masses perturbatrices, puisque les termes du premier ordre, qui proviennent de l'action de m'' ou de m' sur m, ne peuvent contenir à la fois, sous les signes périodiques, que $n''t$ et nt ou $n't$ et nt. On voit de plus que les principaux des termes dont il s'agit résulteront de la variation des coordonnées de m', dans les termes de Ω et Ω' où entre $\cos(v - v')$, et dans ceux de Ω' et Ω qui dépendent de $\cos 2(v' - v'')$; mais il suffit de calculer ceux qui se rapportent à l'un des satellites, pour obtenir, avec une grande approximation, les termes qui sont relatifs aux deux autres.

En effet, reprenons l'équation $ma^2nd.\delta\zeta + m'a'^2n'd.\delta\zeta' = 0$ de la page 262, qui a lieu pour un nombre quelconque de corps, et appliquons-la au cas actuel, en y supprimant la caractéristique δ, ce qui revient à regarder ζ et ζ' comme les moyens mouvemens des orbites troublées : nous aurons, en la différenciant, et en remarquant qu'on a

$$d\zeta = ndt,\; dn = \frac{d^2\zeta}{dt},\; da = -\frac{2a}{3n}dn, \text{ etc.}:$$

$$ma^2n\frac{d^2\zeta}{dt} + m'a'^2n'\frac{d^2\zeta'}{dt} + m''a''^2n''\frac{d^2\zeta''}{dt} = 0.$$

L'équation $ma^2n + m'a'^2n' + m''a''^2n'' = \text{const.}$, qui provient, comme nous l'avons vu page 203, de l'une des intégrales des aires, quand on y néglige les excentricités et les inclinaisons, subsiste par rapport aux inégalités à longue période, parce que les termes, multipliés par mm', qu'on néglige pour obtenir cette relation, n'ont point en diviseur les petits coefficiens $i'n' - in$ dans l'ordre que l'on considère (voyez *Méc. cél.*, tome I,

page 517). Elle donne, en la différenciant, et en remettant pour $d\alpha$ et $d\alpha$ leurs valeurs,

$$m a^2 \frac{d^2\zeta}{dt} + m' a'^2 \frac{d^2\zeta'}{dt} + m'' a''^2 \frac{d^2\zeta''}{dt} = 0.$$

On tire de ces deux équations, en retranchant l'une de l'autre, après avoir multiplié la dernière par n'' ou par n',

$$\frac{d^2\zeta'}{dt} = -\frac{ma^2(n-n'')}{m'a'^2(n'-n'')}\frac{d^2\zeta}{dt}, \quad \frac{d^2\zeta''}{dt} = -\frac{ma^2(n-n')}{m''a''^2(n''-n')}\frac{d^2\zeta}{dt}.$$

On a d'ailleurs, d'après la page 232, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{d\Omega}{d\epsilon}$;

si donc on suppose dans $\frac{d\Omega}{d\epsilon}$ le terme $-\frac{m'm''}{2}\,\mathrm{A}\sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'')$,

et que l'on fasse $\frac{3}{2}\left(\frac{m'm''}{a^2} + 3\frac{mm''}{a'^2}\cdot\frac{n-n''}{n'-n''} + 2\frac{mm'}{a''^2}\cdot\frac{n-n'}{n'-n''}\right)\mathrm{A} = \mathrm{C}$,

on aura $\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 3\frac{d^2\zeta'}{dt^2} + 2\frac{d^2\zeta''}{dt^2} = \mathrm{C}\sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'')$,

d'où l'on tire, en posant $\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'' = \varphi$, et en supposant d'abord $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ constans, l'équation $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathrm{C}\sin\varphi$.

Les observations apprennent que la combinaison des moyens mouvemens, représentée par $\zeta - 3\zeta' + 2\zeta''$, est une très petite quantité; on peut donc supposer, en général, quand on regarde $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ comme constans, $\varphi = a + u$, a étant une constante, et u une variable très petite, dont il est permis de négliger le carré; l'équation précédente devient alors

$$\frac{d^2u}{dt^2} = u\,\mathrm{C}\cos a + \mathrm{C}\sin a.$$

Or, il est facile de voir que les valeurs $\sin t\sqrt{-\mathrm{C}\cos a}$, et $\cos t\sqrt{-\mathrm{C}\cos a}$, données à u, satisfont à cette équation quand on fait abstraction de son dernier terme, et que, pour que la substitution de la valeur de u rende nulle l'équation toute entière, il suffit d'y ajouter un terme constant, qui étant multiplié par $\mathrm{C}\cos a$, soit égal et de signe contraire à $\mathrm{C}\sin a$. On tire de là, pour l'intégrale complète de cette équation :

$$u = k\sin(t\sqrt{-\mathrm{C}\cos a} + h) - \mathrm{tang}\,a,$$

k et h étant deux constantes arbitraires.

Pour que la valeur de u reste très petite, il faut que le terme affecté de $\mathrm{tang}\,a$ disparaisse; car supposons qu'au point de départ où l'on a $t = 0$, $k\sin h$ fût à peu près égal à $\mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,a$: comme l'argument du premier terme croît avec le temps, ces deux termes pourraient bientôt différer beaucoup, ce qui serait contre notre hypothèse, déduite des observations, savoir, que u reste toujours très petit, ou que l'angle φ est, à très peu de chose près, constant. Il faut donc, pour que l'équation puisse subsister, que l'on ait $\mathrm{tang}\,a = 0$, et par conséquent que a soit égal à zéro, ou à une demi-circonférence, ce qui donne les équations

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \pm\mathrm{C}u, \quad \text{et} \quad u = k\sin(t\sqrt{\mp\mathrm{C}} + h).$$

Ainsi, de même que dans la théorie du pendule il n'existe que deux positions d'équilibre, il n'y a de même que deux cas où la valeur moyenne de la combinaison des longitudes désignée par φ reste constante; mais pour que u demeure toujours très petit, ou que l'équilibre soit stable, il faut encore que $\sqrt{\mp\zeta}$ soit toujours une quantité réelle, ne puisse devenir imaginaire, puisque sans cela $\sin t\sqrt{\mp\zeta}$ se changerait en exponentielles réelles, qui croîtraient indéfiniment avec le temps; ainsi, si ζ est négatif par lui-même, il doit être précédé du signe $-$, ce qui exige que l'on ait $\cos a = 1$, ou que a soit égal à zéro; si au contraire ζ est positif, il doit être pris aussi avec le signe $+$ sous le radical, et il faut par conséquent que l'on ait $\cos a = -1$, ou $a = \pi$.

Dans le cas des trois premiers satellites de Jupiter, le calcul donne, pour ζ, une quantité positive; l'angle φ ne doit donc qu'osciller de part et d'autre de deux angles droits, et c'est ce que confirment en effet les observations. La période de cette oscillation est donnée par l'équation $t\sqrt{\zeta} = 2\pi$, et elle est égale à $\frac{2\pi}{\sqrt{\zeta}}$, ce qui la fait monter à environ deux ans, lorsqu'on met dans cette expression pour ζ sa valeur. Pour déterminer son *maximum*, il faudrait connaître, au moyen des observations, la valeur de $\frac{du}{dt}$ correspondante à $t=0$. En effet, soit α cette valeur, et supposons qu'on ait $u = 0$ quand $t = 0$, ce qui donne en général $u = k\sin t\sqrt{\zeta}$: on aura, en différenciant et en faisant ensuite t nul, $\alpha = k\sqrt{\zeta}$, d'où l'on tire $k = \frac{\alpha}{\sqrt{\zeta}}$; mais comme jusqu'ici, malgré la rapidité de la période de u, on n'a pu trouver aucune trace de cette inégalité, il s'ensuit que, même dans son *maximum*, elle est d'une extrême petitesse. Ainsi la commensurabilité des moyens mouvemens produit une espèce de libration entre les longitudes moyennes des trois satellites, qui est une véritable équation séculaire, en tant qu'elle est indépendante de la configuration de ces corps entre eux, mais dont le coefficient est arbitraire, et paraît être jusqu'à présent insensible par les observations.

Il nous reste à faire voir que les variations des longitudes de l'époque, dont on ne peut faire abstraction dans les satellites de Jupiter, comme dans les planètes, ne modifient pas ces résultats. Supposons, pour cet effet, que ces variations ajoutassent à la valeur de $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, une quantité de la forme $\frac{d^2\psi}{dt^2}$: on peut, à cause de l'extrême longueur de leur période, comparée à celle de $\sin t\sqrt{\zeta}$, supposer toujours $\varphi = \pi + u$, u étant une très petite quantité; ce qui donne l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\zeta u + \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

On tire de là, en intégrant par approximation, ou en supposant d'abord le dernier terme constant, puis variable, et en modifiant la valeur de u de manière à ce que l'équation soit toujours satisfaite :

$$u = k\sin(t\sqrt{\zeta} + h) + \frac{1}{\zeta}\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{1}{\zeta^2}\frac{d^4\psi}{dt^4} + \text{etc.}$$

Nous avons vu que l'inégalité séculaire de la longitude de l'époque était de la forme $m'\int e'^2 dt$, et que la valeur de l'excentricité e' se composait généralement d'une quantité constante et d'une suite de termes de la forme $A\cos(\mu t + \alpha)$, μ étant de l'ordre des masses perturbatrices. Comme la différenciation de cette valeur fait sortir le très petit multiple μ en



dehors du signe périodique, il en résulte que la quantité $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ sera à la fois excessivement petite, et d'une période qui ne s'accomplit qu'en plusieurs milliers d'années : ce qui prouve qu'on peut la négliger par rapport à une inégalité dont la période n'est que de deux ans ; et il en est de même à plus forte raison des termes suivans.

Théorèmes qui résultent de la commensurabilité des moyens mouvemens.

Puis donc que l'angle $nt - 3n't + 2n''t + \epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon''$ ne fait qu'osciller de part et d'autre de deux angles droits, sa valeur moyenne est égale à deux angles droits, et l'on a, en n'ayant égard qu'aux quantités moyennes, $n - 3n' + 2n'' = 0$; c'est-à-dire que *le moyen mouvement du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième, est exactement et constamment égal à zéro.* Il n'est pas même nécessaire que cette égalité ait eu lieu exactement à l'origine, ce qui serait très peu vraisemblable ; il suffit qu'elle ait été fort approchée, et que $n - 3n' + 2n''$ ait été moindre, abstraction faite du signe, que $k\sqrt{\zeta}$, pour que l'attraction mutuelle des trois satellites ait rendu cette égalité rigoureuse.

On a ensuite $\epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'' = \pi$; ainsi, *la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits ;* et l'on peut conclure de là, que les équations séculaires des longitudes moyennes des satellites seront toujours tellement coordonnées par leur action mutuelle, que celle du premier, plus deux fois celle du second, sera toujours égale à trois fois l'équation séculaire du troisième. Ces beaux théorèmes, qu'on a proposé d'appeler les *Lois de Laplace*, du nom de celui qui les a le premier établis par la théorie, ont lieu relativement aux moyens mouvemens, et aux longitudes moyennes *synodiques* des trois satellites, parce qu'ils sont indépendans de l'axe auquel on rapporte les angles ; et il en résulte que les trois premiers satellites ne peuvent jamais être éclipsés à la fois. En effet, dans les éclipses simultanées du premier et du second, par exemple, $nt + \epsilon$ et $n't + \epsilon'$ sont égaux à une demi-circonférence, ce qui donne, en vertu de l'équation précédente, $2n''t + 2\epsilon'' = 3\pi$; d'où l'on voit que la longitude moyenne du troisième satellite, est alors égale à $\frac{3}{2}\pi$. Ces théorèmes montrent aussi que les deux inégalités principales du rayon vecteur, et de la longitude vraie du second satellite, c'est-à-dire celles dont l'argument est $nt - n't$ ou $2n't - 2n''t$, peuvent se réduire à une seule, dépendante du premier argument ; et que ces inégalités étant une fois réunies, il n'est point à craindre qu'elles viennent à se séparer par la suite.

CHAPITRE VII.

Travaux récens sur la théorie des mouvemens de translation des planètes.

TANDIS que la publication de l'admirable ouvrage des *Principes* fut, comme nous l'avons vu, suivie d'un grand nombre d'années où l'on ne vit paraître, dans ce genre, aucun travail important et original, celle du *Traité de Mécanique céleste* de M. Laplace, faite dans un siècle plus éclairé, semble au contraire avoir donné aux esprits une impulsion nouvelle et rapide. Nous ne parlerons pas ici des découvertes et des travaux astronomiques qui rendent déjà cette époque remarquable, mais nous nous bornerons à énu-

mérer les principaux Mémoires que ce siècle a vus naître, sur la théorie analytique des perturbations planétaires, et à donner une légère idée de chacun d'eux, en profitant des analyses qui en ont été faites dans le *Nouveau Bulletin de la Société Philomathique*.

Origine de la méthode de la variation des élémens.

On peut dire, avec Lagrange (*Méc. anal.*, tome II, page 77), que ce sont les observations elles-mêmes qui ont fait connaître la solution du problème des mouvemens des planètes, fondée sur la variation des élémens de leurs orbites elliptiques : puisque les irrégularités qu'elles firent découvrir dans ces mouvemens étaient assez petites pour que les astronomes, qui voulaient en tenir compte, dussent, en admettant toujours le mouvement elliptique comme étant le véritable, supposer seulement que les élémens éprouvaient de très légères variations; ce fut en effet la marche suivie par Newton dans sa Théorie de la Lune. Cette méthode, qui, considérée analytiquement, revient à substituer, à trois équations différentielles du second ordre, un nombre double d'équations du premier ordre, ne serait presque d'aucune utilité si la solution rigoureuse était possible; mais elle est très avantageuse dans le cas contraire, et lorsque les forces perturbatrices sont très petites; car elle permet de conserver la forme elliptique des orbites, de supposer même l'ellipse invariable pendant un temps infiniment petit, et de faire une suite d'approximations ordonnées suivant les puissances des forces perturbatrices; enfin, elle ramène immédiatement aux quadratures les valeurs déterminées par la première approximation. Euler est, à ce qu'il paraît, le premier qui soit parvenu, dès 1748, par ce procédé, aux véritables expressions analytiques de la variation de l'inclinaison et de la longitude du nœud; et il l'appliqua avec succès à la fin de sa Théorie de la Lune, de 1753, à celles du grand axe, de l'excentricité et de la longitude du périhélie, sans obtenir cependant des valeurs exactes dans les applications numériques qu'il fit de ses formules. Nous avons vu Lagrange parvenir, en 1776, à exprimer la variation du grand axe au moyen de la différentielle d'une certaine fonction Ω des forces perturbatrices, prise par rapport aux seules coordonnées rectangulaires du corps troublé, et donner, en 1781, de semblables formules pour tous les autres élémens, excepté la longitude de l'époque, qu'il se contenta d'exprimer en série. M. Laplace, qui avait déjà donné une méthode pour faire disparaître les arcs de cercle, fondée sur la variation des constantes arbitraires, fit dépendre, dans le chap. 8 du livre II de la *Mécanique céleste*, les expressions différentielles de l'excentricité de l'orbite, de son inclinaison et de la longitude de ses nœuds, des différentielles partielles de la fonction perturbatrice, par rapport aux coordonnées polaires; et il parvint, par une transformation, à mettre les deux dernières sous une forme plus simple et plus symétrique encore, en y exprimant la différentielle de chacune des deux variables relatives à la position de l'orbite, au moyen de la différentielle partielle, par rapport à l'une de ces mêmes variables. Il prouva dans le livre VI, que l'uniformité des moyens mouvemens n'est point altérée par les grandes inégalités de Saturne et de Jupiter, en ayant égard aux carrés des masses; ce qui était d'autant plus important, qu'il avait fait voir que ces grandes inégalités ont une influence considérable sur les variations séculaires des orbites de ces deux planètes; il montra aussi que les inégalités séculaires, dues aux carrés des forces perturbatrices, n'altéraient pas les équations de condition qui ont lieu entre les variations de chaque élément; que la partie de la fonction perturbatrice, qui est indépendante des moyens mouvemens, est constante par rapport aux élémens de la planète troublée; et que sa différentielle, par rapport à ces élémens, est nulle, du

moins lorsqu'on néglige les quantités du quatrième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Enfin, il fit voir, dans le livre VIII, imprimé en 1805, que l'inégalité séculaire de la Lune ne saurait être altérée par celles de son moyen mouvement.

1er Mémoire de M. Poisson sur ce sujet.

Tel était à peu près l'état de la science sur ce point, lorsque M. Poisson lut à l'Institut, le 20 juin 1808, son Mémoire *sur les inégalités séculaires des moyens mouvemens des planètes* (*), dans lequel il a le premier démontré que les quantités du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, ne peuvent produire aucune inégalité séculaire dans les grands axes ou dans les moyens mouvemens. Pour parvenir à ce théorème important pour la stabilité de notre système, et qui ne pouvait être établi sans le secours de la théorie, l'auteur, après avoir rappelé les formules d'où dépendent les variations de tous les élémens elliptiques, et en avoir donné de nouvelles, détermine directement, par l'analyse, les inégalités séculaires du moyen mouvement, dépendantes du carré des masses, en négligeant d'abord les quantités du quatrième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et en faisant usage de considérations sur l'ordre des termes, analogues à celles que nous avons présentées, chap. III, d'après la *Mécanique céleste*. Le résultat de ce calcul extrêmement long, et qui deviendrait impraticable pour les ordres supérieurs, lui fait voir que les termes non périodiques, qui sont en nombre infini, se détruisent tous dans l'expression du moyen mouvement. Il prouve ensuite, en recourant, ainsi que nous l'avons vu pag. 252, à l'équation générale des forces vives, sous la forme que lui a donnée M. Laplace (**), que si les variations des coordonnées de la planète troublée n'introduisent aucun terme non périodique dans l'expression du moyen mouvement, il en sera de même des variations des coordonnées de la planète perturbatrice, en ayant égard à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons. Il ne lui reste plus alors qu'à étendre la démonstration du premier point à un ordre quelconque par rapport à ces derniers élémens, et il y parvient généralement, en exprimant les variations des coordonnées de la planète troublée au moyen de celles de ses élémens elliptiques, en les substituant ensuite dans l'expression différentielle du moyen mouvement, et en les mettant, ainsi que nous l'avons fait page 252, sous une forme particulière, qui fait voir clairement que tous les termes séculaires doivent se détruire : ce résultat s'étend aussi à la variation du grand axe, et ne suppose aucune forme déterminée à la fonction perturbatrice.

L'auteur passe de là aux variations séculaires de la longitude moyenne, et les détermine à l'aide de l'expression bien remarquable qu'il avait donnée au commencement de son Mémoire pour celle de la longitude de l'époque, en remplaçant ainsi la formule de Lagrange seulement approximative, par une formule rigoureuse et très simple, que nous avons rapportée page 231 ; il retrouve aussi entre les inégalités séculaires de la longitude de l'époque, provenant de l'action mutuelle de deux planètes, le même rapport que M. Laplace avait obtenu entre les carrés des excentricités et des inclinaisons. Il démontre enfin que ces derniers élémens sont toujours renfermés dans d'étroites limites, et que la stabilité du système planétaire n'est pas altérée sous ce rapport, quand on a égard aux carrés des masses, et à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Nouvelles recherches de M. Laplace.

M. Laplace lut, le 17 août de la même année, au Bureau des Longitudes, un Mé-

(*) Il se trouve dans le XVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

(**) *Mém. de Paris*, 1784, pag. 18; *Méc. cél*, tom. I, pag. 131.

moire pour servir de *Supplément à la Mécanique céleste*, où il est parvenu à donner une forme plus simple aux expressions différentielles des élémens elliptiques des planètes, en ne les faisant dépendre que des différentielles partielles de la fonction perturbatrice, prises par rapport aux élémens eux-mêmes, et multipliées par des facteurs qui ne renferment que ces élémens. Pour cela, il a repris la formule de Lagrange, pour le grand axe, en remarquant qu'on pouvait y substituer, à la différentielle de la fonction perturbatrice par rapport aux coordonnées ou au moyen mouvement de la planète troublée, sa différentielle partielle par rapport à la longitude de l'époque; il est arrivé, pour la variation de cette dernière, à la même formule que M. Poisson; il a repris, pour l'excentricité, les nœuds et l'inclinaison, les expressions qu'il avait déjà données, en modifiant un peu la première, d'après la remarque que la différentielle partielle de la fonction perturbatrice par rapport à la longitude vraie, est égale à la somme de ses différentielles partielles par rapport aux longitudes de l'époque et du périhélie; enfin, il est parvenu à déterminer la différentielle du périhélie, en observant que celle de la fonction perturbatrice, prise par rapport aux élémens, est égale à zéro : ce qui donne une équation entre les différentielles des six élémens, au moyen de laquelle on obtient celle du périhélie, lorsque celles des cinq autres sont déjà connues.

Nous avons vu que le principal avantage de ces formules rigoureuses et très simples, était de déterminer les variations finies de chaque élément, par le développement d'une seule fonction en une série de cosinus d'angles qui croissent proportionnellement au temps, par la différenciation, la substitution et l'intégration de chaque terme; et que la partie indépendante du temps donne par là des formules différentielles des variations séculaires, aussi exactes qu'on veut par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et des inclinaisons. M. Laplace observe de plus, qu'elles mettent en évidence le beau théorème de M. Poisson : en effet, l'expression du moyen mouvement prend d'elle-même la forme d'où ce dernier a conclu qu'elle ne pouvait contenir aucune inégalité séculaire due aux variations des coordonnées de la planète troublée; et quant aux variations des coordonnées des autres planètes, M. Laplace prouve, par la forme même de la fonction perturbatrice, qu'elles ne peuvent pas non plus introduire d'inégalités séculaires, en quelque nombre que soient ces planètes.

Ces expressions conduisent l'auteur à la solution la plus générale et la plus simple des variations séculaires des élémens; il y présente la fonction perturbatrice sous une forme où elle devient indépendante du plan auquel on a rapporté les coordonnées, et que nous avons donnée d'après lui, chapitre III; il fait voir que la partie non périodique de cette fonction ne dépend que de celle du terme de son expression qui est symétrique par rapport à m et à m'; il détermine la position des orbites par rapport à la position variable de la ligne de leur intersection mutuelle; il fait voir que cette ligne ne sort pas du *plan invariable*, que son mouvement séculaire sur ce plan est donné par une intégration qui se rapporte aux quadratures, et conclut de ces formules les deux inégalités du mouvement lunaire en longitude et en latitude qui dépendent de l'aplatissement de la Terre, et qu'il avait déjà déterminées par une autre méthode.

Mémoire de Lagrange, qui date de la même époque.

L'attention de Lagrange sur un objet qui l'avait autrefois si heureusement occupé, et qu'il avait ensuite totalement perdu de vue, fut réveillée, comme il le dit lui-même, par la découverte de M. Poisson, et il présenta au Bureau des Longitudes, dans la séance



même où les belles recherches de M. Laplace lui furent communiquées, un Mémoire *sur la théorie des variations des élémens des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites.* Il forme la première partie du Mémoire qui se trouve, sous ce titre, dans ceux de l'Institut, pour l'année 1808.

Lagrange y considère, comme M. Laplace, les différentielles partielles de la fonction perturbatrice, par rapport aux constantes arbitraires qui proviennent de l'intégration des équations du mouvement elliptique, et il parvient, par une analyse très simple et très élégante, à exprimer chacune d'elles par une fonction linéaire et symétrique des variations infiniment petites de ces arbitraires, où celles-ci se trouvent multipliées par de certaines combinaisons des différentielles partielles des coordonnées rectangulaires du corps troublé, et de leurs dérivées, prises par rapport à ces mêmes constantes; ce sont ces expressions générales que nous avons données au haut de la page 227 : elles sont indépendantes de la considération des orbites elliptiques, et peuvent s'appliquer à toute autre hypothèse de gravitation, dans laquelle les orbites ne seraient plus des sections coniques. L'auteur, mettant alors les trois équations du mouvement sous une forme particulière, parvient, en les différenciant par rapport aux constantes arbitraires, et en combinant les résultats, à démontrer généralement, ainsi que nous l'avons fait page 224, que toutes les combinaisons de différentielles partielles, qui forment les coefficiens de ces expressions, sont constantes, c'est-à-dire qu'elles ne renferment pas le temps d'une manière explicite, et ne peuvent être fonctions que des élémens eux-mêmes. Il reprend ensuite l'équation qui donne la variation du grand axe de la planète troublée, pour démontrer, à l'aide des formules précédentes, et indépendamment de celles du mouvement elliptique, que les variations des élémens de cette planète ne peuvent introduire, dans la valeur du grand axe, aucun terme proportionnel au temps, et du second ordre par rapport aux masses perturbatrices. Nous avons déjà vu qu'on ne pouvait pas se servir de la même méthode pour étendre ce théorème aux variations des élémens des autres planètes, parce que la fonction perturbatrice n'est pas symétrique par rapport aux coordonnées de toutes les planètes; pour éviter cet inconvénient, Lagrange déplace l'origine des coordonnées, qui était au centre du Soleil, et il la transporte au centre de gravité du système planétaire; la fonction devient alors symétrique, et demeure la même pour toutes les planètes, Il démontre ensuite l'invariabilité des grands axes des ellipses décrites autour de ce dernier centre, en ayant égard aux variations des élémens de toutes les planètes; et il fait voir enfin, que ces grands axes étant invariables, ceux des ellipses décrites autour du centre du Soleil le sont aussi.

Dans la seconde partie de ce Mémoire, lue à l'Institut le 12 septembre de la même année, Lagrange particularise les constantes de l'intégration, qui étaient jusqu'ici des fonctions quelconques des élémens elliptiques; il prend pour ces constantes les élémens eux-mêmes, et calcule alors, au moyen des formules connues du mouvement elliptique, et en employant la considération de l'anomalie excentrique, les valeurs des quinze coefficiens qu'il est nécessaire de déterminer immédiatement; les substitutions qui paraissent devoir être très compliquées, se simplifient beaucoup lorsqu'on rejette d'avance tous les termes qui contiennent le temps hors des signes périodiques, en se fondant sur ce que tous les coefficiens doivent être indépendans du temps. Le résultat du calcul fait voir que les expressions de chacune des différentielles partielles de la fonction perturbatrice

renferment au plus, dans le cas des planètes, les différentielles de deux des six élémens, au lieu de contenir, comme dans le cas général, celles de cinq d'entre eux; de sorte que l'élimination qu'il faut faire pour obtenir la valeur de la différentielle de chaque élément, ne présente plus aucune difficulté. Lagrange fait, page 64, une remarque essentielle au sujet de la différenciation partielle de la fonction perturbatrice, relativement au grand axe, c'est qu'on peut se dispenser d'y faire varier la quantité n qui dépend de a; ce qui permet de substituer $\int ndt$ à la place de nt, et fait disparaître les termes qui se trouveraient multipliés par t. Les formules définitives auxquelles il parvient s'accordent avec celles de M. Laplace, et il fait voir comment on peut les appliquer à la recherche des équations séculaires.

Nouveaux Mémoire de Lagrange et de M. Poisson.

Il appartenait à l'auteur de la *Mécanique analytique*, de considérer la théorie de la variation des constantes arbitraires dans toute sa généralité, et d'en étendre l'usage à tous les problèmes de la Mécanique. C'est en effet le but du Mémoire que Lagrange lut à l'Institut le 13 mars 1809 (*). On sait que, quel que soit le système de corps dont on cherche le mouvement, et de quelque manière qu'ils agissent les uns sur les autres, on peut toujours réduire les variables qui déterminent leur position dans l'espace, à un petit nombre de variables indépendantes, en éliminant, au moyen des équations de condition données par la nature du système, autant de variables qu'il y a de conditions. Cette réduction supposée, le problème consiste à déterminer chacune de ces variables par le temps. Lagrange avait donné, dans la seconde partie de sa *Mécanique analytique*, la forme générale des équations différentielles, pour chacune des variables indépendantes dont il s'agit. Il suppose alors que, dans un problème donné, on soit parvenu à intégrer complètement les équations dont il dépend, mais en faisant abstraction de certaines forces perturbatrices très petites, qui agissent sur ces corps dans une raison quelconque des distances; il réduit l'effet de ces forces à ne faire varier, dans la solution générale, que les constantes arbitraires introduites par les différentes intégrations; et comme il doit y avoir deux constantes arbitraires, à raison de chaque variable, puisque ces variables dépendent d'équations différentielles du second ordre, il peut faire en sorte que non seulement leurs expressions finies, mais encore leurs expressions différentielles, soient les mêmes que si les constantes dont il s'agit demeuraient invariables. En considérant, sous ce point de vue, la variation des constantes arbitraires, il parvient à un résultat aussi simple qu'inespéré, savoir : que la fonction qui représente l'intégrale de toutes les forces perturbatrices, multipliées chacune par l'élément de la distance dont elle dépend, jouit, comme dans le cas des perturbations des planètes, de la propriété que ses différentielles partielles, relatives à chacune des constantes arbitraires, sont exprimées uniquement par des fonctions différentielles de ces mêmes constantes sans le temps. L'auteur fait voir ensuite qu'on peut appliquer ces formules à l'un des problèmes les plus importans du système du monde, celui de la rotation des planètes autour de leur centre de gravité, en ayant égard à leur figure non sphérique, et à l'attraction que les autres planètes exercent sur chacune de leurs molécules; il annonce qu'il se pro-

(*) Il se trouve dans les *Mém. de l'Inst.* pour 1808, sous le titre de *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la Mécanique.*

pose d'en faire l'objet d'un autre Mémoire, mais il n'a pas exécuté ce projet, et c'est à M. Poisson qu'on doit de l'avoir le premier réalisé.

Dans le Mémoire actuel, Lagrange démontrait d'une manière fort longue, et en exécutant entièrement les différenciations, la propriété fondamentale que les coefficiens des différentielles des constantes, dans les expressions des différentielles partielles de la fonction perturbatrice, sont indépendans du temps; mais il prouva, peu de temps après, dans une *Addition* à ce Mémoire, qu'il était possible de simplifier l'équation intégrale qui exprime cette propriété, et de la déduire directement des trois équations différentielles du problème, par le seul jeu des caractéristiques Δ et δ, uniquement relatives à la variation des constantes arbitraires. Il montra aussi, dans un *Supplément*, que la formule qui donne la différentielle partielle de la fonction perturbatrice par rapport à l'une des constantes au moyen des différentielles de toutes les autres constantes, et à laquelle il n'était arrivé que par une analyse assez compliquée, pouvait se déduire immédiatement des équations primitives; et que son Mémoire présenté de cette manière ne tiendrait que deux ou trois pages.

M. Poisson lut aussi à l'Institut, le 16 octobre 1809, un Mémoire *sur la variation des constantes arbitraires, dans les questions de Mécanique*, dans lequel il présenta toute cette théorie sous un nouveau point de vue (*). Il parvint à exprimer directement les différentielles premières des constantes arbitraires devenues variables, au moyen des différentielles partielles de la fonction perturbatrice, prises par rapport aux constantes arbitraires, et multipliées par de certaines fonctions de ces mêmes quantités. L'auteur ayant démontré dans un lemme préliminaire, par une méthode dont la longueur est peut-être inévitable dans le cas général, que ces dernières fonctions ne renfermaient pas le temps d'une manière explicite, obtint ainsi des formules inverses de celles de Lagrange, et qui offrent avec ces dernières une singulière analogie. Elles sont plus directes et n'exigent aucune élimination; elles ont aussi l'avantage de pouvoir encore s'appliquer, quand les équations du mouvement primitif ne peuvent s'intégrer que par la méthode des quadratures, et qu'il est impossible par conséquent d'exprimer les coordonnées des mobiles en fonction des constantes arbitraires.

M. Poisson choisit pour premier exemple de l'application de ses nouvelles formules, le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe suivant une loi quelconque. On parvient dans ce cas à séparer les variables dans les équations différentielles du mouvement, sans pouvoir achever les intégrations, ni exprimer les variables sous forme finie, tant que la loi de l'attraction reste indéterminée. Cette circonstance n'empêche pas d'obtenir, au moyen des formules de M. Poisson, les variations des six arbitraires contenues dans les intégrales de ces équations différentielles. La forme de ces expressions ne dépendant pas de la loi d'attraction, elles doivent s'accorder avec les valeurs des différentielles des élémens des planètes qui se rapportent au cas de la nature, où cette force suit la raison inverse du carré des distances. L'auteur vérifie en effet qu'elles coïncident dans ce cas avec celles de Lagrange; et il prouve aisément, par quelques transformations, qu'elles s'accordent aussi avec celles du Supplément à la *Mécanique céleste*. Il fait ensuite l'application de ses formules à un second exemple, savoir, le mouvement de rotation d'un corps solide de figure quelconque; mais comme ce cas,

(*) *Voyez le* XVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

bien remarquable en ce que les différentielles des constantes qui s'y rapportent ont identiquement la même forme que dans le premier problème, n'entre pas dans notre sujet, nous ne devons pas nous y arrêter.

Lagrange parvint encore, dans un petit Mémoire lu le 19 février 1810, à simplifier l'application de ses formules générales aux problèmes de Mécanique, en remarquant que, si l'on développe les expressions des variables indépendantes, en séries de puissances ascendantes du temps, les fonctions de ces variables, qui forment les coefficiens de chaque terme des expressions générales des différentielles partielles de Ω, ne renfermant pas le temps, ne doivent contenir, après les substitutions, que les premiers termes tous constans de ces séries, et les coefficiens des seconds. Si donc on adopte ces quantités pour constantes arbitraires, on aura directement les expressions très simples de leurs différentielles, ou de celles des coordonnées et des vitesses initiales, lorsqu'il s'agit du mouvement de translation; expressions que M. Poisson avait données déjà, dans ce cas, à la fin du numéro 27 de son second Mémoire. Si l'on veut ensuite faire usage de nouvelles constantes arbitraires, on peut facilement, en les considérant comme des fonctions des premières, obtenir aussi leurs variations. C'est la marche que nous avons suivie page 226, dans la détermination des différentielles partielles de la fonction perturbatrice. On peut éviter ainsi l'élimination, en employant l'intermédiaire d'un système particulier de constantes arbitraires, pour lesquelles cette élimination se trouve toute faite, et en revenant ensuite de ces constantes particulières à des constantes quelconques. Les formules auxquelles M. Lagrange parvient ainsi, ne coïncident pas immédiatement avec celles de M. Poisson, parce que celles-ci renferment les constantes arbitraires en fonctions des variables du problème et de leurs différentielles, au lieu que celles-là ne renferment ces constantes qu'en fonctions d'autres constantes; mais il observe qu'il est facile de se convaincre *à priori* qu'elles conduisent aux mêmes résultats.

Les modifications successives, et les perfectionnemens graduels que Lagrange avait faits à sa théorie de la variation des constantes arbitraires, dans les problèmes de Mécanique, devaient faire désirer qu'il rassemblât tous ses travaux sur ce sujet, pour en former un tout réduit au degré de généralité et d'élégance qu'il pouvait lui donner. C'est à ce but important qu'il est parvenu dans la seconde édition de sa *Mécanique analytique*, dont le premier volume, imprimé en 1811, renferme une Section (la cinquième de la seconde partie) intitulée : *Méthode générale d'approximation pour les problèmes de Dynamique, fondée sur la variation des constantes arbitraires.* L'auteur a appliqué cette méthode au système du monde, dans la Section VII, qui contient, outre la théorie du mouvement elliptique ou parabolique, celle des variations des élémens des planètes, et en particulier celle de leurs inégalités séculaires, avec les équations de condition qui limitent leurs accroissemens; on n'y trouve pas cependant le développement de la méthode suivie pour l'intégration des équations séculaires, ni la théorie des inégalités périodiques. La mort a enlevé ce grand homme au monde savant, avant qu'il eût terminé son ouvrage, et l'on devra toujours regretter cette perte irréparable.

La première classe de l'Institut avait proposé, dès l'année 1804, pour sujet d'un prix de Mathématiques, *la théorie des planètes, dont l'excentricité et l'inclinaison sont trop considérables pour qu'on en puisse calculer les perturbations assez exactement par les méthodes connues;* elle n'exigeait que des formules analytiques, mais disposées de ma-

nière qu'on pût les appliquer avec sûreté, soit à la planète Pallas, soit à toute autre. N'ayant alors reçu aucun Mémoire sur la question proposée, elle a continuellement remis ce sujet au concours, sans obtenir encore aucune solution satisfaisante. MM. Burckhardt et Binet sont parvenus cependant l'un et l'autre à pousser plus loin qu'on ne l'avait encore fait le calcul analytique des perturbations. Le premier, dans un Mémoire compris dans ceux de l'Institut pour 1808, a déterminé, par la méthode de M. Laplace, plusieurs classes de termes qui donnent des perturbations des six premiers ordres; le second a présenté à l'Institut, en 1812, un grand travail sur le développement de la fonction d'où dépend le calcul des perturbations des planètes, et dont l'objet est de fournir les moyens de calculer immédiatement un terme quelconque de ce développement dépendant d'un argument déterminé, en supposant l'approximation portée jusqu'aux septièmes dimensions des excentricités et des inclinaisons.

M. Poisson a pris, dans l'année 1816, la *Mécanique analytique* pour texte d'un cours public, où il a particulièrement développé la théorie des perturbations planétaires, en cherchant à en simplifier de nouveau l'exposition. Il a présenté à l'Institut, le 2 septembre de cette même année, un nouveau Mémoire *sur la variation des constantes arbitraires, dans les questions de Mécanique*, dont la publication est impatiemment attendue des amis des Sciences mathématiques. On voit, d'après l'annonce que l'auteur en a faite dans le *Bull. de la Soc. Phil.*, de 1816, page 148, qu'il s'y est proposé d'obtenir les expressions différentielles des constantes arbitraires, ou du moins une partie d'entre elles, par une méthode indépendante de la nature du problème. Il trouve, en général, dix constantes arbitraires dont les différentielles sont connues *à priori*, savoir, les six constantes qui sont relatives au centre de gravité, la constante qui entre dans l'équation des forces vives, et celle que contient chacune des trois équations relatives à la conservation des aires; ou bien, à la place des trois dernières, les deux angles qui déterminent la direction du *plan invariable*, et la somme des aires projetées sur ce plan. Dans le problème du mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe, et dans celui du mouvement de rotation, on n'a pas à considérer les six constantes relatives au centre de gravité; mais, aux quatre autres, il en faut joindre deux, dont l'une est la constante ajoutée au temps, et l'autre un angle compté dans le plan invariable : ces deux constantes n'entrant pas dans les intégrales communes à tous les problèmes, leurs différentielles ne sont pas connues *à priori;* mais l'espèce de réciprocité qui existe entre les coefficiens contenus dans les différentielles des constantes qui se rapportent à un même problème, ne laisse qu'un seul coefficient à déterminer par rapport aux deux nouvelles constantes; et sa valeur, calculée par les formules du premier Mémoire de M. Poisson, se trouve être égale à zéro pour l'un et pour l'autre problème. L'auteur, après avoir ainsi obtenu des expressions différentielles des six constantes arbitraires, applicables aux deux questions, et les mêmes que celles du Mémoire cité, se borne à considérer, dans son quatrième et dernier paragraphe, les variations des grands axes et des moyens mouvemens des planètes. Il rappelle d'abord sa démonstration de l'invariabilité de ces élémens, quand on néglige les quantités du troisième ordre par rapport aux masses des planètes, et qu'on fait abstraction des inégalités périodiques; il démontre ensuite que les variations des coordonnées de la planète troublée n'introduiraient aucune inégalité séculaire dans la différentielle seconde de son moyen mouvement, lors même que l'on pousserait dans

celles-là l'approximation jusqu'aux termes du second ordre inclusivement, et peut en conclure, par induction, qu'il en serait de même dans toutes les approximations suivantes. Il resterait encore à démontrer que les variations des coordonnées des planètes perturbatrices ne peuvent pas non plus produire, dans le moyen mouvement, d'inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses ; mais heureusement, passé le second ordre, cette question n'intéresse plus l'Astronomie, puisque si le moyen mouvement renfermait des inégalités séculaires dues à ces variations, elles seraient comparables, dans leur *maximum*, aux inégalités périodiques ordinaires, et n'auraient par conséquent aucune influence sensible sur les mouvemens planétaires.

Nous terminerons ici l'exposition que nous avions entreprise des principaux travaux relatifs à l'une des plus belles parties de l'Astronomie, espérant que la lecture de cet *Essai* pourra inspirer à quelques personnes le désir de puiser aux ouvrages originaux, et que l'analyse de ce qui a déjà été fait de plus remarquable sur ce sujet, pourra provoquer de nouvelles recherches.

NOTE

Relative à l'équation séculaire de la Lune.

NOUS n'avons pas cité, dans le chapitre 10 de notre première partie, le Mémoire *sur l'équation séculaire de la Lune*, donné par Lagrange dans le Recueil de l'Académie de Berlin pour 1793, soit parce qu'étant fort postérieur à la découverte de M. Laplace, il perdait ainsi une grande partie de son intérêt, soit parce que nous n'avions pas encore parlé de la méthode sur laquelle il est fondé : c'est à suppléer cette omission que la note suivante est destinée.

Nous avons vu que Lagrange avait le premier reconnu, par la théorie, que les longitudes moyennes pouvaient être sujettes à des variations séculaires dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons, et nous avons donné d'après lui, au bas de la page 201, une formule approchée de ces variations. Il lui échappa, dans l'application numérique qu'il en fit à Jupiter et à Saturne (*Mém. de Berl.* 1783, pages 220 et 223), une singulière erreur de calcul ; car il supposa, dans l'évaluation des coefficiens, que la division d'un certain nombre de secondes par un autre nombre de secondes, donnait pour quotient une fraction de seconde, tandis que le quotient était un nombre abstrait exprimé en parties du rayon pris pour unité. C'est à cela (de même qu'à une légère inexactitude que Lagrange a remarquée depuis dans la valeur du coefficient (2) du second terme de sa formule, qui devait être égal et de signe contraire au coefficient (4) du quatrième) qu'est due l'excessive petitesse de l'inégalité qu'il en conclut pour Jupiter et pour Saturne ; et ce résultat lui fit alors, probablement, regarder comme inutile de faire la même application à la Lune.

L'objet de son Mémoire de 1793 est de montrer avec quelle facilité sa formule fournissait, en y substituant la Terre au Soleil, la Lune à Jupiter, et le Soleil à Saturne, les termes dont M. Laplace venait de déduire l'explication de l'équation séculaire de la Lune. Il trouve en effet, page 296, dans l'expression différentielle de la variation sécu-

laire de la longitude de l'époque Σ, un terme qui peut être mis sous la forme......
$\frac{3}{4} n^2 (\tang^2\gamma - \lambda'^2)\, d\varpi$; n étant le rapport des temps périodiques de la Lune et de la Terre, λ' l'excentricité de l'orbite de la Terre, ϖ le moyen mouvement de la Lune, γ l'inclinaison mutuelle des deux orbites; et l'intégrale $-\frac{3}{4} n^2 \int \lambda'^2 d\varpi$, considérée seule, lui donne, en y mettant pour λ' sa valeur approchée de la forme $a + bt$, ce qu'il appelle *l'équation séculaire du mouvement moyen.*

Il manquait cependant deux choses à cette méthode pour la rendre entièrement satisfaisante. En effet, il fallait d'abord prouver que le terme dépendant de l'inclinaison mutuelle ne pouvait apporter aucune modification sensible dans la variation séculaire de l'époque : c'est ce que nous avons fait page 255, en démontrant, d'après M. Laplace, que cette inclinaison est constante, même dans le cas de la Lune; et comme l'équation séculaire dépend du carré des masses, il fallait aussi avoir démontré l'invariabilité des moyens mouvemens, en allant jusqu'aux quantités de cet ordre, pour pouvoir supposer que toute l'inégalité séculaire de la longitude moyenne était comprise dans celle de la longitude de l'époque. Au reste, il était possible, dans le cas de la Lune, de se passer de ce dernier théorème, par la considération suivante, qui est due à M. Laplace.

En effet, nous avons déjà vu, d'après l'expression générale de la variation du moyen mouvement, que ce n'était que par la combinaison des termes périodiques, qu'il pouvait résulter dans cet élément des termes séculaires de l'ordre du carré des masses. Supposons donc dans Ω un terme $A \cos (i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + \alpha)$ que l'on combine avec un autre terme $B \cos (g'n't - gnt + g'\epsilon' - g\epsilon + 6)$ provenant de la variation des élémens : il en résultera dans $\delta\Omega$ la quantité $\frac{1}{2} AB \cos [(i' - g')(n't + \epsilon') - (i - g)(nt + \epsilon) + \alpha - 6]$, ce qui produit dans $\frac{d.\delta\Omega}{d\epsilon}$, en observant de ne différencier que par rapport aux ϵ qui se trouvaient primitivement dans Ω, le terme

$$\frac{1}{2} ABi \sin [(i' - g')(n't + \epsilon') - (i - g)(nt + \epsilon) + \alpha - 6];$$

celui-ci ne peut faire naître d'inégalité non périodique que lorsqu'on a $i = g$, $i' = g'$, et que i n'est ni égal à zéro, ni égal à i'. En effet, les premières conditions sont nécessaires pour que les moyens mouvemens disparaissent, et les dernières doivent avoir lieu pour que le terme tout entier ne soit pas nul, puisque nous avons vu, page 234, que $i' - i$ était égal à la somme des multiples des angles ϖ, ϖ' et λ qui entraient sous le signe périodique, et que la supposition de $i' - i$ égal à zéro, donnerait par conséquent $\alpha = 0$, $6 = 0$.

On voit par là que si la variation des élémens pouvait produire, dans le moyen mouvement, des termes non périodiques, ils dépendraient nécessairement du sinus des longitudes du nœud ou du périhélie de la planète troublée; et comme les variations de ces élémens dans la théorie de la Lune rentrent, à cause de leur rapidité, dans la classe des simples inégalités périodiques, on peut en conclure *à priori*, que s'il existait quelque inégalité séculaire dans le moyen mouvement de la Lune, elle ne pourrait altérer celle de sa longitude moyenne.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer à ce sujet qu'on peut, par la seule méthode donnée par Clairaut, dans sa *Théorie de la Lune*, découvrir le terme qui produit l'équation séculaire de ce satellite. Reprenons en effet les notations du chapitre 2 de notre



première partie, et désignons par r et l les distances de la Lune et du Soleil à la Terre; par k et f les demi-paramètres des deux orbites, par e et i leurs excentricités, par z et mv les anomalies vraies correspondantes comptées de l'apside supérieure; nous aurons, d'après les pages 24 et 26,

$$\frac{k}{r} = 1 - e\cos mv - \text{etc.}, \quad \frac{f}{l} = 1 - i\cos z, \text{ d'où } \frac{r^3}{k^3} = 1 + \text{etc.}, \frac{f^3}{l^3} = 1 + \tfrac{3}{2} i^2 + \text{etc.}$$

Ces valeurs étant substituées dans le terme $-\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r^3}{k^3} \cdot \frac{f^3}{l^3}$ de l'expression de la fonction Ω de Clairaut, qui se trouve page 43 de la seconde édition de *sa Théorie*, y feront naître la quantité $-\frac{3}{4}\alpha i^2$, où $\alpha = \frac{Nk^3}{Mf^3}$ représente le carré du rapport des moyens mouvemens de la Lune autour de la Terre, et de la Terre autour du Soleil.

Ainsi l'intégration complète de l'équation fondamentale $\frac{d^2s}{dv^2} + s + \Omega = 0$, donnée par Clairaut, page 5 de sa *Théorie*, et à laquelle nous sommes parvenus page 104, amènera dans la valeur de s, ou de $1 - \frac{k}{r}$, le terme $\frac{3}{4}\alpha i^2$, et de là dans celle de r^2 le terme $k^2(1 + \frac{3}{2}\alpha i^2)$.

Or, l'équation des aires donne dans ce cas $r^2dv = k^2ndt$, en désignant par n le moyen mouvement de la Lune; ainsi le terme dont il s'agit produira, dans l'expression de la longitude vraie v, la quantité $-\frac{3}{2}\alpha\int i^2.ndt$, ce qui s'accorde entièrement avec l'expression de l'équation séculaire de la Lune, donnée par M. Laplace. *Méc. cél.*, tome III, page 227.

Au reste, il faut se rappeler que la variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre n'étant pas généralement admise du temps de Clairaut : lors même qu'il aurait reconnu l'existence de ce terme, il est probable qu'il n'en aurait déduit aucune conséquence utile, et qu'il l'aurait négligé comme étant compris dans le moyen mouvement observé.

FIN.

ADDITIONS.

Page 13, *ligne* 13, *en remontant*. On doit mettre au rang des meilleurs Commentaires de l'ouvrage des *Principes*, celui qui est à la suite de la traduction française de ce traité par Mᵉ du Chastellet, et où se trouvent particulièrement développées les théories des trajectoires, de l'attraction des sphéroïdes, de la figure de la Terre et des marées.

Page 96, *ligne* 14, *en remontant*. M. Burckhardt a présenté à l'Institut, le 30 janvier 1809, un *Mémoire sur plusieurs moyens de perfectionner les Tables de la Lune*, dans lequel il a simplifié l'application de la règle, attribuée à Mayer, par laquelle on détermine, par observation, le coefficient d'une inégalité, et qui consiste à diviser la somme des erreurs des Tables par la somme des sinus de l'argument que l'on considère : en donnant un moyen simple d'obtenir *à priori* cette dernière somme d'une manière suffisamment exacte. Il a inséré dans la *Conn. des Tems* de 1812, un petit Mémoire sur l'usage de la période de dix-huit ans pour trouver avec facilité des lieux approchés de la Lune. Ses Tables, construites à l'aide de plus de quatre mille observations, ont été présentées à l'Institut, en décembre 1811 ; ce sont les premières où l'on corrige tous les argumens, à commencer par celui de l'*évection*, en y ajoutant la somme de toutes les équations précédentes. Elles ont été adoptées par le Bureau des Longitudes pour les calculs de la *Connaissance des Tems*.

Page 99, *ligne* 14. L'angle $\varphi - \alpha$ est ce qu'on appelle l'*argument de la latitude*.

100, 9, *en remontant*. Les lignes on et $o\mu$ sont les espaces décrits en vertu des forces Σ et Π, quand on suppose que ces forces impriment au commencement de l'instant dt, toute la vitesse qu'elles produisent réellement à la fin de cet instant.

Page 102, *ligne* 6. On voit plus clairement pourquoi la composante de la force π, qui agit suivant le rayon vecteur x, est $+\frac{\pi dx}{xdz}$, en traçant la figure de manière à ce que ce rayon prenne, dans l'instant dt, un accroissement au lieu d'un décroissement.

Page 104, *ligne* 5, *en remontant*. La marche la plus directe, pour déterminer les constantes de l'intégration, dans le cas de $\Omega = \cos mv$, est de ne pas ajouter de nouvelles constantes dans la détermination de Δ, mais de supposer, après la substitution de la valeur de Δ dans celle de s, que s et $\frac{ds}{dv}$ sont nuls quand $v=0$; et l'on trouve bien ainsi $c+\frac{1}{m^2-1}=0$, $g=0$.

Page 109, *ligne* 9. L'équation $l\cos \mathrm{STL} = l' \cos \mathrm{T}'$ s'obtient en abaissant des points S et S′ des perpendiculaires Sp et $S'p$ sur LT, et en remarquant que la ligne Tp est à la fois le cos. de l'angle STL, multiplié par le rayon ST, ou le cos. de l'angle S′TL, multiplié par le rayon S′T.

Page 168, *à la note*. Si l'on suppose que l'inclinaison se compte positivement en s'élevant du plan des xy vers l'axe des z, l'angle xaa' devra être pris négativement, ce qui

36

donnera $\tang a'x = -\theta \sin \omega$; mais comme l'on aura aussi $\tang a'x = \frac{z}{x} = -\frac{P}{R}$, il en résultera toujours en comparant : $\theta \sin \omega = \frac{P}{R}$.

Page 218, *ligne* 15. Pour obtenir les trois intégrales générales des aires, dans le cas de trois corps dont les masses sont M, m et m', multiplions d'abord respectivement par $-m[My - m'(y'-y)]$ et $m[Mx - m'(x'-x)]$, les deux premières équations du mouvement relatif du corps m, et ajoutons la somme des produits à celle des deux premières équations relatives à m' par $-m'[My' - m(y-y')]$ et $m'[Mx' - m(x-x')]$; les termes se détruiront tous mutuellement, à l'exception de ceux qui viennent du premier de chaque équation, et nous aurons simplement

$$M\left[m\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + m'\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2}\right] + mm'\left[\frac{(x'-x)(d^2y' - d^2y) - (y'-y)(d^2x' - d^2x)}{dt^2}\right] = 0,$$

ou en intégrant, avec une constante arbitraire c,

$$M\left[m\frac{xdy - ydx}{dt} + m'\frac{x'dy' - y'dx'}{dt}\right] + mm'\left[\frac{(x'-x)(dy'-dy) - (y'-y)(dx'-dx)}{dt}\right] = c.$$

Cette équation ne se rapporte qu'aux aires décrites sur le plan des xy, mais il suffit d'y changer x, x', y, y', en z, z', x, x', ou en y, y', z, z', et réciproquement, pour obtenir les deux intégrales premières relatives aux plans des xz et des yz, savoir :

$$M\left[m\frac{zdx - xdz}{dt} + m'\frac{z'dx' - x'dz'}{dt}\right] + mm'\left[\frac{(z'-z)(dx'-dx) - (x'-x)(dz'-dz)}{dt}\right] = c',$$

$$M\left[m\frac{ydz - zdy}{dt} + m'\frac{y'dz' - z'dy'}{dt}\right] + mm'\left[\frac{(y'-y)(dz'-dz) - (z'-z)(dy'-dy)}{dt}\right] = c''.$$

Ce sont ces intégrales d'où l'on peut conclure les relations du bas de la page 203.

On peut aussi mettre la première équation sous la forme

$$m(M+m')\frac{xdy - ydx}{dt} + m'(M+m)\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} - mm'\frac{xdy' - y'dx + x'dy - ydx'}{dt} = c.$$

Si l'on y substitue pour $\frac{xdy - ydx}{dt}$ et $\frac{x'dy' - y'dx'}{dt}$, leurs valeurs $\sqrt{(M+m)a(1-e^2)}\cos\gamma$ et $\sqrt{(M+m')a'(1-e'^2)}\cos\gamma'$, où γ et γ' représentent les inclinaisons des orbites de m et m' au plan des xy, et que l'on ne considère que les termes qui donnent des inégalités séculaires : on verra facilement que le dernier ne peut pas en produire qui soient du premier ou du second ordre des masses perturbatrices, et l'on aura en faisant......... $M + m = n^2a^3$, $M + m' = n'^2a'^3$, et en divisant partout par $a^2na'^2n'$, l'équation

$$ma'n'\sqrt{1-e^2}\cos\gamma + m'an\sqrt{1-e'^2}\cos\gamma' = c,$$

qui subsiste par rapport aux variations séculaires dépendantes du carré des masses.

Page 252, *dernière ligne*. On peut parvenir directement à l'équation des forces vives, sous sa forme définitive, en multipliant respectivement les trois équations de la page 217, par

$$2m[(M+m')dx - m'dx'],\quad 2m[(M+m')dy - m'dy'],\quad 2m[(M+m')dz - m'dz'],$$

et en ajoutant les produits, à ceux des équations relatives à m' par

$$2m'[(M+m)\,dx'-m\,dx],\quad 2m'[(M+m)\,dy'-m\,dy],\quad 2m'[(M+m)\,dz'-m\,dz].$$

Page 257, *ligne* 3. La partie de $s_{,}$, relative au mouvement séculaire de l'écliptique, ne se compose, comme l'on voit, que de termes périodiques, mais sa substitution dans la relation (7) de la page 99, qui détermine la tangente de la latitude en fonction de celle de l'inclinaison, produirait dans cette dernière, par la combinaison des quantités $\sin(v+\theta)$ et $\sin(v+gt+\theta)$, des termes de la forme $A\sin(gt+a)$ qui donneraient des inégalités séculaires. C'est pour cela qu'il a été nécessaire de prouver que ces termes acquerraient un trop grand diviseur pour qu'on dût y avoir égard.

Page 276, *ligne* 3. On doit remarquer que ces formules directes, de M. Poisson, étaient les seules qui pussent être employées dans le problème du mouvement de rotation, et que celles du premier Mémoire de Lagrange ne pouvaient en donner la solution.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	au lieu de	*lisez*
1	6 en remontant	humaines	physiques
3	3 et 8 en rem.	$15^{pi}\ 1^{l}$	$15^{pi}, 1$ (*voyez* Princ., liv. III, prop 4, et prop. 37, cor. 7).
17	27	m	mv
76	3 de la note	$r\cos\varphi$,	$z\cos\varphi$
Id.	*Id.*	$\frac{\cos\varphi\cos\psi}{1+x}$	$\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a(1+x)}$
90	4 en remontant	$\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)$	$0=\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)$
101	4	$rd^2v-2drdv$	$rd^2v+2drdv$
111	11	MO′ parallèle à OC	mO′ parallèle à OC
123—125		$\int d\mathrm{R}$	$\int d\mathrm{R}$
125	17	$v\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)$	$r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)$
128	15	$u=a\sin(v-\varpi)$	$u=a\cos(v-\varpi)$
168	6 en remontant	$\theta\cos\omega=s,\ \theta\sin\omega=u$	$\theta\sin\omega=s,\ \theta\cos\omega=u$
207	1 de la note	$-\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)+(z'-z)}}$	$-\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$
218	2	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
220	13	$r=\frac{k^2}{\mu+\sqrt{\mu^2+2hk^2}\cos(v-\omega)}$	$r=\frac{k^2}{\mu\mp\sqrt{\mu^2+2hk^2}\cos(v-\omega)}$
222	26	$mbd=\mathrm{tang}\,\gamma$	$mdb=\mathrm{tang}\,\gamma$
256	5 en remontant	$\frac{m'}{a'^3}=m$	$\frac{m'}{a'^3}=m^2$
266	4 en remontant	les excentricités et les inclinaisons	les carrés des excentricités et des inclinaisons
Id.	15	ou $n't-n''t$	ou $2n't-2n''t$
Id.	*Id.*	de ce dernier seulement	de $n't-n''t$
274	note marginale	nouveaux Mémoire	nouveaux Mémoires

